

تصنيف النقاط الثابتة والتشعبات في المنظومات الديناميكية ثنائية البعد

يوسف كاجان* أ.د. حامد عباس** د. كامل محمد***

*طالب دراسات عليا (دكتوراه) في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث

** أستاذ دكتور في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث

*** دكتور في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث

الملخص:

لنظرية التشعب دور رئيسي في دراسة الاستقرار البنيوي للمنظومات الديناميكية التي تتم دراستها في المجالات المختلفة للعلوم والهندسات والعلوم الاجتماعية. هذا البحث هو تمديد لعملنا السابق على التشعبات. حيث ننتقل من منظومات أحادية البعد إلى ثنائية البعد، ما زلنا نبحث في تلك النقاط الثابتة التي يمكن إنشاؤها أو تدميرها أو زعزعة استقرارها عند تغير قيم الوسيط. النقاط الثابتة التي تمت مناقشتها سابقاً لها مماثل في بعدين (وفي الواقع، في جميع الأبعاد). ومع ذلك اتضح أنه لا يحدث شيء جديد حقاً عند إضافة المزيد من الأبعاد. نقدم في هذا البحث دراسة لنقاط توازن المنظومات الديناميكية غير الخطية بشكل عام، والتشعبات الحاصلة في المنظومة ثنائية البعد من خلال دراسة المنظومات الخطية الموافقة لها في جوار نقاط التوازن.

الكلمات مفتاحية:

تشعب العقدة السرجية، الأشكال الناضمية، التشعب الحرج، تشعب المذراة، التتابع العديمة.

Classification of Fixed Points and Bifurcations in Two -Dimensional Dynamical Systems

Abstract:

Bifurcations theory has a key role in the study of structural stability of dynamical systems encountered in various branches of scientific fields as humanities, engineering, social science, etc.

This research is an extension of our previous work on bifurcations. As we move from one-dimensional to two-dimensional systems, we are still looking at those fixed points that can be created, destroyed, or destabilized as parameters are varied.

The bifurcations of fixed points discussed previously have analogs in two dimensions (and, in fact, in all dimensions). However it turns out that nothing new really happens when you add more dimensions.

In this research, we present a study of the equilibrium points of nonlinear dynamic systems in general, and the bifurcations occurring in the two-dimensional system by studying the corresponding linear systems in the vicinity of the equilibrium points.

Key words: Saddle-Node Bifurcation, Transcritical Bifurcation, Normal Form, Pitchfork Bifurcation, nullclines.

مقدمة:

يكون التدفق في فضاءات الحالة أحادية البعد موجه بشكل دقيق، حيث يتم إجبار جميع المسارات على التحرك بشكل مطرد أو البقاء ثابتة. أما في فضاءات الحالة ذات الأبعاد الأعلى، يكون للمسارات مجال أكبر للمناورة، ولذلك يصبح من الممكن وجود نطاق أوسع للسلوك الديناميكي. نناقش في هذه الورقة المنظومات الخطية ذات البعدين، والتي تلعب دورًا مهمًا في تصنيف النقاط الثابتة للمنظومات غير الخطية في المقطع الأول. أما في المقطع الثاني نناقش الخصائص العامة للمنظومات غير الخطية ثنائية الأبعاد، بناء على معرفتنا بالمنظومات الخطية. المقطع الثالث هو تمديد لعملنا السابق على التشعبات. حيث ننتقل من منظومات أحادية البعد إلى ثنائية البعد لنناقش التشعبات الحاصلة فيها [Kuznetsov 1997].

1- تصنيف نقاط التوازن للمنظومات الخطية:

نعرف المنظومة الخطية ذات بعدين بأنها من الشكل

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \quad (1)$$

حيث a, b, c, d ثوابت. تكتب هذه المنظومة بالشكل المصفوفي $\dot{X} = AX$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ندرس الحالة العامة للمصفوفة 2×2 ، بهدف تصنيف كل صور الحالة الممكنة. نلاحظ أن الحل الصفري هو نقطة توازن لأي مصفوفة مختارة A . ننظر لحل المعادلة $\dot{X} = AX$ على أنها مسارات تتحرك في المستوي (x, y) . تعطى المعادلة المميزة

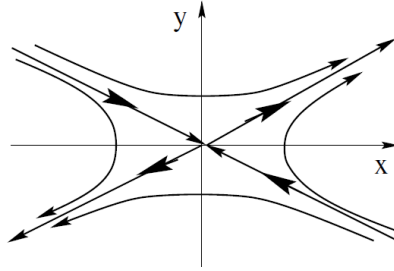
للمصفوفة A بالصيغة $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$ حيث $\Delta = \det(A) = ad - bc$ ،
 $\tau = \text{trace}(A) = a + d$ ويعطى الحلان (القيم الذاتية) بالصيغة

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

حيث $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$.

أنواع نقاط التوازن للقيم الذاتية الحقيقية:

1- حالة القيم الذاتية والأشعة الذاتية حقيقية وتحقق $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ أو $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$: تدعى نقطة التوازن نقطة سرجية، تمتلك لوحة فضاء الحالة للمنظومة الخطية متنوعتين موجهتين عبر الأشعة الذاتية إحداهما مستقرة وموافقة للقيمة الذاتية ذات الجزء الحقيقي السالب والثانية غير مستقرة وموافقة للقيمة الذاتية ذات الجزء الحقيقي الموجب (الشكل 1).



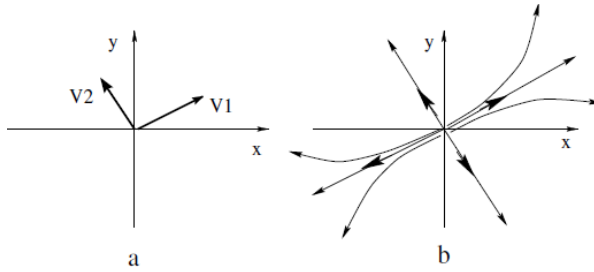
الشكل (1) - النقطة السرجية

2- حالة $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$: تدعى هنا نقطة التوازن عقدة غير مستقرة (non stable node) ويكون للمنظومة متنوعتين غير مستقرتين موجهتين باتجاه الأشعة الذاتية الشكل (2).

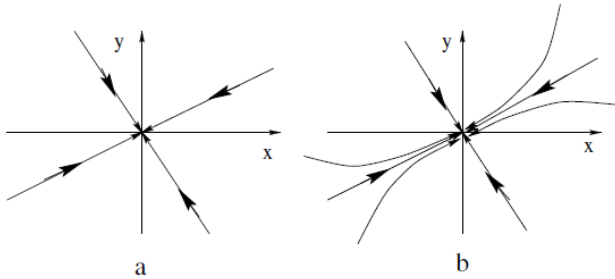
3- حالة $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$: تدعى نقطة التوازن بعقدة مستقرة stable node وينفس الطريقة نجد لوحة فضاء الحالة الشكل (3).

حالة خاصة: عندما القيم الذاتية $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ نحنا أمام حالتين إما أن يوجد متجهان ذاتيان مستقلان مقابلين للقيمة الذاتية λ أو أن يوجد متجه ذاتي واحد فقط.

إذا كان $\lambda \neq 0$ تكون كل المسارات عبارة عن مستقيمت مارة من نقطة الأصل، وتسمى النقطة الثابتة بهذه الحالة عقدة نجمية (Star-node). الشكل (4). عندما $\lambda = 0$ فإن المستوي مليء بالنقاط ثابتة. أما بحال وجود شعاع ذاتي وحيد أي الفضاء الذاتي موافق لقيمة ذاتية وحيدة، مثال ذلك المصفوفة من الشكل $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ حيث $b \neq 0$ ، تمتلك هذه المصفوفة فضاء ذاتي ببعد واحد واتجاه ذاتي واحد (وهي $(1,0), (0,0)$). تدعى النقطة الثابتة بهذه الحالة بعقدة متحللة (degenerate-node). تظهر لوحة الحالة في الشكل (5) حيث تصبح كل المسارات موازية للاتجاه الذاتي عندما $t \rightarrow \mp\infty$.



الشكل (2)- عقدة غير مستقرة



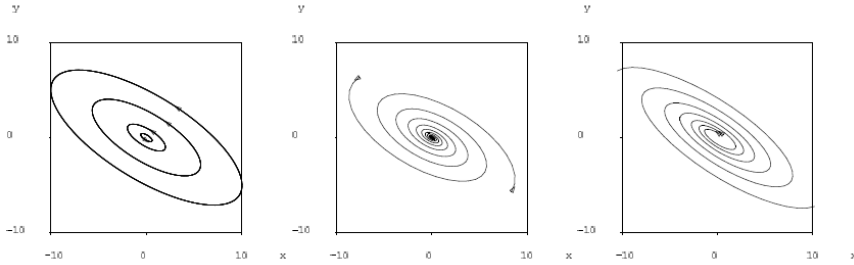
الشكل (3) - عقدة مستقرة



الشكل (4) عقدة نجمية

الشكل (5) عقدة متحللة

القيم الذاتية عقدية: حالة $\lambda_{1,2} = \pm i \beta$: تدعى نقطة التوازن بمركزية (Center) وتكون لوحة الفضاء مجموعة من القطوع الناقصية المتحدة بالمركز. وعندما $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \beta ; \alpha < 0$ تكون نقطة التوازن حلزونية مستقرة (Stable-Spiral) وعندما $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \beta ; \alpha > 0$ تكون حلزونية غير مستقرة (non-Stable-Spiral)، يسبب الجزء التخيلي للقيمة الذاتية دوران المسارات في لوحة فضاء الحالة الشكل 6.



a- نقطة مركزية

b- حلزون مستقرة

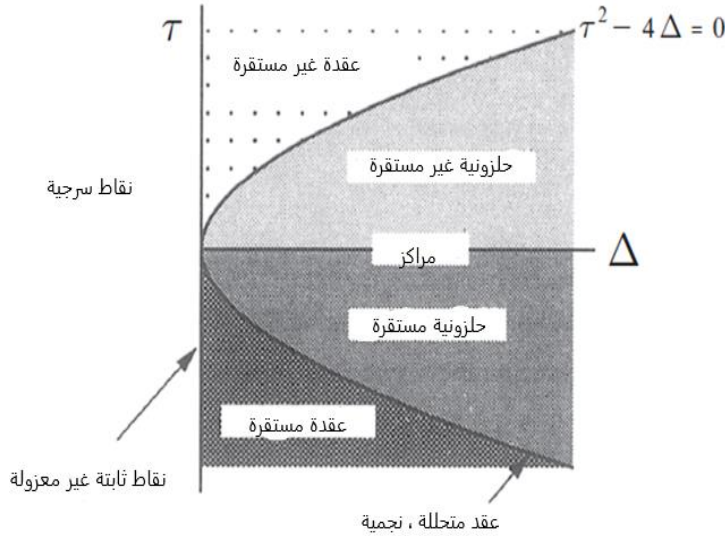
c- حلزون غير مستقر

الشكل 6 لوحة الفضاء بحال القيم الذاتية عقدية

نتائج تصنيف نقاط التوازن للمنظومات الخطية:

يظهر المخطط (7) نوع واستقرار جميع النقاط الثابتة للمنظومات الديناميكية (1) .

إذا كانت $\Delta < 0$ ، فإن القيم الذاتية حقيقية ولها إشارات متعاكسة، وتكون النقطة الثابتة سرجية. إذا كانت $\Delta > 0$ فإن القيم الذاتية إما حقيقية ولها نفس الإشارة (العقد)، أو أعداد عقدية (حلزونية ومركزية). تحقق العقد $\tau^2 - 4\Delta > 0$ وتحقق الحلزونية $\tau^2 - 4\Delta < 0$. يتم تحديد استقرار العقد والحلزونية بواسطة τ . عندما تكون $\tau < 0$ ، تكون القيم الذاتية ذات أجزاء حقيقية سالبة، وبالتالي فإن النقطة الثابتة مستقرة. عندما $\tau > 0$ تصبح العقد والحلزونية غير مستقرة. القطع المكافئ $\tau^2 - 4\Delta = 0$ هو الحد الفاصل بين العقد والحلزونية، حيث تعيش العقد النجمية والمتحللة على هذا القطع المكافئ. كما تقع المراكز المستقرة طبيعياً على الحد الفاصل $\tau = 0$ ، حيث القيم الذاتية تخيلية بحتة [Strogatz 2015].



(الشكل 7) تصنيف نقاط التوازن

إذا كانت $\Delta = 0$ ، فإن قيمة واحدة على الأقل من القيم الذاتية تكون صفرية. وبالتالي تكون الأصل نقطة ثابتة غير معزولة، وبهذه الحالة إما أن يوجد خط كامل من النقاط الثابتة، أو مستوى من النقاط الثابتة إذا كانت $A = 0$. يوضح الشكل (7) أن النقاط الثابتة السرجية والعقد والحلزونية هي الأنواع الرئيسية للنقاط الثابتة، التي تحدث في مناطق مفتوحة كبيرة من المستوى (Δ, τ) . أما المراكز والنجوم والعقد المتحللة، والنقاط الثابتة غير المعزولة هي حالات حدودية تحدث على طول المنحنيات في المستوى (Δ, τ) . تحدث المراكز بشكل شائع في المنظومات الديناميكية عديمة الاحتكاك المحافظة على الطاقة [Pomeau 1980].

مثال 1-1: منظومة روميو وجولييت:

روميو مغرم بجولييت، لكن في نسختنا من هذه القصة، جولييت متقلبة بالحب. كلما أحبها روميو، زادت رغبة جولييت في الهروب والاختباء. لكن عندما يصاب روميو بالإحباط ويتراجع، تبدأ جولييت في العثور عليه بشكل غريب. لتكن $R(t)$ نسبة حب روميو على كره روميو لجولييت في الوقت t . $J(t)$ نسبة حب جولييت على كره جولييت لروميو في الوقت t . تشير القيم الموجبة للنسب R, J إلى الحب، والسالبة إلى الكراهية. تعبر المنظومة غير الخطية التالية طقس الحب للعشاق [Strogatz 1988].

$$\dot{R} = aR + bJ$$

$$\dot{J} = bR + aJ$$

حيث $a < 0, b > 0$. مقياس للحذر a (كل منهم يحاول تجنب رمي نفسه على الآخر) و b مقياس للاستجابة (كل واحد منهما متحمس للآخر).

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ تكتب المصفوفة الموافقة للمنظومة بالشكل}$$

وفيها $\tau = \lambda_1 + \lambda_2 = 2a < 0$, $\Delta = \lambda_1 \lambda_2 = a^2 - b^2$, $\tau^2 - 4\Delta = 4b^2 > 0$

المتجهات الذاتية الموافقة

$$\lambda_1 = a + b , v_1 = (1, 1) \quad , \quad \lambda_2 = a - b , v_1 = (1, -1)$$

تكون النقطة الثابتة $(R, J) = (0, 0)$ سرجية إذا كان $\Delta = \lambda_1 \lambda_2 < 0 \Rightarrow a^2 < b^2$

وتكون عقدة مستقرة عندما $\Delta = \lambda_1 \lambda_2 > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$

عندما نقطة الأصل سرجية يكون $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ يولد الشعاع الذاتي $v_1 = (1, 1)$

المتنوعة غير المستقرة ويولد $v_2 = (1, -1)$ المتنوعة المستقرة. وإذا كانت نقطة الأصل

عقدة مستقرة يكون $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ يولد الشعاعان الذاتيان $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)$

المتنوعات المستقرة، وبما أن $\lambda_1 < \lambda_2$ تكون المسارات مماسة للاتجاه الذاتي الأبطأ

$$.v_1 = (1, 1)$$

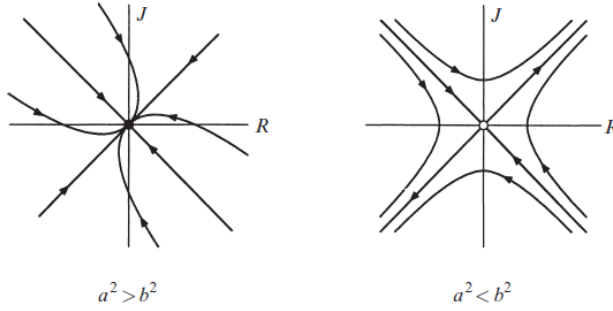
يوضح الشكل (8) صورة الحالة للحالتين. إذا كانت $a^2 > b^2$ تتلاشى العلاقة دائماً

بسبب اللامبالاة المتبادلة. إذا كان $a^2 < b^2$ ، فإن العشاق يكونون أكثر جرأة، أو ربما

أكثر حساسية تجاه بعضهم البعض. الآن العلاقة متفجرة. اعتماداً على مشاعرهم في

البداية، علاقتهم إما أن تصبح عيد حب أو حرب. في كلتا الحالتين، تتقارب جميع

المسارات من المستقيم $R = J$ ، لذا فإن مشاعرهم متبادلة.



الشكل 8: $a^2 > b^2$ عقدة مستقرة - $a^2 < b^2$ سرجية .

2- لوحة فضاء الحالة:

في المنظومات غير الخطية، لا أمل عادةً في إيجاد المسارات بشكل تحليلي، حتى عندما تتوفر الصيغ الصريحة، غالبًا ما تكون معقدة للغاية. وبدلاً من ذلك سنحاول تحديد السلوك النوعي للحلول. ويكون هدفنا الأول هو إيجاد صورة فضاء الحالة مباشرة من خصائص متجه الحقل للمنظومة.

تعريف التوابع العديمة (nullclines): هي المنحنيات التي تحقق $x^{\square} = 0$ أو $y^{\square} = 0$ وتشير هذه الخطوط إلى المواضع التي يكون فيها التدفق أفقي أو عمودي.

الإرجاع لمنظومة خطية Linearization:

تكون لوحة فضاء الحالة للمنظومة الخطية بجوار نقطة التوازن الصفرية مشابهة للوحة غير الخطية بجوار نقطة التوازن (x^*, y^*) طالما أن النقطة الثابتة ليست من الحالات الحدودية أي إذا كانت النقطة الثابتة سرجية أو عقدة أو حلزونية للمنظومة الخطية فإنها تكون كذلك للمنظومة غير الخطية [Andronov 1973]. أما في حالة النقطة الثابتة حدودية (مركزية- عقدة متحللة- نجمية- غير معزولة) فمن الممكن أن تتغير من خلال الحدود غير الخطية الصغيرة. هذا ما تناقشه الأمثلة التالية:

مثال 1-2: بفرض أن المنظومة

$$\begin{cases} x^{\square} = -x + x^3 \\ y^{\square} = -2y \end{cases} \quad (2)$$

لها النقاط الثابتة التالية $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$. المصفوفة اليعقوبية للمنظومة هي

$$A = \begin{pmatrix} -1+3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

إن نقطة الأصل عقدة مستقرة لأن $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. أما النقطتان $(0,1)$, $(0,-1)$ فهما سرجيتان لأن $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. وبما أن النقاط الثابتة ليست حدودية فإن النقاط الثابتة للمنظومة غير الخطية لها نفس النتيجة. يمكن استنتاج هذا من أجل المنظومة غير الخطية من خلال التوابع العديمة كما يلي: المواضع التي يكون فيها التدفق عمودي (x التوابع العديمة) تحقق

$$x^{\square} = 0 (\uparrow \downarrow): -x + x^3 = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 1$$

نناقش المعادلة الثانية :

$$y^{\square} > 0 \Rightarrow -2y > 0 \Rightarrow y < 0 (\uparrow)$$

$$y^{\square} < 0 \Rightarrow -2y < 0 \Rightarrow y > 0 (\downarrow)$$

هذه النتيجة محققة من أجل كل النقاط الثابتة حيث أن في اتجاه محور الترتيب كل المسارات تتجه للاضمحلال. أما المواضع التي يكون فيها التدفق أفقي (y الخطوط الوهمية) تحقق

$$y^{\square} = 0 (\square): -2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x^{\square} = -x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) \quad \text{نناقش المعادلة الأولى:}$$

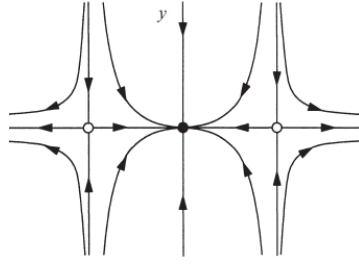
$$x > 1 \Rightarrow x^{\square} > 0 \quad (\rightarrow)$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^{\square} < 0 \quad (\leftarrow)$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow x^{\square} > 0 \quad (\rightarrow)$$

$$x < -1 \Rightarrow x^{\square} > 0 \quad (\leftarrow)$$

وتكون لوحة فضاء الحالة للمنظومة بالشكل (9) التالي:



الشكل 9: لوحة فضاء الحالة للمنظومة (2)

مثال 2-2: يوضح هذا المثال كيف أن الحدود غير الخطية الصغيرة يمكن أن تغير

النقطة الثابتة المركزية إلى حلزونية. لتكن المنظومة

$$\begin{aligned} x^{\square} &= -y + ax(x^2 + y^2) \\ y^{\square} &= x + ay(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (3)$$

حيث a وسيط. لنثبت أن المنظومة الخطية لا تعطي تنبأ صحيح حيث تظهر الخطية

أن نقطة الأصل مركزية من أجل كل قيم الوسيط a ، بينما تكون نقطة الأصل حلزونية

مستقرة إذا كان $a < 0$ و حلزونية غير مستقرة إذا كان $a > 0$. للحصول على الخطية

بجوار النقطة الثابتة $(x^*, y^*) = (0, 0)$. نحسب المصفوفة اليعقوبية

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ونجد $\tau = a + d = 0$, $\Delta = ad - bc = 1 > 0$ ، لذلك تكون الأصل دائماً مركزاً، وفقاً للخطية. لتحليل المنظومة غير الخطية، نقوم بتغيير المتغيرات إلى الإحداثيات القطبية. حيث $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ نلاحظ $x^2 + y^2 = r^2$ ، إذن $x \dot{x} + y \dot{y} = r \dot{r}$ وبتعويض x و y نجد:

$$r \dot{r} = x (-y + ax (x^2 + y^2)) + y (x + ay (x^2 + y^2)) = a(x^2 + y^2)^2 = ar^4$$

ومنه $r \dot{r} = ar^3$ ، أما $\dot{\theta} = \frac{x \dot{y} - y \dot{x}}{r^2}$ وبعد تعويض x و y نجد $\dot{\theta} = 1$. تصبح

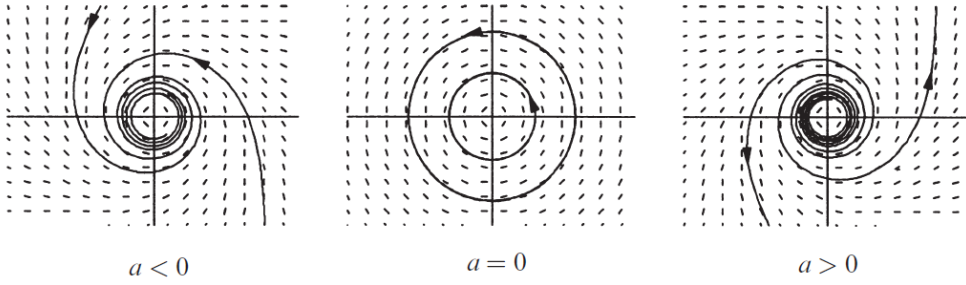
المنظومة في الإحداثيات القطبية بالشكل:

$$\dot{r} = ar^3$$

$$\dot{\theta} = 1$$

يتم تحليل المنظومة بسهولة، تدور جميع المسارات حول الأصل بسرعة زاوية ثابتة $\dot{\theta} = 1$. وتعتمد الحركة الشعاعية على قيمة الوسيط a ، كما هو موضح في الشكل (10).

إذا كان $a < 0$ ، نجد $r(t) \rightarrow 0$ عندما $t \rightarrow \infty$. في هذه الحالة تكون نقطة الأصل حلزونية مستقرة. نلاحظ أن الاضمحلال بطيء للغاية (الشكل 10). إذا كانت $a = 0$ ، نجد $r(t) = r_0$ لكل t والأصل هو المركز. أخيراً، إذا كانت $a > 0$ ، نجد $r(t) \rightarrow \infty$ وتكون نقطة الأصل حلزونية غير مستقرة. وبالمثل، يمكن أن تتغير النقاط الثابتة النجمية والعقد المتحللة من خلال الحدود اللاخطية الصغيرة، على عكس المراكز، فإن استقرارها لا يتغير. على سبيل المثال، قد تتغير النقاط الثابتة النجمية المستقرة إلى حلزونية مستقرة



الشكل 10: لوحة فضاء الحالة للمنظومة (3)

ولكن لا تتغير إلى حلزونية غير مستقر. بالنظر إلى تصنيف المنظومات الخطية في الشكل (7): تقع النقاط الثابتة النجمية والعقد المتحللة في المنطقة المستقرة أو غير المستقرة ، بينما تقع المراكز بين الاستقرار وعدم الاستقرار [Strogatz 2015].

3- التشعبات:

ماذا نعني بالضبط بالتشعب؟ يبين التعريف المعتاد لمفهوم "التكافؤ الطبولوجي" أنه في حال تغيرت البنية الطبولوجية للوحة فضاء الحالة عند تغير قيم الوسيط نقول أن التشعب قد حدث. والتغيرات المتوقعة هي التغير في عدد أو نوع الاستقرار للنقاط الثابتة أو المدارات المغلقة [Devaney (1989)].

تحدثنا في مقالة سابقة عن النقاط الثابتة الحاصلة في بعد واحد. هذه النقاط لها مماثل في بعدين (وفي الواقع ، في جميع الأبعاد). وقد اتضح أنه لا يحدث شيء جديد حقاً عند إضافة المزيد من الأبعاد، كل الأفعال تقتصر على فضاء جزئي أحادي البعد تحدث على طوله التشعبات، بينما في الأبعاد الإضافية يكون التدفق إما جاذب أو نافر. لنناقش التشعبات الحاصلة في منظومة ثنائية البعد.

3-1- تشعب العقدة السرجية

تشعب العقدة السرجية هو الآلية الأساسية لنشوء واختفاء النقاط الثابتة، ويمكن شرح ذلك من خلال المثال النموذجي التالي في فضاء ثنائي البعد:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \quad (4)$$

ناقشنا سلوك التشعب للمعادلة الأولى سابقاً في المنظومة ذات بعد واحد [يوسف 2024]. لهذه المنظومة نقطتان ثابتتان هما $(\sqrt{\mu}, 0)$ ، $(-\sqrt{\mu}, 0)$. يعطى معامل الاستقرار من خلال المصفوفة اليعقوبية

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

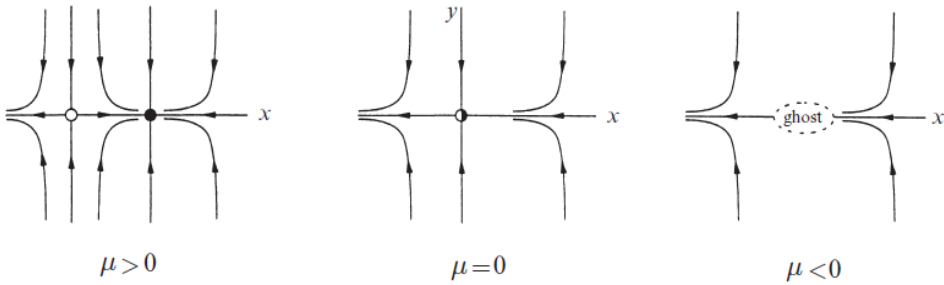
لأجل $\mu > 0$ نجد $J(\sqrt{\mu}, 0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ وتكون النقطة الثابتة $(\sqrt{\mu}, 0)$ مستقرة لأن لها قيمتان ذاتيتان هما $-2\sqrt{\mu}, -1$ حقيقتان و سالبتان. أما القيم الذاتية للنقطة $(-\sqrt{\mu}, 0)$ هما $2\sqrt{\mu}, -1$ وهذه النقطة سرجية .

عندنا $\mu = 0$ نجد $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ وتكون النقطة الثابتة $(0, 0)$ نصف مستقرة لأن لها قيمتان ذاتيتان هما $0, -1$ ، وعندما $\mu < 0$ لا يوجد نقاط ثابتة.

تتهار الحركة في الاتجاه y بشكل كبير. يوضح الشكل (11) وجود نقطتين ثابتتين للمنظومة (4)، هما العقدة المستقرة عند $(\sqrt{\mu}, 0) = (x^*, y^*)$ والسرجية عند

حيث تتجه المسارات الواقعة في المنطقة $(x^*, y^*) = (-\sqrt{\mu}, 0)$ إلى العقدة المستقرة. عند تناقص μ ، تقترب العقدتان من بعضهما البعض، ثم يلتقيان عندما $\mu = 0$ وتغير نقطة الأصل استقرارها ويقع عندها تشعب العقدة السرجية، تختفيان أخيراً عندما $\mu < 0$ وتهرب جميع المسارات إلى اللانهاية.

تستمر النقاط الثابتة بعد اختفاءها بالتأثير على التدفق مولدة ما يسمى منطقة الشبح (ghost) والتي تشبه منطقة عنق الزجاجة حيث تمتص المسارات وتأخرها قبل السماح بمرورها إلى الجانب الآخر. الوقت الذي تقضيه المسارات في عنق الزجاجة بشكل عام هو من المرتبة $(\mu - \mu_c)^{-1/2}$ ، حيث μ_c هي القيمة التي يحدث عندها تشعب العقدة السرجية. تمت مناقشة بعض تطبيقات قانون القياس هذا في فيزياء المادة المكثفة من قبل الباحثين ويستر فيلنوستر وغاتسفي 1989.



الشكل (11) التشعب السرجي

3-2- التشعب الحرج (Transcritical):

لتكن المنظومة ثنائية البعد

$$\begin{aligned} x' &= \mu x - x^2 & ; \mu \in \mathbb{R} \\ y' &= -y \end{aligned} \quad (5)$$

لهذه المنظومة نقطتان ثابتتان ثابتتان دوماً هما $(\mu, 0), (0, 0)$. وتكون المصفوفة اليعقوبية لها :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \mu - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

عند النقطة الثابتة $(0, 0)$ نجد $J(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ والتي لها القيمتان الذاتيتان

$-1, \mu$. تكون هذه النقطة الثابتة عقدة مستقرة لأجل $\mu < 0$ ونصف مستقرة عندما

$\mu = 0$ وسرجية لأجل $\mu > 0$. وبنفس الطريقة للنقطة الثابتة $(\mu, 0)$ نجد

$J(\mu, 0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ والتي لها القيمتان الذاتيتان $-\mu, -1$ تكون هذه النقطة الثابتة

عقدة مستقرة لأجل $\mu > 0$ وسرجية لأجل $\mu < 0$. يظهر الشكل (12) لوحة فضاء

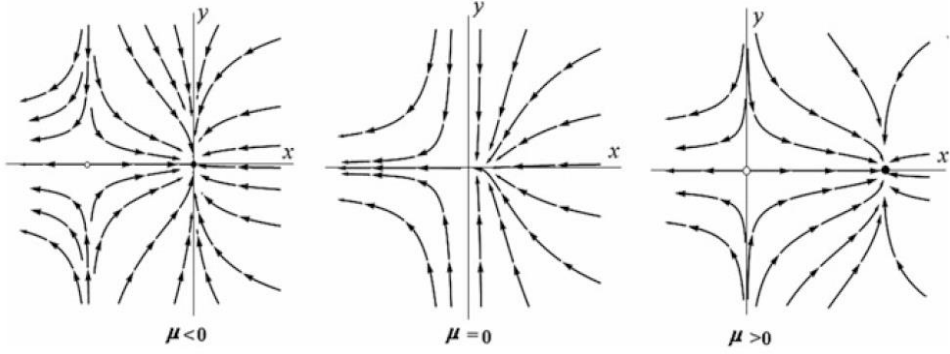
الحالة للمنظومة (5) عند تغير قيم الوسيط من اليسار إلى اليمين ماراً بقيمة وسيط

التشعب $\mu = 0$ حيث تصبح نقطة الأصل سرجية بعدما كانت عقدة مستقرة و تصبح

النقطة $(\mu, 0)$ عقدة مستقرة بعدما كانت سرجية. يعرف هذا النوع من التشعب بالتشعب

الحرج حيث $\mu = 0$ هي نقطة التشعب، كما هو الحال في البعد الواحد حيث لا تختفي

النقاط الثابتة.



الشكل (12) لوحة فضاء الحالة للتشعب الحرج لأجل قيم مختلفة للوسيط μ .

3-3- تشعب المذرة (Pitchfork):

يوجد نوعان من تشعب المذرة يسميان تشعب المذرة الحرج بشدة و الحرج جزئياً. نتعامل في هذه الفقرة أولاً مع تشعب المذرة الحرج بشدة الحرج ثم مع الحرج جزئياً.

لتكن المنظومة ثنائية البعد

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad \dot{y} = -y \quad ; \mu \in \mathbb{R} \quad (6)$$

عندما $\mu < 0$ نجد نقطة ثابتة واحدة هي الأصل $(0, 0)$. وتكون المصفوفة اليعقوبية :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

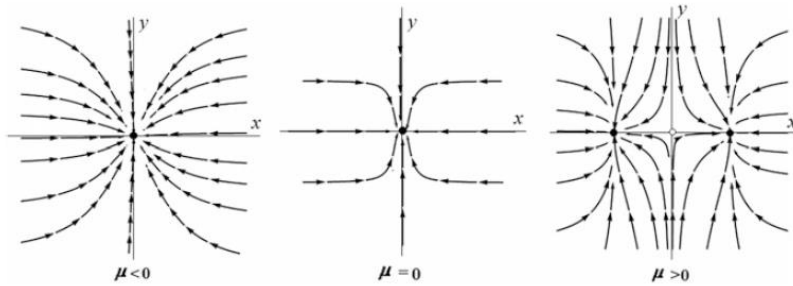
والتي لها القيمتان الذاتيتان $\mu, -1$. تكون نقطة الأصل عقدة مستقرة لأجل $\mu < 0$.

عندما $\mu > 0$. تمتلك المنظومة ثلاث نقاط ثابتة $(0,0), (\sqrt{\mu}, 0), (-\sqrt{\mu}, 0)$.

والمصفوفات اليعقوبية لها :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J(\sqrt{\mu}, 0) = \begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J(-\sqrt{\mu}, 0) = \begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

عندما $\mu > 0$ تكون القيم الذاتية للمصفوفة $J(0,0)$ هي $-1, \mu$ وتكون نقطة الأصل سرجية. أما القيم الذاتية للمصفوفتين $J(\sqrt{\mu},0), J(-\sqrt{\mu},0)$ هي $-1, -2\mu$ وبالتالي النقاط الثابتة تكون عقد مستقرة. يوضح الشكل (13) فضاء الحالة للمنظومة عند تغير قيم الوسيط μ . يتغير استقرار نقطة الأصل من عقدة مستقرة إلى سرجية عندما تجتاز قيمة الوسيط نقطة التشعب $\mu=0$ وتولد نقطتان ثابتتان ثابتتان جديدتان $(\sqrt{\mu},0), (-\sqrt{\mu},0)$ مستقرتان. يسمى هذا التشعب بتشعب المذرة الحرج بشدة.



الشكل (13) لوحة فضاء الحالة لتشعب المذرة الحرج بشدة لأجل قيم مختلفة للوسيط μ .

لناقش تشعب المذرة الحرج جزئياً، لتكن المنظومة ثنائية البعد

$$\dot{x} = \mu x + x^3, \quad \dot{y} = -y \quad ; \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (7)$$

عندما $\mu < 0$ تمتلك المنظومة (7) ثلاث نقاط ثابتة $(0,0), (\sqrt{-\mu},0), (-\sqrt{-\mu},0)$ وتكون المصفوفة اليعقوبية لها :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J(\sqrt{-\mu},0) = \begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J(-\sqrt{-\mu},0) = \begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

عندما $\mu < 0$ تكون القيم الذاتية للمصفوفة $J(0,0)$ هي $-1, \mu$ ولها نفس الإشارة أي نقطة الأصل عقدة مستقرة. والقيم الذاتية للمصفوفتين $J(\sqrt{-\mu},0), J(-\sqrt{-\mu},0)$

هي $-1, -2\mu$ متعاكستين بالإشارة وتكون النقطتين سرجيتان. عندما $\mu > 0$ يكون للمنظومة (7) نقطة ثابتة وحيدة هي الأصل سرجية.

يتغير استقرار نقطة الأصل من عقدة مستقرة إلى سرجية عندما تجتاز قيمة الوسيط نقطة التشعب $\mu = 0$ وتلتقي النقطتان الثابتتان (العقد المستقرة) $(-\sqrt{-\mu}, 0)$, $(\sqrt{-\mu}, 0)$ في نقطة الأصل وتتشعب الأصل إلى سرجية. يسمى هذا النوع من التشعب بتشعب المذرة الحرج جزئياً [Strogatz 2015].

مثال 3-1: لتكن المنظومة الفردية التالية

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x + y + \sin x \\ \dot{y} &= x - y \end{aligned} \quad (8)$$

لها نقطة ثابتة وهي الأصل. تعطى المصفوفة اليعقوبية عند نقطة الأصل بالشكل

$$A = \begin{pmatrix} \mu+1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

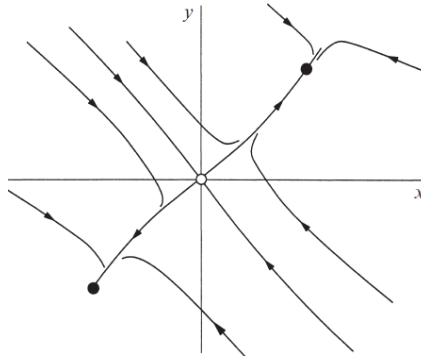
نلاحظ $\tau = \mu, \Delta = -(\mu+2)$ ، $\tau^2 - 4\Delta = (\mu+2)^2 + 4 > 0$ تكون نقطة الأصل مستقرة لأجل $\mu < -2$ و سرجية لأجل $\mu > -2$. يقودنا هذا لتنبؤ بحدوث تشعب مذرة عند $\mu_c = -2$. لتأكيد ذلك ، لنبحث عن زوج متماثل من النقاط الثابتة بالقرب من الأصل لأجل قيم μ قرب $\mu_c = -2$. (في هذه المرحلة لا نعرف ما إذا كان التشعب حرج بشدة أو حرج جزئياً) تحقق النقاط الثابتة $y = x$ وبالتالي $(\mu+1)x + \sin x = 0$. أحد الحلول هو $x = 0$ ، لكننا وجدنا ذلك بالفعل. لفتراض الآن أن x هو صغير وغير صفري ، وباستخدام نشر ماك لوران نجد:

$$(\mu+1)x + x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) = 0$$

بالقسمة على x وإهمال الحدود من درجات أعلى نجد $0 \approx \frac{x^2}{6} - \mu + 2$. نجد النقاط الثابتة $x^* \approx \pm \sqrt{6(\mu+2)}$ من أجل μ أكبر بقليل من -2 . وهكذا يقع تشعب المذراة الحرج بشدة عند $\mu_c = -2$. (إذا كان التشعب حرج جزئياً، فإن زوج النقاط الثابتة ستكون موجودة عندما كان الأصل مستقرًا، وليس بعد أن تصبح سرجية) لهذا التشعب حرج بشدة، ونحن نعلم أن النقاط الثابتة الجديدة مستقرة بدون أن نختبر ذلك. لرسم صورة فضاء الحالة بجوار $(0,0)$ للأجل قيم μ أكبر بقليل من -2 . نوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة اليعقوبية في الأصل بجوار وسيط التشعب.

$$A \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

وهي $(1,1), (1,-1)$ ، و القيم الذاتية $\lambda = -2, \lambda = 0$ ، على التوالي. لأجل μ أكبر بقليل من -2 ، تصبح نقطة الأصل سرجية. الشكل (14).



الشكل (14) لوحة فضاء الحالة للمنظومة (8) لأجل قيمة للوسيط أكبر بقليل من -2 .

نظرًا للتقريبات التي أجريناها، فإن هذه الصورة صالحة فقط محليًا في فضاء الحالة والوسيط بجوار نقطة الأصل و μ قريبة من μ_c . في جميع الأمثلة أعلاه، يحدث التشعب عند $\Delta = 0$ ، أو عندما أحد قيم الذاتية تكون صفرًا. بشكل عام، العقدة السرج،

التشعبات الحرجة ، وتشعب المذرة كلها أمثلة على التشعبات ذات القيمة الذاتية الصفرية.

3-4- تشعب هوبف (Hopf):

بفرض أن المنظومة

$$\begin{aligned} dx / dt &= f(x, y, c) \\ dy / dt &= g(x, y, c) \end{aligned} \quad (8)$$

تملك نقطة توازن غير زائدية عندما $c = 0$ في النقطة $(0, 0)$ ، أي أن القيم الذاتية $\lambda_{1,2}(c) = \alpha(c) + i\beta(c)$ الموافقة للمصفوفة اليعقوبية للمنظومة (8) تحقق $\alpha(0) = 0$. عندئذ يحدث تشعب هوبف إذا تحقق أن $\beta(0) \neq 0$ ، $\frac{\partial \alpha}{\partial c}(0) \neq 0$ ، $\text{Re}(c_1) \neq 0$ ، ويوجد تغيير في المتحولات يحول المنظومة (8) إلى الشكل الناظمي:

$$\begin{aligned} r^{\dot{}} &= \pm \gamma r \pm r^3 \\ \theta^{\dot{}} &= 1 \end{aligned}$$

ملاحظات:

- i. إشارة $\pm \gamma$ هي نفس إشارة $\frac{\partial \alpha}{\partial c}(0)$ كما أن إشارة $\pm r^3$ هي إشارة $\text{Re}(c_1)$.
- ii. يحدد استقرار التوازن عند نقطة التوازن الاستقرار لحلقة النهاية المولدة الجديدة.
- iii. عندما تظهر حلقة نهاية مستقرة ندعو هذه الحالة تشعب هوبف حرج بشدة (supercritical)، وعندما تظهر حلقة نهاية غير مستقرة ندعو تشعب هوبف حرج جزئياً (subcritical).
- iv. يعطى الشكل الناظمي للمنظومة (8) في الإحداثيات الديكارتية الشكل:

$$\begin{aligned} dx / dt &= -y + x \left[\pm \gamma \pm (x^2 + y^2) \right] \\ dy / dt &= x + y \left[\pm \gamma \pm (x^2 + y^2) \right] \end{aligned}$$

دليل الاستقرار $\text{Re}(c_1)$:

إذا كانت المنظومة من الشكل :

$$\begin{aligned} dx / dt &= A + w y + Y^1 \\ dy / dt &= B - w x + Y^2 \end{aligned}$$

يعطى دليل الاستقرار $I = \text{Re}(c_1)$ بالصيغة:

$$\begin{aligned} I = w & \left(Y_{xxx}^1 + Y_{xyy}^1 + Y_{xxy}^2 + Y_{yyy}^2 \right) + \\ & \left(Y_{xx}^1 Y_{xx}^2 - Y_{xx}^1 Y_{xy}^1 + Y_{xx}^2 Y_{xy}^2 + Y_{yy}^2 Y_{xy}^2 - Y_{yy}^1 Y_{xy}^1 - Y_{yy}^1 Y_{yy}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\text{حيث } Y_{xx}^1 = \frac{\partial^2 Y^1}{\partial x \partial x}(0,0), Y_{xxy}^2 = \frac{\partial^3 Y^2}{\partial x \partial x \partial y}(0,0) \dots \text{ وهكذا.}$$

و يعطى دليل الاستقرار للمنظومة $I = \text{Re}(c_1)$ من الشكل:

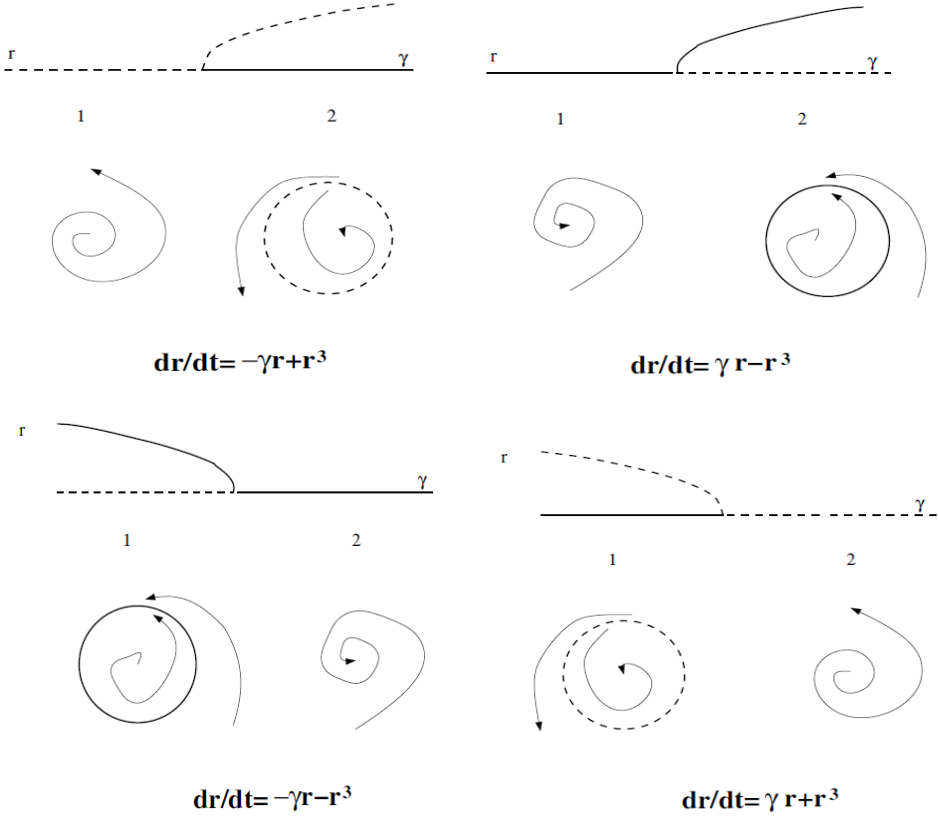
$$\begin{aligned} dx / dt &= A - w y + Y^1 \\ dy / dt &= B + w x + Y^2 \end{aligned}$$

بالصيغة:

$$\begin{aligned} I = w & \left(Y_{xxx}^1 + Y_{xyy}^1 + Y_{xxy}^2 + Y_{yyy}^2 \right) + \\ & \left(-Y_{xx}^1 Y_{xx}^2 - Y_{xx}^1 Y_{xy}^1 - Y_{xx}^2 Y_{xy}^2 - Y_{yy}^2 Y_{xy}^2 + Y_{yy}^1 Y_{xy}^1 + Y_{yy}^1 Y_{yy}^2 \right) \end{aligned}$$

إذا كان دليل الاستقرار سالب تكون نقطة التوازن مستقرة [Panfilov 2005].

لنناقش في المنظومة ثنائية البعد حالات تشعب هوبف، أي حالة القيمتان الذاتيتين عقديتين وتنتقلان معاً من نصف المستوي اليساري إلى اليميني مروراً بمحور الترتيب .



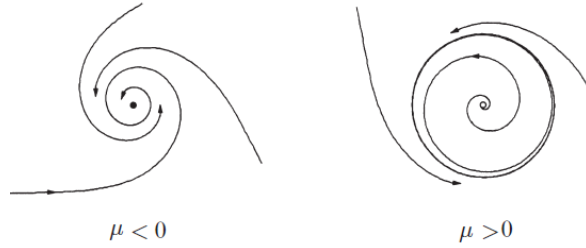
الشكل (15): مخطط تشعب هوبف

تشعب هوبف الحرج بشدة: لتكن المنظومة

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} &= w + b r^2 \end{aligned} \quad (9)$$

وبفرض أن لهذه المنظومة ثلاث وسطاء: μ تتحكم باستقرار النقطة الثابتة عند الأصل، w يزودنا بتردد التذبذبات الصغيرة، ويحدد b اعتماد التردد على السعة لأجل تذبذبات السعة الكبيرة.

عندما $\mu < 0$ تكون نقطة الأصل $r = 0$ حلزونية مستقرة حيث تعتمد جهة الدوران على إشارة w . وعندما $\mu > 0$ تصبح الأصل حلزونية غير مستقرة وتنشأ حلقة حدية مستقرة عند $r = \sqrt{\mu}$. يوضح الشكل (16) لوحة الفضاء لأجل قيم الوسيط قبل وبعد التشعب.



الشكل (16): لوحة الفضاء للمنظومة (9) لأجل قيم الوسيط قبل وبعد التشعب

لمعرفة سلوك القيم الذاتية خلال التشعب، نكتب المنظومة (9) بالإحداثيات الديكارتية:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = (\mu r - r^3) \cos \theta - r(w + b r^2) \sin \theta \\ &= (\mu - [x^2 + y^2])x - (w + b [x^2 + y^2])y \\ &= \mu x - w y + O(3) \end{aligned}$$

$$\dot{y} = w x + \mu y + O(3) \quad \text{وبشكل مشابه نجد}$$

وتكون المصفوفة اليعقوبية عند نقطة الأصل: $A = \begin{pmatrix} \mu & -w \\ w & \mu \end{pmatrix}$. والقيم الذاتية

$\lambda = \mu \pm i w$. تعبر القيم الذاتية المحور التخيلي من اليسار إلى اليمين عندنا تزايد قيمة μ من السالب إلى الموجب. في تشعبات هوبف التي تمت مواجهتها في الممارسة العملية، يكون شكل الحلقة الحدية قطع ناقص وليست دائرية.

تشعب هوبف الحرج جزئياً (subcritical Hopf Bifurcation)

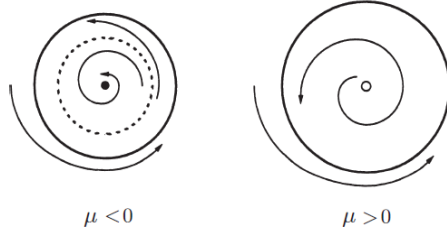
دائماً ما تكون حالة الحرج جزئياً أكثر خطورة في التطبيقات الهندسية. بعد التشعب، تقفز المسارات إلى جاذب بعيد، والذي قد يكون نقطة ثابتة، أو حلقة حدية أخرى، وفي البعد الثالث وأعلى يكون جاذب فوضوي (معادلات لورينز). لنستعرض ذلك من خلال المنظومة ثنائية البعد التالي: لتكن المنظومة

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} &= w + b r^2 \end{aligned} \quad (10)$$

الفرق المهم لهذه الحالة عن حالة الحرج بشدة أن الحد r^3 يسبب عدم الاستقرار، فهو يساعد على دفع المسارات بعيداً عن الأصل. تظهر صور فضاء الحالة للمنظومة (10) في الشكل (17).

عندما $\mu < 0$ هناك جاذبان، حلقة حدية مستقرة ونقطة ثابتة مستقرة هي الأصل. تقع بينهما حلقة غير مستقرة، عند تزايد $\mu < 0$ تضيق الحلقة غير المستقرة. وعند $\mu = 0$ يحدث تشعب هوبف الحرج جزئياً حيث تضيق الحلقة غير المستقرة وتتكشف إلى سعة الصفر وتطبق على نقطة الأصل، مما يجعله الأصل غير مستقر. وعندما $\mu > 0$ تصبح فجأة الحلقة الحدية ذات السعة الكبيرة عامل الجذب الوحيد في المنطقة. وتجبر الحلول التي كانت بالقرب من الأصل الآن النمو إلى سعة كبيرة الاهتزاز.

تحدث تشعبات هوبف الحرجة جزئياً في ديناميك الخلايا العصبية (رينزيل و Ermentrout 1989)، وفي الرفرفة المرنة والاهتزازات لأجنحة الطائرة (دويل والغاموفا 1988، طومسون وستيوارت 1986)، وفي حالات عدم استقرار تدفقات السوائل (درازين وريد 1981).



الشكل (17): تشعب هوفب الحرج جزئياً

مثال 3-2: لتكن المنظومة

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y + x y^2 \\ \dot{y} &= x + \mu y + y^3 \end{aligned} \quad (11)$$

لنثبت وقوع تشعب هوفب عند الأصل ولنناقش نوع هذا التشعب.

المصفوفة اليعقوبية عند الأصل هي $A = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$ حيث $\tau = 2\mu$ ،

$\Delta = \mu^2 + 1 > 0$ والقيم الذاتية $\lambda = \mu \pm i$. وبما أن $\tau^2 - 4\Delta = -1 < 0$ فإن الأصل تتغير من حلزونية مستقرة إلى حلزونية غير مستقرة، حيث يقع تشعب هوفب عند $\mu = 0$

. ولتمييز نوع التشعب نحول المنظومة للإحداثيات القطبية: $r^{\dot{}} = \mu r + r y^2$ نلاحظ

$r^{\dot{}} \geq \mu r$. هذا يعني أنه من أجل $\mu > 0$ ، ينمو $r(t)$ على الأقل بأسرع ما يمكن

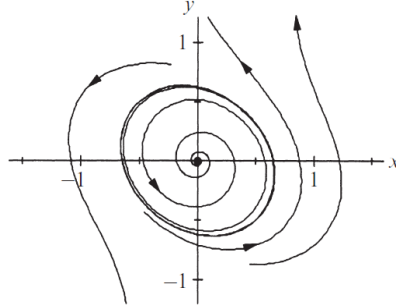
$r_0 e^{\mu t}$. حيث يتم نبذ جميع المسارات إلى ما لا نهاية. إذن لا توجد حلقات مغلقة عند

$\mu > 0$. وعلى وجه الخصوص، فإن الحلزون غير المستقر غير محاطة بحلقة حدية

مستقرة؛ وبالتالي لا يمكن أن يكون التشعب حرج بشدة. هل يمكن أن يتحلل التشعب؟

يتطلب أن يكون الأصل مركز غير خطي عندما $\mu = 0$. لكن $r^{\dot{}}$ تكون موجبة تماماً

بعيداً عن محور الفواصل، لذلك المدارات المغلقة لا تزال مستحيلة. وبالتالي نتوقع أن يكون التشعب حرج جزئياً الشكل (18).



الشكل (18): التشعب الحرج جزئياً حيث $\mu = -0.2$

3-5- تشعب نيمارك ساكار Neimark-Sacker:

يقابل تشعب نيمارك في المنظومات المنقطعة تشعب هوبف في المنظومات المستمرة.

بفرض أن المنظومة:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, y_t, c) \\ y_{t+1} &= g(x_t, y_t, c) \end{aligned} \quad (12)$$

تملك نقطة ثابتة غير زائدية عندما $c = 0$ في $(0, 0)$ ، وتحقق القيم الذاتية للمصفوفة

اليقوبية:

$$\lambda_{1,2} = \alpha(c) \pm i \beta(c) = |\lambda(c)| e^{i \phi(c)}, \quad |\lambda(0)| = \sqrt{\alpha(0)^2 + \beta(0)^2} = 1$$

عندئذ يقع تشعب نيمارك إذا كان

$$\frac{\partial |\lambda|}{\partial c}(0) \neq 0, \quad e^{i k \phi(0)} = \lambda^k \neq 1 \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad d(0) \neq 0$$

ويوجد تغيير في المتحولات يحول المنظومة (12) إلى الشكل الناظمي:

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= |\lambda| r_t + d r_t^3 \\ \theta_{t+1} &= \theta_t + \phi(c) + b(c) r_t^2 \end{aligned} \quad (13)$$

يكتب الشكل الناظمي للمنظومة (12) في الإحداثيات الديكارتية بالشكل:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \left[|\lambda| \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + (x_t^2 + y_t^2) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \right] + O(\|x\|^4)$$

حيث $d(0) = a(0)$ [Panfilov 2005].

دراسة الشكل الناظمي: لدينا حالتان مختلفتان .

الحالة الأولى $d < 0$: لإيجاد النقاط الثابتة للمنظومة (13) نضع $r^* = |\lambda| r^* + d r^{*3}$

$$\text{نجد إما } r^* = 0 \text{ أو } 1 = |\lambda| + d r^{*2} \text{ أي } r^* = \sqrt{\frac{1-|\lambda|}{d}} \text{ بحال } |\lambda| > 1.$$

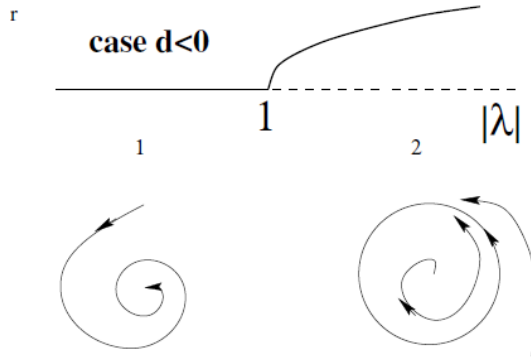
$$df / dr = |\lambda| + 3d r^{*2} \quad \text{معامل الاستقرار:}$$

عندما $r^* = 0$ يكون $df / dr = |\lambda|$ وتكون نقطة التشعب (الأصل) مستقرة لأجل

$$|\lambda| < 1 \text{ وغير مستقرة لأجل } |\lambda| > 1.$$

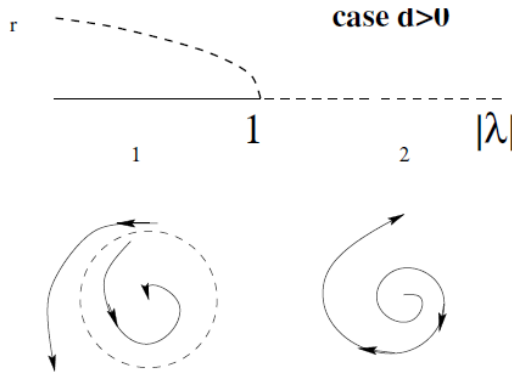
وعندما $r^* = \sqrt{\frac{1-|\lambda|}{d}}$ تنشئ حلقة: $df / dr = |\lambda| + 3d \frac{1-|\lambda|}{d} = 3 - 2|\lambda|$ مستقرة لأجل

$$|\lambda| > 1. \text{ يبين الشكل (19) مخطط التشعب عندما } d < 0.$$



الشكل (19): مخطط تشعب نيمارك ساكار بحالة $d < 0$

الحالة الثانية $d > 0$: يكون مخطط التشعب للمنظومة (13) في الشكل (20).



الشكل (20): مخطط تشعب نيمارك ساكار بحالة $d > 0$

النتائج:

1. تصنيف النقاط الثابتة التي تحافظ على التكافؤ بين المنظومة الخطية وغير

الخطية، والنقاط التي لا تحافظ على التكافؤ.

2. تصنيف التشعبات الحاصلة في المنظومات ثنائية البعد والربط بينها وبين

التشعبات الحاصلة في المنظومات الديناميكية أحادية البعد.

التوصيات:

يعتبر التحكم بالتشعبات من أهم المواضيع المطروحة في المنظومات الهندسية،

حيث لوحظ التشعب في منظومات هندسية مثل تأرجح أجنحة الطائرة، الهندسة

البحرية، الضاغط التوربيني، وغيرها. من المتوقع البحث عن إقرار التشعبات

الحاصلة في هذه المنظومات.

المراجع:

- Wiggins. S, Marsden. J.E, Antman.S.S, & Sirovich. L, (2003) . **Introduction To Applied Nonlinear Dynamical Systems And Chaos** . Library of Congress Springer–Verlag, Second Edition . New York.
- Kuznetsov. Y. A, (1997) . **Elements of Applied Bifurcation Theory** . Library of Congress , Second Edition. Springer–Verlag, New York.
- Strogatz S. H, (2015) . **Nonlinear Dynamics And Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering** . Library of Congress, Westview Press , Second Edition. New York.
- Panfilov. A, & Mar'ee S. (2005). **Non–Linear Dynamical Systems, Theoretical Biology & Bioinformatics** . Utrecht University, Utrecht.
- Devaney, R.L, (1992), **A First Course in Chaotic Dynamical Systems**. Westview Press, Second Edition.
- Pomeau, Yves; Manneville, Paul (1980). **Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems**. Commun. Math. Phys. 74 (2): 189–197.
- Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I., and Maier, A. G. (1973) **Qualitative Theory of Second–Order Dynamic Systems**. (Wiley, New York).
- Strogatz, S. H., Marcus, C. M., Westervelt, R. M., and Mirolo, R. E. (1988). **Simple model of collective transport with phase slippage**. Phys. Rev.Lett. 61, 2380.