الحساب التقريبي للتكاملات المضاعفة اللانهائية باستخدام دوال هرميت المتعامدة

د. حامد عباس أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث

ملخص البحث:

يهدف هذا البحث إلى دراسة التكاملات المضاعفة اللانهائية باستخدام كثيرات حدود هرميت المتعامدة في الفضاء R^n من الشكل:

$$I = \int_{R^n} \omega(x) f(x) dx \, , x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

معتبرين أن دالة الوزن $\omega(x)$ بالشكل:

$$\omega(x) = e^{-r^2} \; , \; r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

أوجدنا القانون الذي استخدم في إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة النظامية $F(x)$ في الفضاء، R^n و تم إيجاد صيغة النواة المولدة الموافقة بحسب العلاقة :

$$k_k(u,x) = \sum_{i=0}^{n} F_i(u) F_i(x) \qquad , \quad k = 1, 2, \ldots\ldots$$

من هذه الصيغة حصلنا على علاقات تكعيبية صحيحة تماما من أجل كل كثيرة حدود جبرية $p(x)$ ذات دقة جبرية تساوي 5, و7 ،وتم التحقق من ذلك بعدد من الأمثلة العددية.

الكلمات المفتاحية: العلاقات التكعيبية ، دوال هرميت المتعامدة، التكاملات المضاعفة.

The approximate calculation infinity multi integrals by Hermits functions

D. Hamed Abbas
AlBaath University – Science Faculty – Math Department

Abstract

We consider in this paper studying and calculation of approximate calculation infinite multi- integrals using Hermits orthonormal functions in the space R^n ,of the form:

$$I = \int_{R^n} \omega(x) f(x) dx \quad , \quad x = (x_1, x_2, ... x_n)$$

$\omega(x)$ is a weight function of the form:

$$\omega(x) = e^{-r^2} \quad , \quad r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

We find new a formulae were derived to find orthonormal polynomials

$F(x)$ in the ,also we state a formulae for reproducing kernel:

space R^n

$$k_k(u, x) = \sum_{i=0}^{n} F_i(u) F_i(x) \qquad , \qquad k = 1, 2, ...$$

Using this formula, we obtain complete cubature formulae for any algebraic degree of exactness five and seven, this was supported by some numerical examples

key words: cubature formulae, orthogonal polynomials, approximate calculation multi integrals

مقدمة البحث:

درس عدد كبير من العلماء حساب التكاملات والتكاملات المضاعفة للدوال بطرائق تقريبية متعددة منهم I.P.Mysovskikh و Moller .H.M. و Noskov.V.M.،و R.Cools وغيرهم. باعتبار أن المنطقة التكاملية هي الفضاء R^n ، فمن المناسب الاعتماد على كثيرات حدود هرميت المتعامدة و النظامية في الفضاء R^n حيث عن دالة الوزن $\omega(x)=e^{-r^2}$ و $r^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ ، وبالتالي نحسب القيم التقريبية للتكاملات المضاعفة اللانهائية من الشكل:

$$I=\int_{R^n} e^{-r^2}.f(x)dx \quad , \quad x=(x_1,x_2,...x_n)$$

تم في [6,7] حساب التكاملات المضاعفة للدوال بطرائق أخرى، بطريقة الوسطاء غير المعينة وغيرها. وفي [8] تم حساب التكاملات المضاعفة للدوال tالحقيقية في الفضاء R^n بطريقة النواة المولدة ، وذلك باستخدام دوال متعامدة نظامية من نوع لاكير وفي [9 , 5] تم دراسة التكاملات المضاعفة للدوال في الفضاء R^nبطرائق أخرى . نستخدم طريقة النواة المولدة، التي تستند على كثيرات الحدود المتعامدة النظامية. بهدف الحصول على علاقات تقريبية جديدة يمكن استخدامها من أجل حساب القيمة التقريبية للتكاملات المضاعفة اللانهائية.

مفاهيم عامة ومبرهنات أساسية:

العلاقة التكعيبية: هي مساواة تقريبية لحساب التكاملات المضاعفة من الشكل:

$$\int_{\Omega} \omega(x)f(x)dx \cong \sum_{j=1}^{N} c_j f(x_j) \qquad (1)$$

إشارة التكامل على المنطقة Ω تعني التكامل المضاعف ، حيث إن x_j هي نقاط مختلفة مثنى مثنى وتدعى نقاط المكاملة أو عقد العلاقة التكعيبية ، و c_jالثوابت الموافقة لتلك النقاط ، $f(x)$الدالة المراد مكاملتها و $\omega(x)$دالة الوزن ، أما Ω .فهي المنطقة التكاملية.

الدقة الجبرية: نقول عن العلاقة التكعيبية أن دقتها الجبرية تساوي k، إذا كانت صحيحة تماماً من أجل كل كثيرة حدود درجتها لا تتجاوز k وتقريبية في حال كون درجتها أكبر من ذلك.

النواة المولدة: هي كثيرة حدود من الدرجة k تحتوي على $2n$ من المتحولات يرمز لها بالرمز $k_k(u,x)$ ، حيث $x=(x_1,x_2,....,x_n)$ و $u=(u_1,u_2,...,u_n)$.

تدعى مولدة لأنها تحقق

الخاصة الآتية:

$$F(u)=\int_{\Omega}\omega(x).K_K(u,x).F(x)dx$$

حيث: $dx=dx_1.dx_2\ ...dx_n$. و k هي درجة كثيرة الحدود المتعامدة النظامية $F(x)$. تكون $F_i(x)\ ,\ i=0,1,2,...,n$ متعامدة نظامية إذا كان:

$$(F_i(x).F_j(x))=\int_{\Omega}\omega(x).F_i(x).F_J(x)dx=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}\quad ; \qquad (2)$$

مبرهنة1: [2] بفرض أن Ω تحوي نقاط داخلية، وبفرض أن $\omega(x)$ تحقق الشرط: $\omega(x)\geq 0\ ,\ \forall x\in\Omega\Rightarrow\int_{\theta}\omega(x)dx>0$ والعلاقة التكعيبية (1) بـ N من النقاط

تملك دقة جبرية d ، ومن أجل $d \geq 2$ نقاط العلاقة (1) لا تقع على سطح جبري من المرتبة k ، عند ذلك يكون:

$$N \geq d = M(n,k) = \frac{(n+k)!}{n!.k!} \quad : \quad k = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \tag{3}$$

الرمز $k = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ يعني القسم الصحيح من الكسر $\frac{d}{2}$.

يمكننا إيجاد النواة المولدة بالشكل الآتي:

$$k_k(u,x) = \sum_{j=1}^{\sigma} F_j(u).F_j(x) \quad , \quad \tilde{k}_k(u,x) = \sum_{j=1}^{\sigma}{}^{*} F_j(u).F_j(x) \, . \tag{4}$$

حيثُ إن:

$$\sigma = M(n,k) = \frac{(n+k)}{n!k!}$$

الإشارة * فوق رمز المجموع الأخير تعني أن المجموع يؤخذ بـ j الموافقة لـــــــ k،فإذا كانت k فردية ، فإن j تأخذ القيم الفردية فقط ، أما إذا كانت k زوجية ، فإن j تأخذ القيم الزوجية فقط النواة. $\tilde{K}_k(x,u)$ تستخدم في حالة كون كل من الوزن $\omega(x)$ والمنطقة Ω تمتلك خاصة التناظر المركزي ، أي أن:

$$x \in \Omega \Rightarrow -x \in \Omega \quad , \omega(x) = \omega(-x) \tag{5}$$

مبرهنة 2:[2] بفرض أن النقاط $u^{(i)}$ و $i = 1,2,.......,n$ تحقق الشرط :

$$K_k(u^{(i)},u^{(j)}) = b_i \delta_{ij} \quad ; i,j = 1,2,......,n \tag{6}$$

يتألف $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ من النقاط $x^{(j)}$ و $s = k^n, j = 1,2,......,s$ عندئذ يمكن تشكيل العلاقة التقريبية التكاملية الآتية:

$$\int_{\Omega} \omega(x).f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} f(u^{(i)}) + \sum_{j=1}^{s} C_j f(x^{(j)}) \tag{7}$$

حيث أن: $b_i = K_k(u^{(i)},u^{(i)}) \neq 0$

باعتبار أن كلاً من R^n و دالة الوزن $\omega(x)=e^{-r^2}$ و $r^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ تحققان خاصة التناظر المركزي (5) ، فإنه لتشكيل العلاقات التقريبية التكاملية نستخدم المبرهنة الآتية:

مبرهنة 3: [2]بفرض أن كلا من $\omega(x)$ و Ω تحقق خاصة التناظر المركزي(5) ،والنقاط $u^{(i)}$ تحقق الشرط:

$$\tilde{K}_k(u^{(i)},u^{(i)})=b_i.\delta_{ij} \quad ;i,j=1,2,.....,n \tag{8}$$

يتألف $\bigcap_{i=1}^{n}\tilde{H}_i$ من النقاط المختلفة مثنى مثنى $s=k^n, x^{(j)}, j=1,2,...,s$ عندئذ يمكن تشكيل العلاقة التكعيبية :

$$\int_{\Omega}\omega(x).f(x)dx \cong \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2b_i}\left[f(u^{(i)})+f(-u^{(i)})\right]+\sum_{j=1}^{s}C_j f(x^{(j)}) \tag{9}$$

فكل من $\tilde{H}_i, H_i$ معادلة سطح من الدرجة K ،التي تحددها النقطة $a^{(i)}$ بالشكل :

$$H_i \equiv K_k(u^{(i)},x)=0 \quad , \quad \tilde{H}_i \equiv \tilde{K}_k(u^{(i)},x)=0$$

أما $\bigcap_{i=1}^{n}H_i$ وكذلك $\bigcap_{i=1}^{n}\tilde{H}_i$ فهو حل جملة المعادلات غير خطية بـ n متحول. العلاقة (7) صحيحة من أجل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2k$ ،أما العلاقة (9) فهي صحيحة من أجل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2k+1$.

مبرهنة 4: [2] بفرض أن كلا من $\omega(x)$ و Ω تحقق خاصة التناظر المركزي(5) ، و Ω لها نقاط داخلية ، والعلاقة (9) تمتلك دقة جبرية $2k+1$ عند ذلك عدد النقاط N يحقق ما يلي:

$$N \ge d = M(n,k) \qquad , \qquad m = 2k$$

$$N \ge \begin{cases} 2(d-v) & , \quad k \ \text{زوجي} \\ 2v & , \quad k \ \text{فردي} \quad m = 2k+1 \end{cases}$$

v عدد وحيدات الحد التي درجتها لا تتجاوز k ، ومبدأ الاحداثيات لا ينتمي إلى مجموعة النقاط، أما عندما يكون مبدأ الاحداثيات من بين النقاط ، فإن:

$$N \ge \begin{cases} 2(d-v) & , \quad k \ \text{زوجي} \\ 2v+1 & , \quad k \ \text{فردي} \quad m = 2k+1 \end{cases}$$

إن إثبات هذه المبرهنات موجود في [5 , 2].

يتضمن البحث المراحل الآتية:

- إيجاد القانون التكاملي في الفضاء R^n لحساب التكاملات من الشكل:

$$I = \int_{R^n} x^n e^{-r^2} dx \quad , r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

- تشكيل كثيرات الحدود المتعامدة النظامية من نوع هرميت، وذلك باستخدام العلاقة (2).
- إيجاد صيغة النواة المولدة $K_k(u,x)$ او $\widehat{K}_K(u,x)$ حسب العلاقة (4) .
- اختيار النقاط $a^{(i)}$ ، حيث إن: $i = 1,2,.....,n$ ، وبعد التعويض في إحدى صيغتي النواة السابقة

(7) أو (9) نحصل على مجموعة من المعادلات غير الخطية بشكل عام ، والتي يجب حلها للحصول على نقاط العلاقة التكعيبية $x^{(i)}$. نختار النقاط $u^{(i)}$ بحيث تكون جملة المعادلات الناتجة قابلة للحل ، وأخيرا نحسب الثوابت C_j من كون العلاقة التقريبية تحقق الدقة الجبرية المطلوبة ،وبالتالي نحصل على العلاقة التكعيبية المناسبة.

2- هدف البحث وطريقته:

يهدف هذا البحث إلى إيجاد قانون تكاملي نستخدمه في إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة النظامية من نوع هرميت في الفضاء R^n ، ودالة الوزن $r^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \quad , \quad \omega(x)=e^{-r^2}$ ، و تطبيق طريقة النواة المولدة لتشكيل العلاقات التكعيبية في الفضاء R^n ، ومن أجل الحصول على علاقات تكعيبية ،يمكن استخدامها في حساب القيمة التقريبية للتكاملات اللانهائية المضاعفة للدوال من الشكل:

$$I=\int_{R^n} e^{-r^2}.f(x)dx \quad , \quad x=(x_1,x_2,...x_n)$$

في [3] تم عرض كثيرات الحدود المتعامدة وخواصها والعلاقات التي تربط فيما بينها . يجب إيجاد كثيرات الحدود المتعامدة النظامية في المنطقة المذكورة اعتماداً على طريقة غرام- شميدت .

المسألة المطروحة: حساب التكاملات المضاعفة اللانهائية من الشكل:

$$I=\int_{R^n} e^{-r^2}.f(x)dx$$

حيث إن $f(x)$ دالة ما ، وإمكانية تطبيق هذه الطريقة على الفضاء R^n، ودالة الوزن:

$$r^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \quad , \quad \omega(x)=e^{-r^2}$$

النتائج ومناقشتها:

1-إيجاد القانون التكاملي في الفضاء R^n :

من المعلوم في التكامل الأحادي أن:[4]

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = \Gamma(\frac{n+1}{2})$$

حيث إن Γ دالة غاما، مع ملاحظة أنه في هذا التكامل، إذا كان العدد n فردياً، فإن قيمة التكامل تساوي الصفر. بالاعتماد على هذا التكامل نجد إن:

$$\int_{R^n} e^{-r^2} x^\alpha dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} x^{\alpha_1} dx_1 . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2} x^{\alpha_2} dx_2 .... \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_n^2} x^{\alpha_n} dx_n$$

وحسب علاقة التكامل الأحادي نجد:

$$\int_{R^n} e^{-r^2} x^\alpha dx = \Gamma(\frac{\alpha_1+1}{2}).\Gamma(\frac{\alpha_2+1}{2}).....\Gamma(\frac{\alpha_n+1}{2}) = \prod_{i=1}^{n} \Gamma(\frac{\alpha_i+1}{2})$$

وبالتالي يكتب القانون التكاملي في الفضاء R^n بالشكل الآتي:

$$\int_{R^n} e^{-r^2} x^\alpha dx = \prod_{i=1}^{n} \Gamma(\frac{\alpha_i+1}{2}) \qquad (10)$$

حيث إن:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.....x_n^{\alpha_n} \quad , \quad dx = dx_1.dx_2...dx_n$$
$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \quad , \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

إذا كان واحد على الأقل من α_i ، $i = 1, 2, . n$ فردياً فإن قيمة التكامل في المساواة (10) تصبح مساوية للصفر. العلاقة (10)صحيحة فقط من أجل كثيرات الحدود من الشكل $p_n(x)$.

2-كثيرات الحدود المتعامدة النظامية من نوع هرميت في الفضاء R^n

نعتمد على مبدأ غرام شميث في التعامد والنظيم ، حيث نحصل على كثيرات الحدود من نوع هرميت وهي كثيرات الحدود المتعامدة والنظامية في الفضاء R^n انطلاقاً من مجموعة الدوال المستقلة خطياً الآتية :

$$1, x_1, x_2, ..., x_n, x_1^2.x_2^2, ..., x_n^2 \ , x_1x_2, ..., x_1x_n, x_1^3, ...$$

وبحسب القانون (10) نجد إن كثيرات حدود هرميت المتعامدة النظامية حتى الدرجة الثانية تكتب بالشكل الآتي:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu(R^n)}} \ , F_i(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu(R^n)}} \ x_i \ , i = 1, 2, ..., n$$

$$F_i^2(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu(R^n)}} \ (x^2 - \frac{1}{2}) \qquad (11)$$

$$F_{ij}^2(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu(R^n)}} \ x_i x_j \ , \quad i < j \ , \ i, j = 1, 2, ..., n$$

أما كثيرات حدود هرميت المتعامدة النظامية من الدرجة الثالثة فتكتب بالشكل الآتي:

$$F_i^3(x) = \sqrt{\frac{2}{3\mu(R^n)}} \ x_j(x_i^2 - \frac{1}{2}) \ , \ i \neq j$$

$$F_{ij}^3(x) = \sqrt{\frac{2}{3\mu(R^n)}} \ x_j(x_i^2 - \frac{3}{2}) \quad , \quad i = j \ , \qquad i, j, k = 1, 2, ..., n$$

$$F_{ijk}^3(x) = 2.\sqrt{\frac{2}{3\mu(R^n)}} \ x_i.x_j.x_k \ , \ \ i < j < k$$

(12)

3- تشكيل العلاقة التقريبية التكاملية ، ذات الدقة الجبرية الثالثة $m=3$:

يمكن إيجاد النواة المولدة الموافقة بسهولة حسب العلاقة (4) ، وتكتب بالشكل الآتي:

$$k_1(u,x)=\frac{1}{\mu(R^n)}(1+2\sum_{i=1}^{n}u_i x_i),\quad \tilde{k}_k(u,x)=\frac{2}{\mu(R^n)}\sum_{i=1}^{n}u_i x_i \qquad (13)$$

نشكل العلاقة التقريبية التكاملية ، التي دقتها الجبرية تساوي $m=2k+1=3$ ، حيث $k=1$ بالاعتماد على المبرهنة (2) والعلاقة (13) . نختار النقاط $a^{(i)}$ بالشكل الآتي:

$$a^{(i)}=(0,...,\underset{(i)}{1},0,...,0)$$

بالتبديل في العلاقة (8) ، نجد إن هذه النقاط تحدد المستويات الأتية:

$$\tilde{H}: x_i=0 \quad , \quad i=1,2,..,n$$

النقطة $\theta=(0,...,0)$ هي حل جملة المعادلات الخطية $x_i=0 \quad , \quad i=1,2,..,n$ ، أما الثوابت $A_i \quad , \quad i=1,2,..,n$ الموافقة للنقاط $a^{(i)}$ ، فنجدها من العلاقة(8):

$$A_I=[2\tilde{K}_k(a^{(i)},a^{(i)})]^{-1}=A=\frac{\mu(R^{(n)})}{4}=\frac{\pi^{n/2}}{4}$$

و نجد الثابت C الموافق للنقطة $\theta=(0,...,0)$ من شرط كون العلاقة التقريبية:

$$\int_{R^n} e^{-r^2} f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}A_i[f(a^{(i)})+f(-a^{(i)})]+Cf(\theta) \qquad (14)$$

صحيحة من أجل كل كثيرة حدود درجتها لا تتجاوز الثالثة ، فمن أجل $f(x)=1$ نجد إن:

$$C=(2-n)\pi^{n/2}/2$$

من أجل $n > 2$ الثابت C يكون سالباً ،ومن أجل $n = 2$ يصبح الثابت C معدوماً ، وهنا يصبح عدد النقاط يساوي $2n$ وهو يطابق الحد الأدنى لعدد النقاط حسب المبرهنة (5).

العلاقة (14) صحيحة من أجل كل كثيرة حدود درجتها لا تتجاوز الثالثة ، وتقريبية فيما عدا ذلك .الثوابت A_I موجبة دوماً.

تطبيق 1: نفرض أن $f(x) = 1$ ، حسب العلاقة (10) يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

وبحسب العلاقة (14) نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\text{A+C=}2\frac{\pi^{1/2}}{4} + \frac{1}{2}\pi^{1/2} = \sqrt{\pi}$$

مما يؤكد صحة النتيجة.

2- تشكيل العلاقة التقريبية التكاملية ، ذات الدقة الجبرية الخامسة $m = 5$:

نستخدم كثيرات حدود هرميت حتى الدرجة الثانية بـ n من المتحولات ،والتي درجتها زوجية ، وذلك من أجل إيجاد النواة $\tilde{k}_2(u,x)$ ، وبعد مجموعة من عمليات الضرب والجمع للحدود المتشابهة يمكن إيجاد النواة المولدة الموافقة ، وتكتب بالشكل الآتي:

$$\tilde{k}_2(u,x) = \frac{2}{\mu(R^n)}[\sum_{i=1}^{n} u_i^2 x_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(u_i^2 + x_i^2) + 2\sum_{i<j} u_i u_j x_i x_j + \frac{n+2}{4}] \qquad (15)$$

نشكل العلاقة التقريبية التكاملية ، التي دقتها الجبرية تساوي $m = 2k + 1 = 5$ ، حيث $k = 2$ بالاعتماد على المبرهنة (2) والعلاقة (15) . نختار النقاط $a^{(i)}$ بالشكل الآتي:

$$a^{(i)} = (0,...,0,\underset{(i)}{\frac{\sqrt{n+2}}{2}},0,...,0)$$

التي تحدد السطوح الآتية:

$$\tilde{H}_i :\ \frac{n}{2}x_i^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \frac{n+2}{4} = 0 \quad , i \neq j \ , \ i, j = 1,2,..,n$$

حيث إن النقاط $a^{(i)}$ يتم اختيارها على تقاطع السطوح $\bigcap_{j=1}^{i-1} \tilde{H}_j$، وبالتالي نحصل على جملة معادلات من الدرجة الثانية بـn من المتغيرات:

$$\frac{n}{2}x_i^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \frac{n+2}{4} = 0 \quad , i \neq j \ , \ i, j = 1,2,..,n$$

هذه المجموعة من المعادلات الغير خطية لها $s = 2^n$ من الحلول ، و تم حلها بالتدريج حسب n ، ويساوي:

$$x_j = (\pm b, \pm b, ..., \pm b) \quad , \ b = \sqrt{\frac{n+2}{2(n-2)}}$$

نلاحظ أنه يجب أن يكون $n > 2$ ،لأنه من أجل $n = 1$ يكون الحل عقدياً، ومن أجل $n = 2$ يكون الحل غير معيناً. نجد الثوابت A_i $i = 1,2,...,n,$ من العلاقة(8) :

$$A_I = [2\tilde{K}_k(a^{(i)}, a^{(i)})]^{-1} = A = \frac{4\mu(R^{(n)})}{(n+2)^2} = \frac{4\pi^{n/2}}{(n+2)^2}$$

و نجد الثابت Cالموافق للنقطة $\theta = (0,...,0)$ من شرط كون العلاقة التقريبية:

$$\int_{R^n} e^{-r^2} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i [f(a^{(i)}) + f(-a^{(i)})] + Cf(\theta) \qquad (16)$$

صحيحة من أجل كل كثيرة حدود درجتها لا تتجاوز الخامسة ، فمن أجل $f(x)=1$ نجد إن:

$$C = (2-n)\pi^{n/2} / 2$$

من أجل $n > 2$ الثابت C يكون سالباً ،ومن أجل $n = 2$ يصبح الثابت C معدوماً ، وهنا يصبح عدد النقاط يساوي $2n$ ، وحسب المبرهنة (5) يطابق الحد الأدنى لعدد النقاط.

تطبيق: نفرض أن $f(x,y) = x^2$ ، حسب العلاقة (10) يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2-y^2} dxdy = \Gamma(\frac{3}{2}).\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

وبحسب العلاقة (16) نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2-y^2} dxdy = 2A_1 = 2(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$$

مما يؤكد صحة النتيجة.

3- تشكيل العلاقة التقريبية التكاملية ، ذات الدقة الجبرية السابعة $m = 7$:

نستخدم كثيرات حدود هرميت حتى الدرجة الثالثة (12) و(13) والتي درجتها فردية ، وذلك من أجل إيجاد النواة $\tilde{k}_3(u,x)$ ، نجد إن :

$$\tilde{k}_3(u,x) = \sum_{j=1}^{n}{}^{*} F_j(u).F_j(x)$$

الإشارة * فوق رمز المجموع الأخير تعني أن المجموع يؤخذ بـ j الموافقة لـــ k ،فإذا كانت k فردية ، فإن j تأخذ القيم الفردية فقط ، أي أن:

$$\tilde{k}_3(u,x)=\sum_{j=1}^{n}F_j^3(u).F_j^3(x)+\sum_{j=1}^{n}F_j^1(u).F_j^1(x)$$

بإجراء الجداءات المطلوبة نجد:

$$\tilde{k}_3(u,x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{4}{3\mu(R^n)}W_j(u).W_j(x)+\sum_{j=1}^{n}\frac{4}{3\mu(R^n)}U_J(u).U_j(x))+$$
$$\sum_{i<j<k}^{n}\frac{8}{\mu(R^n)}u_iu_ju_kx_ix_jx_k+\sum_{j=1}^{n}\frac{2}{\mu(R^n)}u_jx_j$$

حيث إن:

$$W_j(u)=u_j(u_i^2-\frac{1}{2}),\ W_j(x)=x_j(x_i^2-\frac{1}{2})$$
$$U_j(u)=u_j(u_i^2-\frac{3}{2}),\ U_j(x)=x_j(x_i^2-\frac{3}{2})$$

و بعد إخراج العامل المشترك $\sum_{j=1}^{n}u_jx_j$ ، نجد إن:

$$\tilde{k}_3(u,x)=\frac{4}{3\mu(R^n)}\sum_{j=1}^{n}u_jx_j[(x_i^2-\frac{1}{2})(u_j^2-\frac{1}{2})+(x_j^2-\frac{3}{2})(u_j^2-\frac{3}{2})+\frac{2}{3}x_ix_ku_iu_k+\frac{3}{2}]$$

بفك الأقواس الداخلية وجمع الأعداد الناتجة، نجد:

$$\tilde{k}_3(u,x)=\frac{4}{3\mu(R^n)}\sum_{j=1}^{n}u_jx_j[u_i^2x_i^2-\frac{1}{2}u_i^2-\frac{1}{2}x_i^2+u_j^2x_j^2-\frac{3}{2}u_j^2-\frac{3}{2}x_j^2+\frac{2}{3}x_ix_ku_iu_k+4]$$

من المعلوم أن:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} u_j x_j\right)^3 = \sum_{j=1}^{n} u_j^3 . x_j^3 + 3\sum_{\substack{i\,,\,j=1\\ i\neq j}}^{n} u_i^2 . x_i^2 . u_j x_j + 6\sum_{i<j<k}^{n} u_i u_j u_k . x_i x_j x_k$$

نضرب الطرفين بـ 1/9 لكي يتساوى مع أمثال الحد $\sum_{i<j<k}^{n} u_i u_j u_k . x_i x_j x_k$ في صيغة النواة ، فيكون :

$$\frac{2}{3}\sum_{i<j<k}^{n} u_i u_j u_k . x_i x_j x_k = \frac{1}{9}\left(\sum_{j=1}^{n} u_j x_j\right)^3 - \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{n} u_j^3 . x_j^3 - \frac{1}{3}\sum_{\substack{i\,,\,j=1\\ i\neq j}}^{n} u_i^2 . x_i^2 . u_j x_j +$$

بالتبديل في صيغة النواة ، نجد:

$$\tilde{k}_3(u,x) = \frac{4}{3\mu(R^n)}\left[\frac{1}{9}\left(\sum_{j=1}^{n} u_j x_j\right)^3 + \frac{8}{9}\sum_{j=1}^{n} u_j^3 . x_j^3 + \frac{2}{3}\sum_{\substack{i\,,\,j=1\\ i\neq j}}^{n} u_i^2 . x_i^2 . u_j x_j \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} u_j x_j (u_i^2 + x_i^2) - \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n} u_j x_j (u_j^2 + x_j^2) + 4\sum_{j=1}^{n} u_j x_j \right] \qquad (17)$$

تأخذ النواة المولدة بمتحولين الشكل الآتي:

$$\tilde{k}_3(u,v;x,y) = \frac{4}{3\pi}\left[u^3x^3 + v^3y^3 - \frac{3}{2}ux(u^2+x^2) - \frac{3}{2}vy(v^2+y^2) + \right.$$
$$\left. + uvxy(ux+vy) - \frac{1}{2}vy(u^2+x^2) - \frac{1}{2}ux(y^2+v^2) + 4(ux+vy)\right] \qquad (18)$$

نشكل العلاقة التقريبية التكاملية ، التي دقتها الجبرية تساوي $m = 2k + 1 = 7$ ، حيث $k = 3$ بالاعتماد على المبرهنة (3) والعلاقة (18) . نختار النقاط $u^{(i)}$ بالشكل الآتي:

$$u^{(1)} = (1\ ,\ 0)$$

التي تحدد السطح الآتي:

$$\tilde{H}_1 :\ x(x^2 + y^2 - 5) = 0$$

نختار النقطة $u^{(2)} = (0\ ,\ 2) \ni \tilde{H}_1$ التي تحدد السطح الآتي:

$$\tilde{H}_2 :\ y(-x^2 + 5y^2 - 4) = 0$$

وبالتالي نحصل على جملة معادلتين من الدرجة الثالثة بمجهولين ، يتألف حلهما المشترك من النقاط $(x^{(i)}\ ,\ y^{(i)})$ ، $i = 1\ ,2\ ,3$ ، التالية:

$$\begin{array}{l} (0\ ,\ 0) \\ (\pm\sqrt{5}\ \ ,\ 0) \\ (0\ ,\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}) \\ (\pm\sqrt{\dfrac{7}{2}}\ ,\ \ \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\ ) \end{array}$$

نجد الثابتان $A_1\ ,\ A_2$ من العلاقة(8) :

$$A_1 = \frac{3\pi}{16}\ \ ,\ A_2 = \frac{3\pi}{256}$$

ونجد الثوابت C_i الموافقة للنقاط $(x^{(i)}\ ,\ y^{(i)})$ ، $i = 1\ ,\ 2\ ,\ldots,$ من شرط كون العلاقة التقريبية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-x^2-y^2}dxdy = \sum_{i=1}^{2} A_i[f(a^{(i)}) + f(-a^{(i)})] + \sum_{i=1}^{9} C_i f(x^{(i)}, y^{(i)}) \qquad (19)$$

صحيحة من أجل كل كثيرة حدود درجتها لا تتجاوز السابعة. من أجل إيجاد الثابت الموافق للنقطة $(0,0)$ نأخذ الدالة التي تنعدم عند كل النقاط $(x^{(i)}, y^{(i)})$ ، $i=1,2,..,9$ ما عدا النقطة

$(0,0)$، وهي:

$$f(x,y) = (x^2-5)(y^2-\frac{4}{5})(y^2-\frac{3}{2})$$

نجد إن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x,y)e^{-x^2-y^2}dxdy = -\frac{18\pi}{5} \ . \ f_1(0,0) = -14$$

$$f_1(a^{(1)}) = f_1(-a^{(1)}) = -\frac{24}{5} \ , \ f_1(a^{(2)}) = f_1(-a^{(2)}) = -40$$

$$-\frac{18\pi}{5} = \frac{3\pi}{16}(-\frac{48}{5}) + \frac{3\pi}{256}(-80) - 14C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{23\pi}{160}$$

بنفس الطريقة نجد بقية الثوابت:

$$C_4 = C_5 = \frac{\pi}{240} \quad \text{و} \quad C_6 = C_7 = C_8 = C_9 = \frac{\pi}{84}$$

العلاقة التقريبية (19) صحيحة تماماً من أجل كل كثيرة حدود درجتها لا تتجاوز السابعة وتقريبية فيما عدا ذلك، عدد النقاط التكاملية 13، وهو يطابق الحد الأدنى لعدد النقاط حسب المبرهنة (4) .نلاحظ أن ثوابت العلاقة التقريبية (19) حقيقية ،وكما في [1] النقاط المتناظرة بالنسبة لمركز التناظر تقابلها ثوابت متساوية.

تطبيق 1: نفرض $f(x,y)=1$ ، حسب العلاقة (10) يكون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy=\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})=\pi$$

وبحسب العلاقة (19) نجد:

$$2\mathrm{A}_1+2\mathrm{A}_2+\sum_{i=1}^{9}C_i=\pi$$

مما يؤكد صحة النتيجة.

الاقتراحات والتوصيات:

1-تشكيل علاقات تقريبية ذات دقة أعلى في الفضاء R^n.

2-العلاقات التقريبية للتكاملات المضاعفة بمتحولات عقدية.

3- العلاقات التقريبية للتكاملات المضاعفة في فضاء سوبوليف.

المراجع المستخدمة:

[1]. Mysovskih.I.p.Abbas.H.A.1991 about. method reproducing Kernel Cubature Formulas. vestnig Leningrad univer _N7 P 3-11

[2]. M ysovskikh.I.P.1981 Interpolation cubature formulas

Nawka . Moscow. 336.p

[3]. cege.g.1962 orthogonal polynomials, Moscow.500. p.

[4].Krilov .1967 approximation Numerical integration

.Hawka.Mowscou.500.

[5].Moller.H.M. polynomials and cubature formulas.

univ_Dortmund_1973

[6] R. Cools; , I.P. Mysovskikh, H.J. Schmidt, Cubature formulae and orthogonal polynomials_2001

[7].Rasputin.G.G. construction cubature formulas tor triangle and square 1978

[8] G.Ismatullaev , S.Bakhromov ,R.Mizakabilov.Construction of Cubature formulas with minimal number of nods .Tashkent University 2021

[9] Ponomarenko.A. K , On some Cubature formulas of the ninth degree containing derivate, Leningrad 1991.