

## مقارنة طرائق تقدير توزيع وايبل لأحداث عشوائية نيتروسوفكية

د. هادية طهماز \*

### الملخص

يعتبر علم الإحصاء علم اتخاذ القرارات الآمنة، لذا نهتم بصنع قرارات إحصائية تتميز بدقة عالية وأقل الأخطاء الممكنة، وينشأ ذلك من خلال الاهتمام بالأحداث العشوائية وكيفية وقوعها. فقد يصادفنا دراسة حالات غير محددة بدقة أو غامضة وغير واضحة، وبالتالي لا بد من استخدام أداة جديدة تعالج هذا النوع من الحالات وتسمح لنا بالتعامل مع أحداث عشوائية غير كلاسيكية. تم في هذا البحث توسيع مفهوم توزيع وايبل وفق منطق النيتروسوفيك، من خلال تعريفه ودراسة خواصه الإحصائية لأحداث عشوائية نيتروسوفكية بما في ذلك العزوم من المرتبة-2 والالتواء والتقلطح، كما تم تقدير معالم توزيع وايبل النيتروسوفكي من خلال مقدرات الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى. تم التطبيق على قاعدة بيانات حقيقية لأزمة حضانة فايروس كورونا COVID-19، أظهرت النتائج من خلال تقييم كفاءة التقدير باستخدام معيار MSE بأهمية كلا الطريقتين وبمرونة توزيع وايبل المقترح في التعامل مع البيانات غير الدقيقة مقارنة مع توزيع وايبل الكلاسيكي، فهو تعميم له كونه يتعامل مع أحداث نيتروسوفكية.

**الكلمات المفتاحية:** توزيع وايبل النيتروسوفكي، الإمكانية العظمى النيتروسوفكية، نيوتن رافسون النيتروسوفكية، المربعات الصغرى النيتروسوفكية، العزوم النيتروسوفكية.

\* قسم الاحصاء الرياضي، كلية العلوم، جامعة البعث.

# Comparing Estimation Methods for Neutrosophic Events-Weibull Distribution

Dr. Hadia Tohmaz\*.

## Abstract

Statistics is the science of making safe-decisions, focusing on making significant decisions with high accuracy and least errors. This involves understanding random events and their occurrences. Occasionally, we encounter vaguely defined or ambiguous scenarios, necessitating the use of new tools to address such cases and manage non-classical random events. This study expands the concept of the Neutrosophic Weibull distribution by defining it and studying its statistical properties for Neutrosophic random events, including r-order moments, skewness, and kurtosis. Parameters of the Neutrosophic Weibull distribution were estimated using maximum likelihood estimators and least squares method. The approach was applied to a real COVID-19 incubation time database. Showed importance of both methods using Mean Squared Error (MSE) criterion and the flexibility of Neutrosophic Weibull distribution in dealing with inaccurate data compared to the classical Weibull distribution showed the importance of both methods and the flexibility of the proposed Weibull distribution in dealing with inaccurate data compared to the classical Weibull distribution

Keywords: Neutrosophic Weibull distribution, Neutrosophic maximum likelihood, Neutrosophic least squares, Neutrosophic Newton Raphson, Neutrosophic moments.

---

\*Dept. Mathematical Statistic, Faculty of Science, Al-Baath University, Homs, Syria.

## مقدمة (Introduction):

يعتبر توزيع وايبل من أشهر النماذج الرياضية البالغة الأهمية في تحليل البقاء ونظرية الموثوقية، اشتقه العالم السويدي الأمريكي إريك وايبل (Erich H. Weibull) عام 1939 وتم تطويره عام 1951 من خلال نشر مقالة وضح فيها بعض تطبيقات هذا التوزيع حيث وصف فشل بعض الأنظمة الكهربائية وأهميته في تحليل الموثوقية [1]. لذا اثار اهتمام معظم الباحثين لأهميته وتطبيقاته إذ يعتبر من التوزيعات الاحتمالية المستمرة الأساسية في الإحصاء والرياضيات، حيث يتميز بشكله الفريد وتطبيقاته المتعددة في مختلف المجالات والتطبيقات منها الهندسية كتقدير عمر المنتجات وتوقع فشلها [2]، ويستخدم في العلوم الطبية في تحليل بيانات البقاء (Survival-Analysis) لدراسة معدلات الحياة للأفراد، والأحداث البيولوجية في دراسة معدلات النمو والبقاء للكائنات الحية، كما يساهم في تحليل الحوادث الطبيعية والظواهر البيئية والعديد من المجالات الأخرى [3][4].

قد يصادفنا عند دراسة ظواهر ذات أحداث عشوائية دراسة حالات غير دقيقة أو غامضة وغير واضحة، وقد نصادف أيضاً أزمنة حدوث غير محددة تتراوح ضمن مجال فكون أمام حالة لا تحديد متعلقة بالزمن، كأن نرصد مثلاً أزمنة الأعطال العشوائية لآلة معينة خلال شهر، فيكون زمن تعطل الآلة غير محدد بدقة أي يتراوح ضمن مجال، فيتشكل لدينا سلسلة من الأزمنة المجالية، وبالتالي لا بد من استخدام أداة جديدة تعالج هذه الحالات وتسمح لنا بالتعامل مع أحداث وأزمنة عشوائية غير كلاسيكية، فلا بد من تسليط الضوء على منطق جديد غير كلاسيكي يدرس مثل هذه الحالات، كان أول من أوجده الأميركي فلورنتن سمارانداكه حيث قدم عام 1995 المنطق النيتروسوفيكي كتعميم للمنطق الضبابي والكلاسيكي [5]. يهدف هذا البحث إلى توسيع مفهوم توزيع وايبل ودراسة أسسه وخصائصه وفق منطق النيتروسوفيكي. بالإضافة إلى دراسة تطبيقاته في

مجالات متنوعة. كما سيتم دراسة الطرائق المستخدمة لتقدير معالم توزيع وايبل وكيفية تطبيقها في التحليل الإحصائي. سيتم تحليل كيفية استخدام توزيع وايبل في تحليل البيانات وتوقع الأحداث المستقبلية وتحديد المخاطر. سيساهم هذا البحث في تطوير المعرفة الإحصائية وتعزيز استخدام توزيع وايبل النيتروسوفيك في البحوث والتطبيقات المختلفة لأحداث غير محددة بدقة.

### مشكلة البحث (Problem of the Research):

عند دراسة ظواهر ذات أحداث عشوائية يصادفنا أحياناً دراسة حالات غير دقيقة أو غامضة وغير واضحة، وقد نصادف أيضاً أزمنة حدوث غير محددة تتراوح ضمن مجال، كأن نرصد مثلاً أزمنة الأعطال العشوائية لآلة معينة خلال شهر، فيكون مثلاً زمن تعطل الآلة غير محدد بدقة كأن يتراوح الزمن بالساعات ضمن مجال، فيتشكل لدينا سلسلة من الأزمنة المجالية غير محددة بدقة، وبالتالي لابد من استخدام أداة جديدة تعالج هذه الحالات وتسمح لنا بالتعامل مع أحداث وأزمنة عشوائية غير كلاسيكية، لذا من المهم دراسة هذه الحالات والعمل على تعميم مفاهيم التوزيعات الاحتمالية الشهيرة بشكل أكثر دقة.

### أهمية البحث (Importance of the Research):

يعتبر هذا البحث من الدراسات الحديثة في مجال النيتروسوفيك، حيث يسلط الضوء على شكل جديد من أشكال توزيع وايبل ضمن مفهوم النيتروسوفيك ودراسة حالات لا تحديد لأحداث عشوائية متعلقة به.

## أهداف البحث (Objectives of the Research):

- (1) دراسة توزيع وايبل لأحداث عشوائية نيتروسوفكية.
- (2) استنتاج الصفات المميزة لتوزيع وايبل النيتروسوفكي.
- (3) إيجاد مقدرات توزيع وايبل باستخدام طريقة الإمكان الأعظم ونيوتن رافسون.
- (4) إيجاد مقدرات توزيع وايبل باستخدام المربعات الصغرى.
- (5) التطبيق على قاعدة بيانات حقيقية تمثل أزمة حضانة فيروس كورونا.
- (6) مقارنة نتائج المقدرات باستخدام مقياس التنبؤ MSE لبيانات نيتروسوفكية.

## 1- المتغير العشوائي النيتروسوفكي Neutrosophic Random Variable [6]

تستخدم المتغيرات العشوائية للتعبير عن نتائج تجارب عشوائية معينة وأحداث عشوائية ونقرنها بقيم عددية في علم الإحصاء، فالمتغير العشوائي في المنطق الكلاسيكي يتغير بسبب العشوائية، أما في حال التجارب التي تحتوي على أحداث عشوائية غير محددة بدقة فنلجأ إلى تمثيلها بمتغيرات عشوائية تدعى بالنيتروسوفكية التي تتميز بأنها تتغير بسبب العشوائية واللاتحديد معاً، أي أنها تعتبر تعميم للمتغيرات العشوائية الكلاسيكية.

عندئذ يعرف المتغير العشوائي النيتروسوفكي  $X_N$  على فضاء العينة النيتروسوفكي بفرض أن  $\Omega_N$  جبرياً بالصيغة التالية:

$$X_N = a + bI \quad ; I \in [I_L, I_U]$$

علماً أن  $a$  هو الجزء المحدد من المتغير العشوائي النيتروسوفكي  $X_N$ ، و  $aI$  هو الجزء غير المحدد منه، ويمكن كتابته بالشكل المجالي كما يلي:

$$X_N = a + b[I_L, I_U] = [a + bI_L, a + bI_U] = [X_L, X_U]$$

## 2- العمليات على المتغيرات النيتروسوفيكية [6]:

ليكن  $X_1$  و  $X_2$  متغيران نيتروسوفيكيان، وليكن  $X_1 = a_1 + b_1 I$  و  $X_2 = a_2 + b_2 I$  عندئذ:

$$X_1 + X_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)I$$

$$X_1 - X_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)I$$

$$X_1 \times X_2 = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)I + b_1 b_2 I^2$$

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{(a_1 + b_1 I)}{(a_2 + b_2 I)} = \frac{[a_1 + b_1 \inf I, a_1 + b_1 \sup I]}{[a_2 + b_2 \inf I, a_2 + b_2 \sup I]}$$

توزيع وايبل النيتروسوفكي:

يعتبر توزيع وايبل من أحد أهم التوزيعات الاحتمالية في الإحصاء والرياضيات، لما له من تطبيقات واسعة في نظرية الموثوقية وتحليل البقاء على وجه العموم، فهو يقدم نموذجاً رياضياً جيداً لتحليل عمر المواد والأنظمة وتقدير احتمالية فشلها. فقد صادفنا في دراستنا حالات غير دقيقة أو غير محددة، كأن تكون مثلاً متوسط أزمنا فشل نظام معين على شكل مجال فيكون معلمة المقياس  $\beta_N$  في هذه الحالة غير محددة بدقة أي على شكل مجال، لذا لابد من توسيع مفهوم توزيع وايبل الكلاسيكي إلى توزيع وايبل النيتروسوفكي ليشمل جميع الحالات الممكنة أثناء القيام بالتجارب العشوائية.

بفرض  $T_N$  متغير عشوائي نيتروسوفكي له توزيع وايبل، عندئذ تعرف دالة الكثافة لتوزيع وايبل النيتروسوفكي بالصيغة التالية:

$$f_N(t; \alpha_N, \beta_N) = \frac{\alpha_N}{\beta_N} t^{\alpha_N - 1} e^{-\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}} ; t \geq 0$$

علمياً أن:  $\alpha_N$  تمثل معلمة الشكل و  $\beta_N$  تمثل معلمة المقياس وهي معالم نيتروسوفيكية  
مجالية أي أن:

$$\alpha_N = [\alpha_L, \alpha_U]$$

$$\beta_N = [\beta_L, \beta_U]$$

الصفات المميزة لتوزيع وايبل لأحداث عشوائية نيتروسوفيكية:

1- دالة التوزيع النيتروسوفيكية: إن دالة التوزيع النيتروسوفيكية لتوزيع وايبل تعطى  
بالعلاقة:

$$F_N(t) = 1 - e^{-\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}}$$

الاثبات:

$$\begin{aligned} F_N(t) &= p(T \leq t) = \int_0^t f_N(t) dt = \int_0^t [f_L(t), f_U(t)] dt \\ &= \left[ \int_0^t f_L(t) dt, \int_0^t f_U(t) dt \right] \\ &= \left[ \int_0^t \frac{\alpha_L}{\beta_L} t^{\alpha_L-1} e^{-\frac{t^{\alpha_L}}{\beta_L}} dt, \int_0^t \frac{\alpha_U}{\beta_U} t^{\alpha_U-1} e^{-\frac{t^{\alpha_U}}{\beta_U}} dt \right] \\ &= \left[ 1 - e^{-\frac{t^{\alpha_L}}{\beta_L}}, 1 - e^{-\frac{t^{\alpha_U}}{\beta_U}} \right] = 1 - e^{-\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}} \end{aligned}$$

2- التوقع الرياضي النيتروسوفكي: بفرض  $T_N$  متغير عشوائي يخضع لتوزيع وايبل

بأحداث عشوائية نيتروسوفكية عندئذ التوقع الرياضي له هو:

$$EX_N = \alpha_N \frac{1}{\beta_N} \Gamma\left(\frac{1}{\beta_N} + 1\right)$$

الإثبات:

$$\begin{aligned} E_N(t) &= \int_0^{\infty} t f_N(t) dt = \int_0^{\infty} t [f_L(t), f_U(t)] dt \\ &= \left[ \int_0^{\infty} t f_L(t) dt, \int_0^{\infty} t f_U(t) dt \right] \\ &= \left[ \int_0^{\infty} t \frac{\alpha_L}{\beta_L} t^{\alpha_L-1} e^{-\frac{t^{\alpha_L}}{\beta_L}} dt, \int_0^{\infty} t \frac{\alpha_U}{\beta_U} t^{\alpha_U-1} e^{-\frac{t^{\alpha_U}}{\beta_U}} dt \right] \\ &= \left[ \alpha_L \frac{1}{\beta_L} \Gamma\left(\frac{1}{\beta_L} + 1\right), \alpha_U \frac{1}{\beta_U} \Gamma\left(\frac{1}{\beta_U} + 1\right) \right] = \alpha_N \frac{1}{\beta_N} \Gamma\left(\frac{1}{\beta_N} + 1\right) \end{aligned}$$

علماً أن  $\Gamma\left(\frac{1}{\beta_N} + 1\right)$  هي دالة غاما لها الصيغة التالية:

$$\Gamma(\theta_N) = \int_0^{\infty} t^{\theta_N-1} e^{-t} dt$$

3- التباين النيتروسوفكي: إن التباين النيتروسوفكي لتوزيع وايبل يعطى بالعلاقة:

$$V(X_N) = \alpha_N \frac{2}{\beta_N} \left( \Gamma\left(\frac{2}{\beta_N} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta_N} + 1\right) \right)$$

الإثبات:

نعلم أن التباين الرياضي يعطى بالعلاقة:

$$V_N(t) = E_N(t^2) - (E_N(t))^2$$



$$\begin{aligned}
 E_N(t^2) &= \int_0^{\infty} t^2 f_N(t) dt = \int_0^{\infty} t^2 [f_L(t), f_U(t)] dt \\
 &= \left[ \int_0^{\infty} t^2 f_L(t) dt, \int_0^{\infty} t^2 f_U(t) dt \right] \\
 &= \left[ \int_0^{\infty} t^2 \frac{\alpha_L}{\beta_L} t^{\alpha_L-1} e^{-\frac{t^{\alpha_L}}{\beta_L}} dt, \int_0^{\infty} t^2 \frac{\alpha_U}{\beta_U} t^{\alpha_U-1} e^{-\frac{t^{\alpha_U}}{\beta_U}} dt \right] \\
 &= \left[ \alpha_L^{\frac{2}{\beta_L}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta_L} + 1\right), \alpha_U^{\frac{2}{\beta_U}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta_U} + 1\right) \right] = \alpha_N^{\frac{2}{\beta_N}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta_N} + 1\right)
 \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}
 V_N(t) &= E_N(t^2) - (E_N(t))^2 \\
 &= \alpha_N^{\frac{2}{\beta_N}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta_N} + 1\right) - \left( \alpha_N^{\frac{1}{\beta_N}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta_N} + 1\right) \right)^2 \\
 &= \alpha_N^{\frac{2}{\beta_N}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta_N} + 1\right) - \alpha_N^{\frac{2}{\beta_N}} \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta_N} + 1\right) \\
 &= \alpha_N^{\frac{2}{\beta_N}} \left( \Gamma\left(\frac{2}{\beta_N} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta_N} + 1\right) \right)
 \end{aligned}$$

3- العزوم من المرتبة- $r$ : يعطى العزم من المرتبة- $r$  لتوزيع وايبيل النيتروسوفكي وفق

العلاقة التالية:

$$\mu_r = \alpha_N^{\frac{r}{\beta_N}} \Gamma\left(\frac{r}{\beta_N} + 1\right)$$

الإثبات:

$$\begin{aligned}
 \mu_r = E_N(t^r) &= \int_0^{\infty} t^r f_N(t) dt = \int_0^{\infty} t^r [f_L(t), f_U(t)] dt \\
 &= \left[ \int_0^{\infty} t^r f_L(t) dt, \int_0^{\infty} t^r f_U(t) dt \right] \\
 &= \left[ \int_0^{\infty} t^r \frac{\alpha_L}{\beta_L} t^{\alpha_L-1} e^{-\frac{t^{\alpha_L}}{\beta_L}} dt, \int_0^{\infty} t^r \frac{\alpha_U}{\beta_U} t^{\alpha_U-1} e^{-\frac{t^{\alpha_U}}{\beta_U}} dt \right] \\
 &= \left[ \int_0^{\infty} \frac{\alpha_L}{\beta_L} t^{r+\alpha_L-1} e^{-\frac{t^{\alpha_L}}{\beta_L}} dt, \int_0^{\infty} \frac{\alpha_U}{\beta_U} t^{r+\alpha_U-1} e^{-\frac{t^{\alpha_U}}{\beta_U}} dt \right] \\
 &= \left[ \alpha_L \frac{r}{\beta_L} \Gamma\left(\frac{r}{\beta_L} + 1\right), \alpha_U \frac{r}{\beta_U} \Gamma\left(\frac{r}{\beta_U} + 1\right) \right] = \alpha_N \frac{r}{\beta_N} \Gamma\left(\frac{r}{\beta_N} + 1\right)
 \end{aligned}$$

ملاحظة: سنرمز لـ  $\Gamma\left(\frac{1}{\beta_N} + 1\right)$  و  $\Gamma\left(\frac{2}{\beta_N} + 1\right)$  بـ  $\Gamma_{N_1}$  و  $\Gamma_{N_2}$  وبشكل عام:

$$\Gamma_{N_r} := \Gamma\left(\frac{r}{\beta_N} + 1\right)$$

4- معامل الالتواء: يعطى الالتواء لتوزيع وايبل النيتروسوفكي وفق العلاقة التالية:

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma_{N_3} - 3\Gamma_{N_1}\Gamma_{N_2} + 2\Gamma_{N_1}^3}{[\Gamma_{N_2} - \Gamma_{N_1}^2]^{3/2}}$$

الإثبات:

إن معامل الالتواء معرف بالعلاقة التالية:

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}}$$

حيث:

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \hat{\mu}_2 - (\hat{\mu}_1)^2 = \alpha_N^{\frac{2}{\beta_N}} \Gamma \left( \frac{2}{\beta_N} + 1 \right) - \alpha_N^{\frac{2}{\beta_N}} \Gamma^2 \left( \frac{1}{\beta_N} + 1 \right) \\ &= \alpha_N^{\frac{2}{\beta_N}} (\Gamma_{N_2} - \Gamma_{N_1}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \hat{\mu}_3 - 3\hat{\mu}_2\hat{\mu}_1 + 2(\hat{\mu}_1)^3 \\ &= \alpha_N^{\frac{3}{\beta_N}} \Gamma \left( \frac{3}{\beta_N} + 1 \right) - 3\alpha_N^{\frac{2}{\beta_N}} \Gamma \left( \frac{2}{\beta_N} + 1 \right) \alpha_N^{\frac{1}{\beta_N}} \Gamma \left( \frac{1}{\beta_N} + 1 \right) \\ &\quad + 2\alpha_N^{\frac{3}{\beta_N}} \Gamma^3 \left( \frac{1}{\beta_N} + 1 \right) \\ \Rightarrow \mu_3 &= \alpha_N^{\frac{3}{\beta_N}} (\Gamma_{N_3} - 3\Gamma_{N_1}\Gamma_{N_2} + 2\Gamma_{N_1}^3)\end{aligned}$$

وبالتالي يصبح معامل الالتواء وفقاً لعلاقة ( $\gamma_1$ ) بالشكل:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \sqrt{\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}} = \sqrt{\frac{\alpha_N^{\frac{6}{\beta_N}} (\Gamma_{N_3} - 3\Gamma_{N_1}\Gamma_{N_2} + 2\Gamma_{N_1}^3)^2}{\alpha_N^{\frac{6}{\beta_N}} [\Gamma_{N_2} - \Gamma_{N_1}^2]^3}} \\ &= \frac{\Gamma_{N_3} - 3\Gamma_{N_1}\Gamma_{N_2} + 2\Gamma_{N_1}^3}{[\Gamma_{N_2} - \Gamma_{N_1}^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

5- معامل التفلطح: إن معامل التفلطح لتوزيع وايبل النيتروسوفكي يعطى بالعلاقة:

$$\gamma_2 = \frac{\Gamma_{N_4} - 4\Gamma_{N_1}\Gamma_{N_3} - 3\Gamma_{N_2}^2 + 12\Gamma_{N_1}^2\Gamma_{N_2} - 6\Gamma_{N_1}^4}{[\Gamma_{N_2} - \Gamma_{N_1}^2]^2}$$

الإثبات:

إن معامل التفلطح معرف بالعلاقة التالية:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

حيث:

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6(\mu_1)^2\mu_2 - 3(\mu_1)^4 \\ &= \alpha_N^{\frac{4}{\beta_N}} \Gamma\left(\frac{4}{\beta_N} + 1\right) - 4\alpha_N^{\frac{1}{\beta_N}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta_N} + 1\right) \alpha_N^{\frac{3}{\beta_N}} \Gamma\left(\frac{3}{\beta_N} + 1\right) \\ &\quad + 6\alpha_N^{\frac{2}{\beta_N}} \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta_N} + 1\right) \alpha_N^{\frac{2}{\beta_N}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta_N} + 1\right) \\ &\quad - 3\alpha_N^{\frac{4}{\beta_N}} \Gamma^4\left(\frac{1}{\beta_N} + 1\right) \\ &= \alpha_N^{\frac{4}{\beta_N}} (\Gamma_{N_4} - 4\Gamma_{N_1}\Gamma_{N_3} + 6\Gamma_{N_2}\Gamma_{N_1}^2 - 3\Gamma_{N_1}^2) \\ \Rightarrow \gamma_2 &= \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\alpha_N^{\frac{4}{\beta_N}} (\Gamma_{N_4} - 4\Gamma_{N_1}\Gamma_{N_3} + 6\Gamma_{N_2}\Gamma_{N_1}^2 - 3\Gamma_{N_1}^2)}{\alpha_N^{\frac{4}{\beta_N}} (\Gamma_{N_2} - \Gamma_{N_1}^2)^2} - 3 \\ &= \frac{\Gamma_{N_4} - 4\Gamma_{N_1}\Gamma_{N_3} - 3\Gamma_{N_2}^2 + 12\Gamma_{N_1}^2\Gamma_{N_2} - 6\Gamma_{N_1}^4}{[\Gamma_{N_2} - \Gamma_{N_1}^2]^2} \end{aligned}$$

6- دالة الموثوقية النيتروسوفيكية: إن دالة الموثوقية لتوزيع وايبل النيتروسوفكي تعطى

بالعلاقة:

$$R_N(t) = e^{-\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}}$$

الإثبات:

$$\begin{aligned} R_N(t) &= p(T \geq t) = \mathbf{1} - p(T \leq t) = 1 - F_N(t) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}}\right) = e^{-\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}} \end{aligned}$$

أو يمكن اثباتها بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} R_N(t) &= p(T \geq t) = \int_t^{\infty} f_N(t) dt = \int_t^{\infty} [f_L(t), f_U(t)] dt \\ &= \left[ \int_t^{\infty} f_L(t) dt, \int_t^{\infty} f_U(t) dt \right] \\ &= \left[ \int_t^{\infty} \frac{\alpha_L}{\beta_L} t^{\alpha_L-1} e^{-\frac{t^{\alpha_L}}{\beta_L}} dt, \int_t^{\infty} \frac{\alpha_U}{\beta_U} t^{\alpha_U-1} e^{-\frac{t^{\alpha_U}}{\beta_U}} dt \right] \\ &= \left[ e^{-\frac{t^{\alpha_L}}{\beta_L}}, e^{-\frac{t^{\alpha_U}}{\beta_U}} \right] = e^{-\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}} \end{aligned}$$

7- دالة المخاطرة: بفرض  $T$  زمن حياة توزيع وايبيل لنظام ما، وبفرض أن  $f_N(t)$  تمثل

دالة الكثافة الاحتمالية النيتروسوفكية للمتغير  $T$ ، عندئذٍ يمكن استنتاج دالة المخاطرة

(أو تدعى بدالة الإخفاق) لتوزيع وايبيل النيتروسوفكي كما يلي:

$$H_N(t) = \frac{f_N(t)}{R_N(t)} = \frac{\frac{\alpha_N}{\beta_N} t^{\alpha_N-1} e^{-\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}}}{e^{-\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}}} = \frac{\alpha_N}{\beta_N} t^{\alpha_N-1}$$

في حال كانت  $\alpha_N < [1,1]$  فدالة الإخفاق في هذه الحالة تكون متناقصة، أما في حال

كانت  $\alpha_N > [1,1]$  فدالة الإخفاق تصبح متزايدة وفي حال كان  $\alpha_N = [1,1]$  فدالة

الإخفاق ثابتة مع الزمن. تعتبر مرونة توزيع وايبيل في احتوائه على معدل إخفاق

متناقص أو متزايد أو ثابت مع الزمن واحد من الملامح الهامة التي تجعله نموذج هام لتمثيل أزمنة حياة بعض الأنظمة.

مثال توضيحي:

بفرض أن أزمنة فشل بطارية هاتف ذكي مقدرة بالسنوات تخضع لتوزيع وايبل بالوسطاء:

$$\alpha_N = [2,4]$$

$$\beta_N = [10,12]$$

(اللاتحديد في المعالم ناتج عن وجود لا تحديد في أزمنة الفشل (السنوات))، عندئذ:

(1) ما احتمال أن البطارية قد فشلت في السنة الرابعة: يمكن أن نوجد هذا الاحتمال

باستخدام كثافة توزيع وايبل التالية:

$$f_N(4; [2,4], [10,12]) = \frac{[2,4]}{[10,12]} t^{[2,4]-1} e^{-\frac{t^{[2,4]}}{[10,12]}}$$

$$= [0,0.173]$$

(2) احسب موثوقية عمر البطارية في السنة الرابعة:

نستطيع أن نحسب الموثوقية باستخدام العلاقة:

$$R_N(4) = e^{-\frac{4^{[2,4]}}{[10,12]}} = [0,0.27]$$

وهذا المجال يفسر أن موثوقية عمر البطارية تقع بين 0% و 0.27%، أي أن هناك احتمالية بعدم فشل البطارية قبل أن يصل عمرها إلى أربعة سنين تقع ضمن هذا المجال وتبلغ أعلى نسبة 27%.

(3) احسب موثوقية عمر البطارية في السنة الثامنة:

نحسب الموثوقية وفق العلاقة:

$$R_N(8) = e^{-\frac{8^{[2,4]}}{[10,12]}} = [0,0.0017]$$

وهذا المجال يفسر أن موثوقية عمر البطارية تقع بين 0% و 0.0017%، أي أن هناك احتمالية بعدم فشل البطارية قبل أن يصل عمرها إلى ثمان سنوات تقع ضمن هذا المجال وتبلغ أعلى نسبة 0.17%.

نلاحظ أنه كلما انخفضت قيمة موثوقية عمر البطارية زادت احتمالية فشلها في الزمن المحدد بازدياد عدد السنوات، وكلما ارتفعت قيمة الموثوقية زادت احتمالية بقاءها أطول عمراً دون فشل.

هذا مثال يوضح كيفية استخدام توزيع وايبل لحساب الاحتمالات لأحداث الفشل في أوقات معينة.

(4) حساب العمر الوسطي لأزمة فشل البطارية: يمكن حسابه من خلال العلاقة:

$$\begin{aligned} EX_N &= \alpha_N \beta_N \Gamma\left(\frac{1}{\beta_N} + 1\right) = [2,4]^{[10,12]} \Gamma\left(\frac{1}{[10,12]} + 1\right) \\ &= \left[2^{\frac{1}{12}} \Gamma\left(\frac{1}{12} + 1\right), 4^{\frac{1}{10}} \Gamma\left(\frac{1}{10} + 1\right)\right] \\ &= [1.009, 1.083] \end{aligned}$$

طرائق تقدير معالم توزيع وايبل النيتروسوفكي:

1- طريقة المربعات الصغرى الخطية النيتروسوفكية:

تتلخص هذه الطريقة في إيجاد مقدرات المعالم بالخطوات التالية:

1. تحديد نموذج التوزيع:

$$f_N(t) = \frac{\alpha_N}{\beta_N} t^{\alpha_N-1} e^{-\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}}$$

2. تحديد دالة الخطأ: يتم تحديد دالة الخطأ التي سيتم تقليلها، وتمثل مربعات الفروقات

بين القيم المتوقعة والقيم الفعلية:

$$\sum_{i=1}^n \left( f_N(t_i | \alpha, \beta) - \hat{f}_N(t_i | \alpha, \beta) \right)^2$$

3. تقليل مجموع مربعات الأخطاء:

$$\sum_{i=1}^n \left( f_N(t_i | \alpha, \beta) - \hat{f}_N(t_i | \alpha, \beta) \right)^2 = 0$$

تهدف إلى تعديل المعاملات في النموذج الرياضي لتحقيق أقل قدر ممكن من الفروق

بين القيم الملاحظة والقيم المتوقعة. هذه الخطوة تتم باستخدام العلاقات الرياضية لحساب

مشتقات الدالة الهدف (وهي عادة مجموع مربعات الأخطاء) بالنسبة للمعاملات المختلفة

في النموذج بحيث يقلل من الفروقات بين البيانات الملاحظة والقيم المتوقعة.



إن دالة توزيع وايبل هي دالة غير خطية:

$$F_N(t) = 1 - e^{-\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - F_N(t)} = e^{\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{1 - F_N(t)}\right) = \frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}$$

نأخذ لوغاريتم العلاقة الأخيرة لتحويلها إلى الشكل الخطي فنحصل على:

$$\ln \ln \left( \frac{1}{1 - F_N(t)} \right) = \alpha_N \ln t - \ln \beta_N$$

نفرض أن  $a = -\ln \beta_N$  ،  $b = \alpha_N$  ،  $X = \ln t$  ،  $Y = \ln \ln \left( \frac{1}{1 - F_N(t)} \right)$

فيصبح النموذج كما يلي:

$$Y = a + bX$$

إذ إن:

$$\sum_{i=1}^n (\hat{a} + \hat{b}x_i - y_i)^2 = \min_{a,b} \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2$$

والمقداران  $\hat{a}$ ،  $\hat{b}$  هما مقدرا المربعات الصغرى للمعلمتين  $a$  و  $b$ ، فإن هذين المقدرين يمكن إيجادهما من خلال المعادلتين الآتيتين:

$$\hat{a} = \frac{\sum y_i}{n} - \hat{b} \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}$$

## 2- طريقة الإمكان الأعظم النيتروسوفكية MLE:

تُعد طريقة الإمكان الأعظم من الطرائق الشائعة الاستخدام في تقدير معالم النماذج، وتتميز هذه الطريقة بأن مقدراتها تجعل من دالة الامكان الأعظم في نهايتها العظمى. بفرض  $t_1, t_2, \dots, t_n$  عينة عشوائية حجمها  $n$  مأخوذة من مجتمع إحصائي كثافتها  $f_N(t)$  لتوزيع وايبل، وبفرض المتجه  $\theta = (\alpha_N, \beta_N)$  متجه معالم توزيع وايبل النيتروسوفكي، عندئذ دالة الإمكان الأعظم تعرف بالشكل:

$$L_N(t_1, t_2, \dots, t_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f_N(t_i, \theta)$$

ويأخذ لوغاريتم هذه الدالة وجعل مشتقها الأول (بالنسبة لكل معلمة) يساوي الصفر نحصل على مقدرات الإمكان الأعظم لهذه المعالم.

إن دالة الامكانية لتوزيع وايبل نيتروسوفكي تعطى بالعلاقة:

$$L_N(\alpha_N, \beta_N | t) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\alpha_N}{\beta_N} t^{\alpha_N-1} e^{-\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}} \right)$$

فإن دالة اللوغاريتم تأخذ الشكل:

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha_N, \beta_N | t) &= \ln \prod_{i=1}^n \left( \frac{\alpha_N}{\beta_N} t^{\alpha_N-1} e^{-\frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ (\ln \alpha_N - \ln \beta_N) + (\alpha_N - 1) \ln(t_i) - \frac{t_i^{\alpha_N}}{\beta_N} \right] \end{aligned}$$

4. إيجاد معاملات التقدير: نوجد المشتقات لدالة الاحتمال بالنسبة لكل من معالم النموذج:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_N} \ln L(\alpha_N, \beta_N | t) = \left[ \frac{n}{\alpha_N} + \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \sum_{i=1}^n \frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N} \ln(t) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_N} \ln L(\alpha_N, \beta_N | t) = \left[ -\frac{n}{\beta_N} + \sum_{i=1}^n \frac{t^{\alpha_N}}{\beta_N^2} \right]$$

لحل المعادلات التفاضلية الجزئية بتعيين المشتقات الجزئية الأولى لدالة الامكانية بالصففر:

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_N}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_N} \right) = (0, 0)$$

$$\left[ \frac{n}{\hat{\alpha}_N} + \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \sum_{i=1}^n \frac{t^{\hat{\alpha}_N}}{\hat{\beta}_N} \ln(t) \right] = 0 \quad \dots (1)$$

$$-\frac{n}{\hat{\beta}_N} + \sum_{i=1}^n \frac{t^{\hat{\alpha}_N}}{\hat{\beta}_N^2} = 0 \quad \dots (2)$$

من العلاقة (2) نجد أن مقدر المعلم النيتروسوفكي  $\beta_N$  يعطى بالعلاقة:

$$\hat{\beta}_N = \left( \sum_{i=1}^n \frac{t^{\hat{\alpha}_N}}{n} \right)$$

أما من أجل مقدر المعلم النيتروسوفكي  $\alpha_N$  نحل المعادلة (1) بطرق عددية، نقترح في هذه البحث حلها باستخدام طريقة نيوتن رافسون كما يلي:

لدينا من المعادلة (1):

$$f(t) = \left[ \frac{n}{\alpha_N} + \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \sum_{i=1}^n \frac{t^{\alpha_N}}{\hat{\beta}_N} \ln(t) \right]$$

$$= \left[ \frac{\sum_{i=1}^n t^{\alpha_N} \ln(t)}{\sum_{i=1}^n t^{\alpha_N}} - \frac{1}{\alpha_N} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(t_i) \right]$$

نشق الدالة  $f(t)$  بالنسبة لـ  $\alpha_N$ :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_N} f(t) = \sum_{i=1}^n t^{\alpha_N} (\ln(t))^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n t^{\alpha_N} \ln(t))^2}{(\sum_{i=1}^n t^{\alpha_N})^2} + \frac{1}{\alpha_N^2}$$

$$\alpha_{N_{New}} = \alpha_{N_{Old}} + \Delta \alpha_{N_{Old}}$$

حيث

$$\Delta \alpha_{N_{Old}} = - \frac{f(t)}{\frac{\partial}{\partial \alpha_N} f(t)}$$

نكرر العملية حتى نحصل على فرق التقدير أقل من 0.001.

### التطبيق العملي:

شهدت نهاية 2019 حدثاً تاريخياً شكل منعطفاً كبيراً في تاريخ الإنسانية جمعاء، فظهور كوفيد-19 الفايروس التاجي بمدينة ووهان الصينية كان الحدث الأبرز الذي أدى إلى آثار كبيرة ليس بخطورته على صحة الانسان فحسب بل أيضاً على المستوى الاقتصادي والاجتماعي والسياسي، في هذا البحث قمنا بتطبيق توزيع وايبل النيتروسوفيكي على قاعدة بيانات تضم أزمنة حضانة فايروس كورونا لعينة حجمها 48 شخص تم الحصول عليها من المصدر [7]، يبين الجدول (1) أزمنة حضانة فايروس كورونا (covid-19) لـ 48 شخص. حيث أن أزمنة حضانة فايروس كورونا تمثل فترة بين الإصابة بالفيروس

وبداية ظهور أعراض المرض، لذا تعتبر فترات حضانة الأمراض المعدية فترة ذات أهمية مباشرة للوقاية والسيطرة على المرض، طبيياً، يتراوح زمن الحضانة لفيروس كورونا المستجد (COVID-19) بين 2 إلى 14 يوماً، ولكن الفترة الأكثر شيوعاً هي حوالي 5 إلى 6 أيام. فالنماذج الرياضية تساعدنا بشكل أفضل على فهم كيفية انتشار المرض. نلاحظ من الجدول (1) أن طبيعة البيانات مجالية غير محددة، مما يدفعنا لاختبار النموذج الملائم لبيانات غير محددة في ظل منطق النيتروسوفيك.

الجدول (1): أزمدة حضانة فايروس كورونا مقدره بالأيام

أزمدة حضانة فايروس كورونا			
(7.82, 8.37)	(8.24, 9.88)	(4.95, 5.40)	(7.55, 8.88)
(4.15, 5.89)	(6.87, 7.04)	(5.43, 6.52)	(4.79, 5.89)
(6.87, 7.55)	(5.52, 6.73)	(5.08, 6.93)	(6.62, 7.45)
(3.33, 4.67)	(4.90, 5.57)	(6.61, 7.10)	(3.92, 5.09)
(8.18, 9.24)	(6.62, 7.11)	(5.48, 6.62)	(4.18, 5.97)
(5.50, 7.18)	(9.96, 11.09)	(8.04, 9.44)	(7.37, 8.99)
(5.28, 6.65)	(9.99, 10.70)	(10.66, 11.68)	(8.27, 9.09)
(5.78, 5.12)	(5.43, 6.19)	(4.84, 6.16)	(4.38, 5.40)
(6.45, 7.39)	(6.33, 7.79)	(5.58, 6.02)	(2.21, 3.47)
(7.39, 8.25)	(6.21, 6.86)	(6.01, 7.31)	(6.30, 7.43)
(5.61, 6.64)	(5.82, 6.49)	(5.26, 5.81)	(3.23, 2.21)
(7.51, 8.01)	(4.34, 5.13)	(4.67, 5.23)	(4.31, 4.96)

## 1- اختبار ملائمة البيانات لتوزيع وايبل:

بدايةً تم فحص طبيعة البيانات والتحقق من مدى ملائمة نموذج توزيع وايبل النيتروسوفكي لبيانات أزمنة حضانة فايروس كورونا، تم ذلك من خلال استخدام اختبار كولموغورف-سيمرنوف لقياس مدى الملائمة، وباستخدام برمجية بايثون تم الحصول على النتائج في الجدول (2) والتي توضح أن قيمة  $p\text{-value}=0.89>0.05$  وهذا يدل على قبول بأن توزع البيانات ملائم لتوزيع وايبل.

الجدول (2): اختبار كولموغوراف-سيمرنوف لمطابقة توزيع وايبل مع أزمنة حضانة فايروس كورونا

اختبار كولموغوراف-سيمرنوف	قيمة الاختبار $D$	معنوية الاختبار $P\text{-value}$
أزمنة الحضانة	[0.062,0.14]	[0.65,0.89]

## 2- تقدير معالم نموذج توزيع وايبل النيتروسوفكي باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم والمربعات الصغرى:

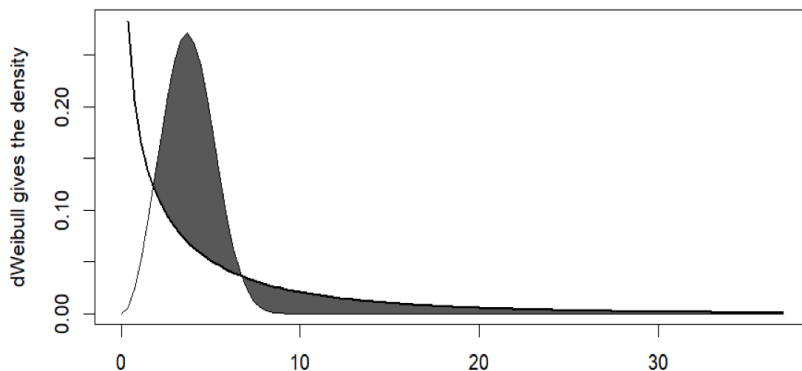
باستخدام العلاقات السابقة في تقدير معالم توزيع وايبل النيتروسوفكي وفق طريقتي المربعات الصغرى والإمكان الأعظم، تم استخدام برنامج بايثون للحصول على المقدرات الموضحة في الجدول (3).

الجدول (3): مقدرات المعالم النيتروسوفكية لتوزيع وايبل

طريقة التقدير	معلمة الشكل $\alpha_N$	معلمة القياس $\beta_N$
مقدرات الإمكان الأعظم	(1.92,2.23)	(4.70,6.32)
مقدرات المربعات الصغرى	(0.702,2.92)	(4.24,4.337)

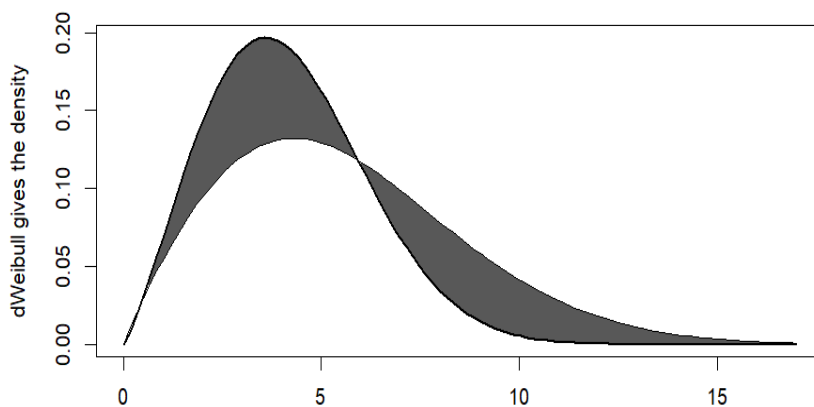
بناء على قيم المعالم تم رسم المخططات البيانية لتوزيع وايبل النيتروسوفكي الملائم لأزمة الحضانة، توضح الأشكال (5) و(6) نتائج التنبؤ لأزمة حضانة فايروس كورونا باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم والمربعات الصغرى لتوزيع وايبل النيتروسوفكي.

#### Weibull Distribution



الشكل (1): الرسم البياني لتوزيع وايبل وفق مقدرات المربعات الصغرى

#### Weibull Distribution



الشكل (1): الرسم البياني لتوزيع وايبل وفق مقدرات الإمكان الأعظم

### 3- تقييم دقة التقدير:

للمقارنة بين المربعات الصغرى والإمكان الأعظم نستخدم مقياس خطأ التنبؤ متوسط مربعات الخطأ MSE للبيانات النيتروسوفكية الموضح بالعلاقة:

$$NMSE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\widehat{x}_{N_i} - x_{N_i})^2$$

حيث  $m$  هو العدد الكلي من المشاهدات لأزمة الحضانة للفايروس و  $x_{N_i}$  هي القيمة المشاهدة النيتروسوفكية و  $\widehat{x}_{N_i}$  هي القيمة المتنبئ بها النيتروسوفكية، يوضح الجدول (4) نتائج  $NMSE$  التي تم الحصول عليها لطرائق التقدير:

الجدول (4): نتائج دقة التقدير لمعيار  $NMSE$

$NMSE$	طريقة التقدير
(0.0848,0.1104)	طريقة المربعات الصغرى
(0.0471,0.0554)	طريقة الإمكان الأعظم

بينت النتائج أن دقة التنبؤ بطريقة الإمكان الأعظم (لها قيمة  $NMSE$  أقل) أفضل من دقة التنبؤ باستخدام المربعات الصغرى، يظهر الجدول (4) قيم مقياس  $NMSE$  لكلا الطريقتين.

نستطيع من خلال هذا التطبيق تقدير دالتي الموثوقية والمخاطرة كما يلي:

#### 1. دالة الموثوقية:

لنفترض أن  $R_N(2) = e^{-\frac{2^{[1.92,2.23]}}{[4.70,6.32]}} = [0.35,0.55]$  هذا يعني أن هناك احتمالية 55% لعدم حدوث الفشل (ظهور الأعراض) قبل مرور يومين من التعرض للفيروس.



هذا يعني أن الأشخاص الذين يتعرضون للفيروس قد يظلون غير مصابين بالأعراض لفترة زمنية معينة بنسبة جيدة.

## 2. دالة المخاطرة:

إن دالة المخاطرة  $H_N(t) = \frac{\alpha N}{\beta N} t^{\alpha N - 1}$  لكل يوم توضح معدل حدوث الفشل (ظهور الأعراض) في يوم معين من التعرض للفيروس بنسبة التعرض للمرض. فلو كانت مثلاً 0.05 فهذا يشير إلى أن هناك احتمالية منخفضة نسبياً لظهور الأعراض في الأيام الأولى بعد التعرض للفيروس.

## النتائج والتوصيات:

- 1- تعريف توزيع وايبل وفق منطق النيتروسوفيك.
- 2- استنتاج الصيغ الرياضية لكل من دوال التوزيع والموثوقية والمخاطرة بالإضافة إلى استنتاج التوقع الرياضي والتباين والعزوم والالتواء والتفاح لتوزيع وايبل وفق متغيرات عشوائية نيتروسوفيك.
- 3- التطبيق على قاعدة بيانات حقيقة تمثل أزمنة حضانة فايروس كورونا وملائمة هذه الأزمنة لتوزيع وايبل النيتروسوفيك.
- 4- تم التوصل من خلال أمثلة وتطبيقات أن توزيع وايبل النيتروسوفيك هو تعميم لتوزيع وايبل الكلاسيكي كونه يدرس الأحداث العشوائية غير المحددة بدقة.
- 5- نوصي بتعريف توزيع وايبل وفق الفئة النيتروسوفيك.
- 6- نوصي بتوسيع مفاهيم توزيعات احتمالية أخرى ذات أهمية تطبيقية كبيرة وفق مفهوم النيتروسوفيك.

المراجع:

- 1- Mann, N. R., Schafer, R. E., and Singpurwalla, N. D., Methods for statistical analysis of reliability and life data, 1974, John Wiley and Sons, New York.
- 2- Engelhardt, M., "On simple estimation of the parameters of the Weibull or extreme-value distribution", Technometrics, Vol. 17, No. 3, August 1975.
- 3- Harter, H. L. and A. H. Moore, "Point and interval estimators based on order statistics, for the scale parameter of a Weibull population with known shape parameter", Technometrics, Vol. 7, No. 3, August 1965.
- 4- Stone, G. C. and G. Van Heeswijk, "Parameter estimation for the Weibull distribution , IEEE. Trans. On Elect Insul. VolEI-12, No-4, August, 1977.
- 5- F. Smarandache, Neutrosophical Statistics, Sitech & Education Publishing, Jaffrey, NH, USA, 2014.
- 6- Govindan K., Rmalingam S., Deivanayagampillai N., Broumi S., Jacob K., 2021, Markov chain based on neutrosophic numbers in decision making.
- 7- C. Cheng, D. Zhang, D. Dang et al., "e incubation period of COVID-19: a global meta-analysis of 53 studies and a Chinese observation study of 11 545 patients," Infectious Diseases of Poverty, vol. 10, no. 5, pp. 1–3, 2021.