استخدام التحويلات التكاملية الحجمية – السطحية لنقل معادلة هيلمهولتز التفاضلية المضاعفة من المرتبة الثالثة وغير المتجانسة إلى معادلة تكاملية – تفاضلية

حسام شقوف[1]

أ.د.منتجب الحسن 2

ملخص

في الكثير من الأحيان فإن تحويل مسألة قيم إبتدائية وحدية إلى مسألة معادلات تكاملية يمكن أن تقودنا إلى مسألة معادلات تكاملية، حلها أسهل من حل المسألة الأصلية [1,2]. من هذه الأمثلة تحويل معادلة هيلمهولتز التفاضلية الجزئية، المضاعفة من المرتبة الثاية يقودنا إلى معادلة تكاملية يكون حلها أسهل.

في البحث، سنحول معادلة هيلمهولتز التفاضلية المضاعفة من المرتبة الثالثة إلى معادلة تكاملية سطية، يمكن يكون حلها أسهل في معظم الأحيان من حل المعادلة الأصلية. وفي نهاية البحث سنعرض بعض المسائل للمناقشة.

[1] **طالب دكتوراه في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.**

[2] **أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.**

الكلمات المفتاحية: التحويلات التكاملية الحجمية السطحية – معادلة هيلمهولتز التفاضلية المضاعفة من المرتبة الثالثة.

Volume – Surface Integral Transforms in Changing the Double Nonhomogeneous Helmholtz Partial Differential Equation of Third Order into Integro-Differntial Equation

Husam Shkkouf[3]
Mountajab Al-Hasan[4]

Abstract

In ofen, changing initial- boundary value problem govarig certen phenomina into integral problem leds us to problem of integral equations of more simle solving [1,2]. For example, changing double Helmholtz partial differential equation of second order into integral equation may led to more simple problem for solving.

In paper, we transform the double Helmholtz partial differential equation of third order into surface integral equation. Finally, we end the paper by sujesting some problem for discussing.

[3] Ph.D Student at Department of Mathematics-Faculty of Sciences – Al-Baath University.
[4] Professor at Department of Mathematics-Faculty of Sciences – Al-Baath University.
Key Words: Valume – Surface Integral Transorms – BiHelmholtz Partial Differential Equation o Third Order.

1 . مقدمة :

في كثير من الأحيان من المفيد تحويل مسألة القيم الحدية والابتدائية التي تحكم ظاهرة فيزيائية معينة إلى مسألة معادلات تكاملية من النماذج المتعارف عليها (فريدهولم- فولتيرا....)، حيث المسألة الجديدة يمكن أن يكون حلها أسهل من المسألة الأصلية [1,2]. يمكن أن تكون تطبيقات نتائج هذا البحث جديرة بالإهتمام في ميكانيك الأوساط المادية القابلة للتشوه بشكل عام وفي ميكانيك الأجسام الدقيقة الاستقطاب (المرنة واللدنة) بشكل خاص. في الفترة 1965–2002 قام الباحث إغناتشاك بتحويل كل معادلة Helmholtz البسيطة ومعادلة Helmholtz المضاعفة من المرتبة الثانية والمتجانستين إلى معادلة تكاملية، كما أشار نفس الباحث إلى فكرة تحويل معادلة هيلمهولتز التفاضلية المضاعفة من المرتبة الثانية وغير المتجانسة إلى مسألة معادلة تكاملية غير متجانسة،الأمر الذي يسهل حل المسألة (انظر[2]). بعدها في عام 2016 تم تعميم ذلك إلى معادلة هيلمهولتز المضاعفة من المرتبة الثانية غير المتجانسة [3].

2 . هدف وأهمية البحث:

أولاً: هدف البحث: في البحث سنحول معادلة Helmholtz التفاضلية المضاعفة من المرتبة الثالثة وغير المتجانسة إلى معادلة تكاملية– تفاضلية،غير متجانسة.

ثانياً: أهمية البحث: في معظم الأحيان يمكن أن تقودنا ظاهرة فيزيائية إلى معادلة هيلمهولتز المضاعفة من المرتبة الثالثة غير المتجانسة وعندئذ من المفيد تحويلها إلى مسألة معادلة تكاملية–تفاضلية، غير متجانسة حلها أسهل (الصفائح الحديدية ، النحاسية ،التوتيائية، الصفائح المتراكبة...).

3 . طرق وأدوات البحث :

في البحث سنقوم باستنتاج التحويل التكاملي الحجمي السطحي المتعلق بعادلة Helmholtz التفاضلية المضاعفة من المرتبة الثالثة وغير المتجانسة، انطلاقاً من التحويلات التكاملية الحجمية–السطحية المتعلقة بـ، $\Delta, \Delta^2, \Delta^3$حيث Δ هو مؤثر لابلاس التفاضلي السلمي، كل ذلك في منطقة متعددة الترابط من المرتبة *n* (مثال: زر من درجة:$n-1$).

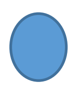
لهذا الغرض تلزمنا التعاريف والملاحظات التالية في الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\mathbb{R}^n, d)$ ، ذي *n* بعد حيث *d* هي المسافة الإقليدية المألوفة.

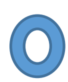
تعريف المنطقة متعددة الترابط من المرتبة *m* في الفضاء المتري الإقليدي المألوف $(\mathbb{R}^n, d)$:

نقول أن المجموعةالجزئية غير الخالية $A \subseteq \mathbb{R}^3$ تشكل منطقة متعددة الترابط من المرتبة m في $(\mathbb{R}^n, d)$ اذا وفقط إذا تحقق الشراطان التاليان :

1) A مفتوحة ومترابطة في $\mathbb{R}^n$،

2) أن تكتب جبهية A على الشكل $Fr(A) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ ، حيث المجموعات S_i مترابطة ومنفصلة مثنى مثنى.

مثال1: زر الدرجة الصفرية  هو منطقة بسية الترابط في $(\mathbb{R}^n, d)$

مثال2: زر الدرجة الأولى  هومنطقة ثنائية الترابط في $(\mathbb{R}^n, d)$

مثال3: زر الدرجة: $m-1$ ، حيث عدد الفراغات هو: $m-1$ ، هو منطقة متعددة الترابط من المرتبة m في $(\mathbb{R}^n,d)$.

مبرهنة غاوس: في منطقة متعددة الترابط من المرتبة m في الفضاء الإقليدي $(\mathbb{R}^n,d)$:

لتكن $\mathbf{V}$ منطقة متعددة الترابط من المرتبة m في الفضاء $(\mathbb{R}^n,d)$ ولنفرض أن : $Fr(A)=\bigcup_{i=1}^{m} S_i$ ، ولتكن أيضاً $\vec{F}$ دالة متجهية معرفة على $\bar{\mathbf{V}}$ (حيث: $\bar{\mathbf{V}}=\mathbf{V}\cup Fr(\mathbf{V})$) ومن الصف C^1 في $\mathbf{V}$ ومن الصف C^0 في $\bar{\mathbf{V}}$

عندئذ:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \sum_{i=1}^{m} \int_{S_i} \mathbf{F}.\mathbf{n}\, dS \tag{3.1}$$

حيث $\operatorname{div}\mathbf{F}$ هو تفرق الدالة المتجهية $\mathbf{F}$ في المنطقة متعددة الترابط $\mathbf{V}$ ، أما $\mathbf{n}$ هو متجه واحدة الناظم السطح S_i والموجه نحو خارج $\mathbf{V}$ ، $d\mathbf{V}$ هو عنصر حجم من $\mathbf{V}$ ، dS هو عنصر سطح من S_i.

فيمايلي سنقتصر على الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد $(\mathbb{R}^3,d)$ ،حيث تلزمنا المبرهنات الثلاث الهامة التالية المتعلقة بمطابقة Greem لأجل مؤثر لابلاس Δ وبمطابقة Greem لأجل مؤثر لابلاس المضاعف Δ^2 وبطابقة غرين لأجل مؤثر لابلاس المضاعّف Δ^3 ، كل ذلك في المنطقة $\mathbf{V}$ متعددة الترابط من المرتبة m في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد $(\mathbb{R}^3,d)$.

مبرهنة1 [1,2,3,4,5] : مطابقة غرين من أجل لابلاس Δ في المنطقة متعددة الترابط $\mathbf{V}$

لتكن U,V دالتان ملساوان بالقدر الكافي في $\bar{\mathbf{V}}$ عندئذ:

$$\int_{\mathbf{V}} d\,\mathbf{V}(U\,\Delta V\; - V\,\Delta U\,) = \int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} dS\,(U\,\frac{\partial V}{\partial U} - V\,\frac{\partial U}{\partial n}) \tag{3.2}$$

حيث: $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{grad}U\,).\,\mathbf{n}$.

البرهان:

يعتمد البرهان على تحويل التكامل الحجمي السابق إلى تكامل سطحي في المنطقة متعددة الترابط $\mathbf{V}$ مستخدمين في ذلك مبرهنة غاوس. لنلاحظ أن:

$$U\,\Delta V\; - V\,\Delta U\; = \mathbf{div}(U\,\mathbf{grad}V\; - V\;\mathbf{grad}U\,)$$

لأنه نعلم أن:

$$\mathbf{div}(f\;.\,\mathbf{g}) = f\;\mathbf{divg} + (\mathbf{grad}f\;)\,.\;\mathbf{g}$$

وبالتالي :

$$\mathbf{div}(U\,\mathbf{grad}V\; - V\;\mathbf{grad}U\,) = U\;\mathbf{divgrad}V\; + (\mathbf{grad}U\,).(\mathbf{grad}V\,)$$
$$- V\;\mathbf{divgrad}U\; - (\mathbf{grad}V\,).(\mathbf{grad}U\,)$$

وبماأن $\Delta = \mathbf{divgrad}$ يصبح لدينا:

$$U\,\Delta V - V\,\Delta U = \mathbf{div}(U\,\mathbf{grad}V - V\,\mathbf{grad}U)$$

وبالتالي إذا طبقنا مبرهنة غاوس في المنطقة متعددة الترابط من المرتبة m على العلاقة السابقة، نحصل مباشرة على المطلوب.

مبرهنة2 [1,2,3,4,5]: مطابقة غرين من أجل لابلاس المضاعّف Δ^2 :

إذا كانت لدينا الدالتان U,V، ملساوتان بالقدر الكافي في المنطقة متعددة الترابط $\mathbf{V}$ ، عندئذ تتحقق المتطابقة التكاملية:

$$\int_{\mathbf{V}}(U\,\Delta^2 V - V\,\Delta^2 U) = \int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} dS\,[(\Delta U)\frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} - V\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Delta U) + U\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Delta V) - (\Delta V)\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}] \tag{3.3}$$

البرهان:

لنلاحظ أن:

$$U\,\Delta^2 V - V\,\Delta^2 U = \mathbf{div}[(\Delta U)\,\mathbf{grad}V - V\,\mathbf{grad}(\Delta U) + U\,\mathbf{grad}(\Delta V) - (\Delta V)\,\mathbf{grad}U]$$

لأن:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{div}[(\Delta U)\,\mathbf{grad}V - V\,\mathbf{grad}(\Delta U) + U\,\mathbf{grad}(\Delta V) - (\Delta V)\mathbf{grad}\,U] = \\
&(\Delta U)\,\mathbf{div}\,\mathbf{grad}V + \mathbf{grad}(\Delta U)\,.\,\mathbf{grad}V - V\,\mathbf{div}\,\mathbf{grad}(\Delta U) - \mathbf{grad}V\,.\,\mathbf{grad}(\Delta U) \\
&+ U\,\mathbf{div}\,\mathbf{grad}(\Delta V) + \mathbf{grad}U\,.\,\mathbf{grad}(\Delta V) - (\Delta V)\,\mathbf{div}\,\mathbf{grad}U - \mathbf{grad}(\Delta V)\,.\,\mathbf{grad}U \\
&= U\,\Delta^2 V - V\,\Delta^2 U
\end{aligned}$$

وبالتالي بتطبيق مبرهنة غاوس على طرفي العلاقة السابقة، في المنطقة متعددة الترابط $\mathbf{V}$ نحصل على المطلوب.

4. النتائج والمناقشة:

بهدف الحصول على المطابقة التكاملية المتعلقة بمؤثر Helmholtz المضاعف من المرتبة الثالثة والتي بدورها ستكون نقطة البداية للحصول على التمثيل التماملي التفاضلي لهه المعادلة في المنطقة متعددة الترابط $\mathbf{V}$ يلزمنا صياغة واثبات المبرهنة التالية.

مبرهنة3: متطابقة غرين من أجل لابلاسيان المضاغف من المرتبة الثالثة Δ^3 :

إذا كانت U,V دالتان من الدرجة n ملساوتان بالقدر الكافي في المنطقة متعددة الترابط $\mathbf{V}$ ، عندئذًّ:

(4.1)

$$\int_{\mathbf{V}} dV\,(U\,\Delta^3 V - V\,\Delta^3 U) =$$
$$\int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} dS\,[U\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Delta^2 V) - V\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Delta^2 U) + (\Delta^2 U)\frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} - (\Delta^2 V)\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + (\Delta U)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Delta V) - (\Delta V)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Delta U)]$$

البرهان:

لنلاحظ أن :

(4.2)

$$U\,\Delta^3 V - V\,\Delta^3 U = \mathbf{div}[U\,\mathbf{grad}(\Delta^2 V) - V\,\mathbf{grad}(\Delta^2 U) +$$
$$+(\Delta^2 U)\,\mathbf{grad}V - (\Delta^2 V)\,\mathbf{grad}\,U + (\Delta U)\,\mathbf{grad}\,(\Delta V) - (\Delta V)\,\mathbf{grad}(\Delta U)$$

لأن :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{div}[U\,\mathbf{grad}(\Delta^2 V)-V\,\mathbf{grad}(\Delta^2 U)+(\Delta^2 U)\mathbf{grad}V-(\Delta^2 V)\mathbf{grad}U+\\
&+(\Delta U)\mathbf{grad}(\Delta V)-(\Delta V)\mathbf{grad}(\Delta U)]=\\
&U\,\mathbf{div}\,\mathbf{grad}(\Delta^2 V)+(\mathbf{grad}U).\mathbf{grad}(\Delta^2 V)\\
&-V\,\mathbf{div}\,\mathbf{grad}(\Delta^2 U)-(\mathbf{grad}V).\mathbf{grad}(\Delta^2 U)\\
&+(\Delta^2 U)\mathbf{div}\,\mathbf{grad}V+(\mathbf{grad}\,\Delta^2 U).\,\mathbf{grad}V\\
&-(\Delta^2 V)\,\mathbf{div}\,\mathbf{grad}U-(\mathbf{grad}\,\Delta^2 V).\,\mathbf{grad}U\\
&+(\Delta U)\,\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,(\Delta V)+(\mathbf{grad}\,\Delta U).(\mathbf{grad}\,\Delta V)\\
&-(\Delta V)\,\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,(\Delta U)-(\mathbf{grad}\,\Delta V)(\mathbf{grad}\,\Delta U)
\end{aligned}$$

وبما أن : $\mathbf{div}\,\mathbf{grad}=\Delta$ يصبح المقدار السابق، بعد الاختصار يصبح مساوياً لـ $U\,\Delta^3 V-V\,\Delta^3 U$.

الآن، بتطبيق مبرهنة غوص على طرفي العلاقة (4.2) في المنطقة معددة الترابط $\mathbf{V}$ ، نحصل مباشرةً على المتطابقة التكاملية (4.1).

أما **المبرهنة الرابعة** فهي تعطينا مطابقة غرين لأجل مؤثر هيلمهولتز المضعف من المرتبة الثالثة:

مبرهنة 4: متطابقة غرين التكاملية من أجل مؤثر Helmholtz المضاعفمن المرتبة الثالثة $\square^2_{\mu_3}\square^2_{\mu_2}\square^2_{\mu_1}\square$:

ليكن $U\,,V$ دالتان ملساوان بالقدر الكافي في المنطقة $\mathbf{V}$ متعددة الترابط من المرتبة m في الفضاء $\square^3$ والتي جبهيتها: $Fr(A)=\bigcup_{i=1}^{m}S_i$ ، ولتكن μ_1,μ_2,μ_3 ثلاثة أعداد

عقدية لا على التعيين ولنضع: $\Box^2_{\mu_i} = \Delta + \mu_i^2$ حيث $i = 1,2,3$، عندئذ لأجل مؤثر Helmholtz المضاعف من المرتبة الثالثة $\Box^2_{\mu_1}\Box^2_{\mu_2}\Box^2_{\mu_3}$ تتحقق المطابقة التكاملية التالية:

(4.3)

$$\int_{\mathbf{V}} (V\,\Box^2_{\mu_1}\Box^2_{\mu_2}\Box^2_{\mu_3}U - U\,\Box^2_{\mu_1}\Box^2_{\mu_2}\Box^2_{\mu_3}V)\,d\,\mathbf{V}(\mathbf{x}) =$$

$$= \int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} \{ V \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\Box^4 U - U \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\Box^4 V + (\Box^4 V)\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$$

$$- (\Box^4 U)\frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} + (\Delta V)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Delta U) - (\Delta U)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Delta V) +$$

$$+ [\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_3^2(\mu_1^2 + \mu_2^2)]\,(V \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} - U\frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}}\}\,dS(\mathbf{x})$$

حيث : $\Box^4 = \Delta^2 + (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)\Delta = \Delta(\Delta + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)$.

البرهان : إن الطرف الأيسر للعلاقة (4.3) يكتب بالشكل:

(4.4)

$$\int_{\mathbf{V}} (V\,\Box^2_{\mu_1}\Box^2_{\mu_2}\Box^2_{\mu_3}U - U\,\Box^2_{\mu_1}\Box^2_{\mu_2}\Box^2_{\mu_3}V)\,d\,\mathbf{V}(\mathbf{x}) =$$

$$\int_{\mathbf{V}} (V\,\Delta^3 U - U\,\Delta^3 V)\,d\,\mathbf{V}(\mathbf{x}) + (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)\int_{\mathbf{V}} (V\,\Delta^2 U - U\,\Delta^2 V)\,d\,\mathbf{V}(\mathbf{x}) +$$

$$+ (\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_1^2\mu_3^2 + \mu_2^2\mu_3^2)\int_{\mathbf{V}} (V\,\Delta U - U\,\Delta V)\,d\,\mathbf{V}(\mathbf{x})$$

إذا عوضنا (3.2) و (3.2) و(4.1) من المبرهنات السابقة في العلاقة الأخيرة (4.4) نحصل بعد التبسيط مباشرة على العلاقة(4.3).

ومنه **المبرهنة الهامة التالية:**

مبرهنة 5:

لتكن U دالة ملساء بالقدر الكافي في المنطقة $\mathbf{V}$ متعددة الترابط من المرتبة m ذات الحدود $Fr(\mathbf{V})=\bigcup_{i=1}^{m} S_i$

ولنعتبر في $\mathbf{V}$ معادلة Helmholtz المضاعفة من المرتبة الثالثة:

$$\square^2_{\mu_1}\square^2_{\mu_2}\square^2_{\mu_3}U=-A \qquad (4.5)$$

حيث U هي التابع المجهول و A تابع معطى. عندئذ تؤول المعادلة التفاضلية الجزئية السابقة إلى المعادلة التكاملية التفاضلية التالية:

$$\begin{aligned}U(\xi)&=\int_{\mathbf{V}} G\,A\,d\,\mathbf{V}(\mathbf{x})+M_1\int_S dS(\mathbf{x})\Big[\frac{e^{i\mu_1 R}}{R}\frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{n}}-L_1\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{i\mu_1 R}}{R}\Big)\Big]\\&-M_2\int_S dS(\mathbf{x})\Big[\frac{e^{i\mu_2 R}}{R}\frac{\partial L_2}{\partial n}-L_2\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{i\mu_2 R}}{R}\Big)\Big]+M_3\int_S dS(\mathbf{x})\Big[\frac{e^{i\mu_3 R}}{R}\frac{\partial L_3}{\partial n}-L_3\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{i\mu_3 R}}{R}\Big)\Big]\end{aligned} \qquad (4.6)$$

حيث المؤثرات:

$$\begin{aligned}\square^2_{\mu_2}\square^2_{\mu_3}U&=L_1\\ \square^2_{\mu_1}\square^2_{\mu_3}U&=L_2\\ \square^2_{\mu_1}\square^2_{\mu_2}U&=L_3\end{aligned} \qquad (4.7)$$

وحيث الثوابت:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\frac{1}{(\mu_1^2-\mu_2^2)(\mu_1^2-\mu_3^2)}=M_1\\
&\frac{1}{4\pi}\frac{1}{(\mu_1^2-\mu_2^2)(\mu_2^2-\mu_3^2)}=M_2\\
&\frac{1}{4\pi}\frac{1}{(\mu_1^2-\mu_3^2)(\mu_2^2-\mu_3^2)}=M_3
\end{aligned}\tag{4.8}$$

حيث G هي دالة غرين المتعلقة بالمعادلة:

$$\square^2_{\mu_1}\,\square^2_{\mu_2}\,\square^2_{\mu_3}G=-\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\tag{4.9}$$

حيث $\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$ هو توزيع ديراك الثلاثي فوق $\square^3$ وهو يعطى بالعلاقة:

$$\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})=\delta(x_1-\xi_1).\delta(x_2-\xi_2).\delta(x_3-\xi_3)\ ,\tag{4.10}$$

حيث: $\delta(x_i-\xi_i)\ ,\ (\mathrm{i}=1,2,3)$ هو توزيع ديراك على □

$$\boldsymbol{\xi}\equiv(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbf{V},\mathbf{x}\equiv(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{V}\tag{4.11}$$

وأخيراً تعطى $G=G(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ بالعلاقة :

$$\begin{aligned}
&G=M_1\frac{e^{i\mu_1R}}{R}-M_2\frac{e^{i\mu_2R}}{R}+M_3\frac{e^{i\mu_3R}}{R}\ ;\\
&R=\left|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\right|,
\end{aligned}\tag{4.12}$$

$$G=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}M_j\,\frac{e^{i\mu_jR}}{R}\tag{4.13}$$

البرهان:

نعتبر في $\mathbf{V}$ معادلتي هيلمهولتز المضاعفتين من المرتبة الثالثة (4.5) و(4.9).

باستخدام المبرهنة السابقة حيث: $V=G\ ,\ U=U$ ، نجد:

(4.14)

$$\int_{\mathbf{V}} (G\,\Box_{\mu_1}^{2}\Box_{\mu_2}^{2}\Box_{\mu_3}^{2}U - U\,\Box_{\mu_1}^{2}\Box_{\mu_2}^{2}\Box_{\mu_3}^{2}G)\, d\mathbf{V}(\mathbf{x}) =$$

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} \{G\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\Box^{4}U - U\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\Box^{4}G + (\Box^{4}G)\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$$

$$-\ (\Box^{4}U)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} + (\Delta G)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Delta U) - (\Delta U)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Delta G) +$$

$$+\ [\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_3^2(\mu_1^2+\mu_2^2)](G\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} - U\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\}\ dS(\mathbf{x})$$

بالتالي نحصل على:

(4.15)

$$\int_{\mathbf{V}} [-G\,A + U(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})]\,d\,\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} dS(\mathbf{x})\{\ [\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}M_j\frac{e^{i\mu_j R}}{R}]\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\Box^{4}U$$

$$-U\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\Box^{4}[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}M_j\frac{e^{i\mu_j R}}{R}] + (\Box^{4}[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}M_j\frac{e^{i\mu_j R}}{R}])\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$$

$$-\ (\Box^{4}U)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}M_j\frac{e^{i\mu_j R}}{R}] + (\Delta[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}M_j\frac{e^{i\mu_j R}}{R}])\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Delta U)$$

$$-(\Delta U)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Delta[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}M_j\frac{e^{i\mu_j R}}{R}]) +$$

$$+[\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_3^2(\mu_1^2+\mu_2^2)]([\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}M_j\frac{e^{i\mu_j R}}{R}]\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} - U\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}M_j\frac{e^{i\mu_j R}}{R}])\ \}$$

وبما أن:

$$\int_{\mathbf{V}} U(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\xi)d\mathbf{V}(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) \ , \tag{4.16}$$

(4.17)

$$\square^4[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} M_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}] = [\Delta^2 + (\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2)\Delta][\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} M_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}]$$
$$= [\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} N_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}] \ ;$$

حيث:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_1^4-(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2)\mu_1^2}{(\mu_1^2-\mu_2^2)(\mu_1^2-\mu_3^2)} &= N_1 \\
\frac{\mu_2^4-(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2)\mu_2^2}{(\mu_1^2-\mu_2^2)(\mu_2^2-\mu_3^2)} &= N_2 \\
\frac{\mu_3^4-(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2)\mu_3^2}{(\mu_1^2-\mu_3^2)(\mu_2^2-\mu_3^2)} &= N_3
\end{aligned} \tag{4.18}$$

حيث تأخذ (4.17) الشكل الأبسط التالي:

(4.19)

$$\square^4[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} M_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}] = -[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} Q_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}] \ ;$$

حيث :

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_3^2)}{(\mu_1^2-\mu_2^2)(\mu_1^2-\mu_3^2)} &= Q_1 \\
\frac{\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)}{(\mu_1^2-\mu_2^2)(\mu_2^2-\mu_3^2)} &= Q_2 \\
\frac{\mu_3^2(\mu_1^2+\mu_2^2)}{(\mu_1^2-\mu_3^2)(\mu_2^2-\mu_3^2)} &= Q_3
\end{aligned} \tag{4.20}$$

وهنا نشير أنه عند استنتاج العلاقة السابقة (4.19) استخدمنا العلاقات التوزيعية:

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(\frac{e^{i\mu_j R}}{R}\right) = \Delta\left(\frac{1}{R}\right) - \mu_j^2\,\frac{e^{i\mu_j R}}{R}\ , \\
&\Delta\left[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} M_j\,\frac{e^{i\mu_j R}}{R}\right] = -\left[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}\mu_j^2 M_j\,\frac{e^{i\mu_j R}}{R}\right]\ ;
\end{aligned} \tag{4.21}$$

كما نشير إلى أنه عند استنتاج (4.17) و(4.17) والعلاقات السابقة، استخدمنا العلاقات التالية بين الجذور:

$$\frac{1}{(\mu_1^2-\mu_2^2)(\mu_1^2-\mu_3^2)} - \frac{1}{(\mu_1^2-\mu_2^2)(\mu_2^2-\mu_3^2)} + \frac{1}{(\mu_1^2-\mu_3^2)(\mu_2^2-\mu_3^2)} = 0$$

من المعادلات : (4.15) و(4.16) و(4.19) نحصل على:

(4.22)

$$U(\xi) = \int_{\mathbf{V}} GA\,d\,\mathbf{V}(\mathbf{x}) + \int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} dS(\mathbf{x})\{[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} M_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}]\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Box^4 U)$$

$$+ U\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} Q_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}] - [\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} M_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}]\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$$

$$-(\Box^4 U)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} M_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}] - [\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} \mu_i^2 M_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}]\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\Delta U)$$

$$+(\Delta U)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} \mu_i^2 M_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}] + [\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_3^2(\mu_1^2+\mu_2^2)]([\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} M_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}]\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$$

$$- U\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} M_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}]) \;;$$

والتي بعد التبسيط تأخذ الشكل:

(4.23)

$$U(\xi) = \int_{\mathbf{V}} GA\,d\,\mathbf{V}(\mathbf{x}) + \int_{\bigcup_{i=1}^{m} S_i} dS(\mathbf{x})\{[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} M_j \frac{e^{i\mu_j R}}{R}]\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} H_j - [\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1} H_j M_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\frac{e^{i\mu_j R}}{R}]\}$$

حيث:

(4.24)

$$\{\Box^4 U - \mu_1^2(\mu_2^2+\mu_3^2)U - \mu_1^2\Delta U + [\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_3^2(\mu_1^2+\mu_2^2)]U\} = H_1$$

$$\{\Box^4 U - \mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)U - \mu_2^2\Delta U + [\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_3^2(\mu_1^2+\mu_2^2)]U\} = H_2$$

$$\{\Box^4 U - \mu_3^2(\mu_1^2+\mu_2^2)U - \mu_3^2\Delta U + [\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_3^2(\mu_1^2+\mu_2^2)U]\} = H_3$$

وبعد سلسلة من العمليات الحسابية المعقدة والتبسيط والاختصار يمكن بسهولة الوصول إلى العلاقات الثلاث الآتية:

$$\begin{aligned} H_1 &= L_1 \\ H_2 &= L_2 \\ H_3 &= L_3 \end{aligned} \tag{4.25}$$

وبتعويض العلاقات الثلاث السابقة بصيغة $U(\xi)$ الأخيرة نحصل على:

$$U(\xi)=\int_{\mathbf{V}} GAd\mathbf{V}(\mathbf{x})+\int_{\bigcup_{i=1}^{m}S_i} dS(\mathbf{x})\{[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}M_j\frac{e^{i\mu_jR}}{R}]\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}L_j-[\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}L_jM_j\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\frac{e^{i\mu_jR}}{R})]\} \tag{4.26}$$

نتيجة: لتكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية التالية:

$$\begin{aligned}
&\square_{\mu_2}^{2}\,\square_{\mu_3}^{2}U=A_{11}U+A_{12}V+A_{13}W\,,\\
&\square_{\mu_1}^{2}\,\square_{\mu_2}^{2}U=A_{21}U+A_{22}V+A_{23}W\,,\\
&\square_{\mu_1}^{2}\,\square_{\mu_3}^{2}U=A_{31}U+A_{32}V+A_{33}W\,,\\
&\square_{\mu_2}^{2}\,\square_{\mu_3}^{2}V=B_{11}U+B_{12}V+B_{13}W\,,\\
&\square_{\mu_1}^{2}\,\square_{\mu_2}^{2}V=B_{21}U+B_{22}V+B_{23}W\,,\\
&\square_{\mu_1}^{2}\,\square_{\mu_3}^{2}V=B_{31}U+B_{32}V+B_{33}W\,,\\
&\square_{\mu_2}^{2}\,\square_{\mu_3}^{2}W=C_{11}U+C_{12}V+C_{13}W\,,\\
&\square_{\mu_1}^{2}\,\square_{\mu_2}^{2}W=C_{21}U+C_{22}V+C_{23}W\,,\\
&\square_{\mu_1}^{2}\,\square_{\mu_3}^{2}W=C_{31}U+C_{32}V+C_{33}W\,,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

حيث:

$$\mathrm{A}=\left[\mathrm{A}_{ij}\right]_{3\times 3}\,,\quad \mathrm{B}=\left[\mathrm{B}_{ij}\right]_{3\times 3}\,,\quad \mathrm{C}=\left[\mathrm{C}_{ij}\right]_{3\times 3}\,, \tag{4.28}$$

ثلاثة مصفوفات أعداد معلومة. إضافة إلى ماتقدم ذكره لنفرض أيضاً أن الأنظمة الثلاثة السابقة (4.27)، تملك الشكل المستقل المشترك التالي:

$$\begin{aligned} &\square_{\mu_1}^{2}\,\square_{\mu_2}^{2}\,\square_{\mu_3}^{2}\,U=-L\,,\\ &\square_{\mu_1}^{2}\,\square_{\mu_2}^{2}\,\square_{\mu_3}^{2}\,V=-M\,,\\ &\square_{\mu_1}^{2}\,\square_{\mu_2}^{2}\,\square_{\mu_3}^{2}\,W=-N\,, \end{aligned} \tag{4.29}$$

حيث الدوال $L\,,M\,,N$ معلومة و الدوال $U\,,V\,,W$ مجهولة كل ذلك في المنطقة $\mathbf{V}$ متعددة الترابط من المرتبة m ذات الحدود $S=\mathrm{Fr}(\mathbf{V})=\bigcup_{i=1}^{m}S_i$. عندئذ تمتلك الدوال المجهولة السابقة التمثيلات التكاملية التالية:

(4.30)

$$\begin{aligned} U(\xi)=&\int_{\mathbf{V}} GL\,d\mathbf{V}(\mathbf{x})+\{M_1\int_S dS(\mathbf{x})[\frac{e^{i\mu_1 R}}{R}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\mathrm{A}_{11}U+\mathrm{A}_{12}V+\mathrm{A}_{13}W)\\ &-(\mathrm{A}_{11}U+\mathrm{A}_{12}V+\mathrm{A}_{13}W)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\frac{e^{i\mu_1 R}}{R})]\\ &-M_2\int_S dS(\mathbf{x})[\frac{e^{i\mu_2 R}}{R}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\mathrm{A}_{31}U+\mathrm{A}_{32}V+\mathrm{A}_{33}W)-(\mathrm{A}_{31}U+\mathrm{A}_{32}V+\mathrm{A}_{33}W)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\frac{e^{i\mu_2 R}}{R})]+\\ &M_3\int_S dS(\mathbf{x})[\frac{e^{i\mu_3 R}}{R}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\mathrm{A}_{21}U+\mathrm{A}_{22}V+\mathrm{A}_{23}W)-(\mathrm{A}_{21}U+\mathrm{A}_{22}V+\mathrm{A}_{23}W)\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\frac{e^{i\mu_3 R}}{R})]\}\,, \end{aligned}$$

(4.31)

$$V(\xi)=\int_{\mathbf{V}} G\,M\,d\mathbf{V}(\mathbf{x})+\{M_1\int_S dS(\mathbf{x})[\frac{e^{i\mu_1 R}}{R}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\mathrm{B}_{11}U+\mathrm{B}_{12}V+\mathrm{B}_{13}W)$$
$$-(\mathrm{B}_{11}U+\mathrm{B}_{12}V+\mathrm{B}_{13}W)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\frac{e^{i\mu_1 R}}{R})]$$
$$-M_2\int_S dS(\mathbf{x})[\frac{e^{i\mu_2 R}}{R}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\mathrm{B}_{31}U+\mathrm{B}_{32}V+\mathrm{B}_{33}W)-(\mathrm{B}_{31}U+\mathrm{B}_{32}V+\mathrm{B}_{33}W)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\frac{e^{i\mu_2 R}}{R})]+$$
$$M_3\int_S dS(\mathbf{x})[\frac{e^{i\mu_3 R}}{R}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\mathrm{B}_{21}U+\mathrm{B}_{22}V+\mathrm{B}_{23}W)-(\mathrm{B}_{21}U+\mathrm{B}_{22}V+\mathrm{B}_{23}W)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\frac{e^{i\mu_3 R}}{R})]\},$$

(4.32)

$$W(\xi)=\int_{\mathbf{V}} G\,N\,d\mathbf{V}(\mathbf{x})+\{M_1\int_S dS(\mathbf{x})[\frac{e^{i\mu_1 R}}{R}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\mathrm{C}_{11}U+\mathrm{C}_{12}V+\mathrm{C}_{13}W)$$
$$-(\mathrm{C}_{11}U+\mathrm{C}_{12}V+\mathrm{C}_{13}W)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\frac{e^{i\mu_1 R}}{R})]$$
$$-M_2\int_S dS(\mathbf{x})[\frac{e^{i\mu_2 R}}{R}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\mathrm{C}_{31}U+\mathrm{C}_{32}V+\mathrm{C}_{33}W)-(\mathrm{C}_{31}U+\mathrm{C}_{32}V+\mathrm{C}_{33}W)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\frac{e^{i\mu_2 R}}{R})]+$$
$$M_3\int_S dS(\mathbf{x})[\frac{e^{i\mu_3 R}}{R}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\mathrm{C}_{21}U+\mathrm{C}_{22}V+\mathrm{C}_{23}W)-(\mathrm{C}_{21}U+\mathrm{C}_{22}V+\mathrm{C}_{23}W)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\frac{e^{i\mu_3 R}}{R})]\}$$

5 .النتائج والتوصيات:

أولاً: النتائج:

تم صياغة وإثبات خمسة مبرهنات ثلاثة منها مساعدة واثنتان أساسية،على النحو التالي: في الأولى والثانية (المساعدتين) تم صياغة وبرهان مطابقة غرين لأجل لابلاس البسيط Δ ولابلاس المضاعف من المرتبة الثانية Δ^2 $[4,5]$.

في البحث تم صياغة وبرهان المبرهنة الثالثة حيث تم فيها إثبات مطابقة غرين من أجل لابلاس المضاعف من المرتبة الثالثة Δ^3 ، أما في المبرهنة الرابعة تم إثبات مطابقة غرين من أجل مؤثر هيلمهولتز التفاضلي الجزئي المضاعف من المرتبة الثالثة، وفي المبرهنة الأخيرة وباستخدام ماسبق تم إعطاء الصيغة التكاملية المكافئة لمعادلة Helmholtz المضاعفة من المرتبة الثالثة وغير المتجانسة.كل ماتقدم ذكرة تم إثباتة على منطقة متعددة الترابط من المرتبة m .

ثانياً: التوصيات:

إن النتائج السابقة تفتح أمامنا أفق مناقشة المسألتين التالتين المتعلقتين بشروط سومر فيلد المقاربية والتمثيلات التكاملية الموافقة لها:

المسألة الأولى: مناقشة الشروط المقاربية والتمثيلات التكاملية الموافقة من أجل جسم مرن دقيق الإستقطاب وترموديناميكي وغير مركزي التناظر وذي سبع ثوابت مادية وبوجود حمول ترموديناميكية متغيرة توافقياً مع الزمن.

المسألة الثانية : إعادة ماتقدم ذكره لأجل جسم مرن دقيق الإستقطاب وغير مركزي التناظر، وأعقد؛ بثابت إضافي أي يصبح عدد الثوابت ثمانية بوجود حمول ترموديناميكية متغيرة توافقياً مع الزمن.

المسألة الثالثة : إعادة ماتقدم ذكرة لأجل مائع الترموديناميكي دقيق الإستقطاب من نوع (إيرينغن)، بوجود وبعدم وجود حمول ترموديناميكية.

6.Referencrs

[1] – **Taleb Gareeba , Mountajab Al−Hasan , and Rasha Tulemat** , **2009** – using volume−surface transforms for translating the differential equations of elastic body into integral equations , Journal of Al−Baath University,Vol.31, Nr.20, p.175−192.

[2] –**Mohammad , K & Al −Hasan , M, 2011** – An integral – partial mathematical model of elastic body in the frame of linear dynamic thermoelasticity, Journal of Al−Baath University,Vol.33, Nr.25, p.119−148.

[3] – **Mountajab Al−Hasan and Husam Shakkouf** , **2016** – The Sommerfeld asymptotic conditions for displacements in Hooke elastic body with no vanishing body loads harmonically varying in time , Journal of Al−Baath University,Vol.38, Nr.4, p. 11−24.

[4] – **Mountajab Al−Hasan and Husam Shakkouf** , **2020** – The Sommerfeld asymptotic conditions for Nowacki's potentials corresponding to the solution for the Koiter−Mindlin elastic body

with no vanishing body loads harmonically varying in time, Journal of Al-Baath University,Vol.42, Nr.15, p. 129-150.

[5] – Mountajab Al-Hasan and Husam Shakkouf , 2021 – The radiation conditions and the corresponding integral representation for the solution of the micropolar elastic body with no vanishing body loads and heat source harmonically varying in time , Journal of Al-Baath University,Vol.42, Nr.15, p. 33-62.