أسس المرونة الحرارية الدقيقة المعممة مركزية التناظر والنموذج الترموديناميكي الدقيق المعمم لها بزمن استراحة واحد وبالشكل التنسوري الصامد

غيث صالح[1] د. منتجب الحسن[2]

ملخص البحث:

يتعلق البحث بالنموذج الرياضي لجسم مرن غير متماثل المناحي (Anisotropic) ومتجانس (Homogeneous)، ومعتبر البنية الجزيئية ويعاني من انفعالات قوة مرنة وانفعالات عزم مرنة، صغيرتين، ضمن المرونة الخطية، التحريكية، الدقيقة، مركزية التناظر، المترابطة مع الحرارة المعممة، حيث الفرق بين درجة الحرارة المطلقة والطبيعية صغير، وقانون التوصيل الحراري هو قانون Maxwell (1867)، بدلاً من قانون Fourier في التوصيل الحراري، الأمر الذي يقود إلى توصل حراري من النمط الزائدي بسرعة موجية منتهية وزمن استرخاء واحد [1,2]. أن مثل هذا السلوك الترموديناميكي المعمم تمت مناقشته بالمعنى التقليدي من خلال الباحثين Lord و Shulman (1967) [3] ، حيث يُرمز لمثل هذا الجسم بالرمز (L–S). وبالمعنى الدقيق تمت مناقشته في [1,2] (1986–1992) من خلال الباحثين Kaliski و Nowacki لأجل الجسم الدقيق

[1] طالب دكتوراه في الرياضيات التطبيقية – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

[2] أستاذ في الرياضيات التطبيقية – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

مركزي التناظر، والمتجانس ومتماثل المناحي..في البحث، أولاً: سنستنتج الطاقة الحرة كتابع للانفعالات والحرارة المعممة، ومن ثم سنستنتج الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي للنموذج الرياضي للجسم الترموديناميكي المعمم الدقيق بزمن استرخاء واحد والمناقش رياضياً (لأجل حالة خاصة) من خلال الباحثين Kaliski وNowacki والذي نرمز له بالرمز (K–N). بعدها سنناقش الشكل التنسوري **الصامد،** للنموذج الرياضي العام للجسم المرن الدقيق (K–N) ، أخيراً سننهي البحث باقتراح عدد من المسائل للمناقشة.

الكلمات المفتاحية: المرونة الحرارية الدقيقة ومركزية التناظر، المعممة يرمن استرخاء واحد

The foundations of the generalized micropolar and centro-symmetric thermoelasticity with one relax time in the invariable tensorial form

Ghaith Saleh [†] **Prof.Dr. Mountajab Al-Hasan** [‡]

Abstruct

This paper concerns the mathematical linear model of generalized thermoelastic, homogeneous and anisotropic body, with microscopic structure and small elastic force and couple strains, subjected to generalized temperature field, in the frame of linear generalized coupled micropolar and centro-symmetric thermoelasticity that difference between the absolute and natural temperatures is small and the Maxwell hot conduction law (1867) is considerable instead of the classical Fourier one, which leads to hyperbolic heat conduction equation with finite wave speed and one relax time [1,2]. In classical sense ،such a generalized thermodynamical behavior was proposed firstly by Lord and Shulman (1967) [3], for which the body shortly called (L-S). For the homogeneous and isotropic case of the

[†] **PhD. Student at Department of Mathematics-Faculty of Science-Al-Baath University.**
[‡] **Professor in Applied Mathematics at Department of Mathematics-Faculty of Science-Al-Baath University..**

micropolar and centro-symmetric generalized thermoelasticity, was proposed by Kaliski and Nowacki [1986-1992] [1,2].

In paper, firs, we derive the general free energy as a functional of strains and generalized temperature, then in cartesian coordinate system ،we derive the tensorial mathematical model of the micropo-lar centro-symmetric generalized thermoelastic (K-N) body, which in special case was discussed by Kaliski and Nowacki [1,2]. Next, we derive the invariance tensorial form of the general case of the (K-N) micropolar and centro-symmetric body .Finally, we end the paper by proposing some problems for discussing.

Key Word: The Generalized Micropolar and Centrosymmetric Thermoelasticity with one Relaxion Time .

1. مقدمة:

تعنبر النظرية الكلاسيكية (الخطية) للمرونة الحرارية (Carlson,1972) نقطة البداية لنظريات أخرى معممة، تشمل: المرونة اللزجة الحرارية، والمرونة الحرارية مع انتشار، والمرونة الحرارية الكهرطيسية، والمرونة الحرارية بسرعات موجية منتهية. ظهرت نظرية المرونة المعممة بزمن استرخاء واحد بنتيجة إجراء تعديل على معادلة التوصيل الحراري، التقليدية، حيث اقترح هذا التعديل Maxwell (1867) في إطار نظرية الغازات، من ثم Cattaneo (1948) في إطار التوصيل الحراري في الجسم القاسي، من ثم العديد من الباحثين، أبرزهم Lord و Shulman (1967) [3] في إطار الجسم القابل للتشوه.

في [3] تمت مناقشة الأسس والنموذج الرياضي للجسم الترموديناميكي المعمم (L–S) بزمن استرخاء واجد، ذلك في النظام الاحداثي الديكارتي. في [1,2] (1992–1986)، تمت مناقشة الأسس وبعض معادلات النموذج الرياضي الترودينا ميكي المعمم ودقيق الاستقطاب ومركزي التناظر (K-N)، ذلك في الحالة الخاصة التي يكون فيها الجسم متجانس ومتماثل المناحي.

2. هدف وأهمية البحث:

يهدف البحث إلى استنتاج الشكل العام للطاقة الحرة كتابع للانفعالات والحرارة المعممة، ومن ثم استنتاج الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي للنموذج الرياضي الترموديناميكي المعمم بزمن استرخاء واحد للجسم المرن دقيق الاستقطاب ومركزي التناظر (K–N). كما يهدف إلى مناقشة الشكل التنسوري **الصامد**، للنموذج الرياضي الترموديناميكي المعمم بزمن استرخاء واحد للجسم المرن الدقيق (K–N) ، كل ذلك عندما يكون الجسم متجانس وغير متماثل المناحي (Anisotropic) (الحالة الأعم)، حيث يشغل الجسم في لحظة البدء، منطقة B بسيطة الترابط ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد.

أما أهمية البحث فتكمن بالآتي. النموذج الرياضي المعمم للجسم (K–N) هو الأقرب من حيث التمثيل ليصف بشكل أدق المواد الموجودة في الطبيعة (حديد، ألمنيوم، نحاس، ... الخ)، فضلاً عن ذلك فإن الشكل التنسوري الصامد لهذا النموذج، يمكننا من اسقاطه في ذلك النظام الاحداثي المنحني، الذي من جهة أولى يتناسب مع الحالة البدئية للجسم، ومن جهة أخرى يسهل فيه حل مسألة الجسم.

3. طرق لبحث:

سنعتمد تعميم الطريقة المستخدمة في [1,2] في استنتاج الطاقة الحرة للجسم المعتبر كتابع للانفعالات والحرارة المعممة وتعميم الطريقة المستخدمة في [3]، في استنتاج الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي للنموذج الرياضي الترموديناميكي المعمم بزمن استرخاء واحد للجسم المدروس المتجانس وغير متماثل المناحي. أخيراً سنعتمد تعميم الطريقة المستخدمة في [3,4,5,9,12,14,15] في إيجاد الشكل التنسوري الصامد للأسس والنموذج الرياضي للجسم الترموديناميكي المعمم دقيق الاستقطاب ومركزي التناظر (K–N) بزمن استرخاء واجد، حيث الجسم متجانس وغير متماثل المناحي ويشغل في لحظة البدء، منطقة B بسيطة الترابط ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3. لهذا الغرض نعرض فيمايلي تعريف الحالة الترموديناميكية المعممة للجسم الترموديناميكي المعمم، دقيق الاستقطاب ومركزي التناظر: (K–N)، وذلك بهدف استنتاج الطاقة الحرة المعممة لهذا الجسم الذي يشغل في لحظة البدء منطقة B بسيطة الترابط ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3.

 توصف هذه الحالة من خلال مجموعة المقاطع التنسورية:

سنفترض أن جميع الأدلة اللاتينية $i, j, k, \ldots$ تأخذ القيم $1, 2, 3$ ، وسنعتمد رموز Einstein في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3، ولتكن $O x_1 x_2 x_3$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة، ومباشرة، وعطالية، وقاعدتها هي $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. إن العملية الترموديناميكية المعممة الدقيقة المرنة، ومركزية التناظر للجسم (K–N)، توصف بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية $\{\mathbf{u}, \varphi, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \vartheta, \eta, \mathbf{q}\}$، حيث $\mathbf{u}, \varphi$ مقطعان متجهيان، مستقلان يمثلان فيزيائياً، على الترتيب، حقل الإزاحات، وحقل التوجهات، كما أن: $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}$ فهما مقطعان تنسوريان من المرتبة الثانية، وغير متناظران، وهما على الترتيب، حقل الانفعالات وحقل الانفعالات الدقيقة، و $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}$ مقطعان تنسوريان من المرتبة الثانية، وغير متناظران، وهما على الترتيب، حقل الاجهادات وحقل الاجهادات الدقيقة، كما أن $\vartheta = \theta - \theta_0$ ، حيث θ مقطع الحرارة المطلقة في الجسم وهو مقطع سلمي، و θ_0 درجة حرارة الحالة الطبيعية للجسم[3]، (مقدار قابت موجب)، أخيراً $\eta, \mathbf{q}$ ، على الترتيب هما مقطع الأنتروبية في الجسم وهو مقطع سلمي، ومقطع التدفق الحراري وهو مقطع متجهي. فإذا رمزنا بـ $A := [0, \infty[$ و بـ $A^+ :=]0, \infty[$، فيمكن أن تمثل الحقول السابقة في $A \times B$، في النظام الإحداثي الديكارتي $\mathbf{e}_i$، بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} = \hat{u}_i \mathbf{e}_i \ , \ \varphi = \hat{\varphi}_i \mathbf{e}_i \ , \ \mathbf{q} = \hat{q}_i \mathbf{e}_i \ , \\ &\boldsymbol{\gamma} = \hat{\gamma}_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \ , \ \boldsymbol{\kappa} = \hat{\kappa}_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \ , \\ &\boldsymbol{\sigma} = \hat{\sigma}_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \ , \ \boldsymbol{\mu} = \hat{\mu}_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \ , \end{aligned} \tag{3.1}$$

[3] الحالة الطبيعية للجسم الترموديناميكي المعمم الدقيق (K–N)، هي الحالة التي ينعدم فيها كلاً من مقطع الأنتروبية η والمقاطع التنسورية: $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}$ و $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}$ والمقطع المتجهي $\mathbf{q}$.

حيث المصفوفتان $\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i$ في الطرف الأيمن العلاقة الأولى والثانية في (3.1) تمثل، على الترتيب، مصفوفتي المركبات في القاعدة الديكارتية $\mathbf{e}_i$ ، لكل من مقطع الإزاحات $\mathbf{u}$ ومقطع التوجهات $\boldsymbol{\varphi}$ ، المصفوفاتان $\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}$ الموجودتان في الطرف الأيمن للعلاقتين الرابعة والخامسة في (3.1) فهما غير متناظرتان، وتمثلان، على الترتيب، مصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\boldsymbol{\gamma}$ ، ومصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\boldsymbol{\kappa}$ ، أخيراً المصفوفتان $\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}$ الموجودتان في الطرف الأيمن للعلاقتين السادسة والسابعة في (3.1) فهما غير متناظرتان، وتمثلان، على الترتيب، مصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\boldsymbol{\sigma}$ ومصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\boldsymbol{\mu}$. إن مجموعة المقاطع التنسورية السابقة مجهولة، ويقابلها المقاطع التنسورية، المعلومة التالية في $A \times B$ ؛ وهي: مقطعا القوة الحجمية والعزم الحجمي، المتجهيين:

$$\mathbf{X} = \hat{X}_i \, \mathbf{e}_i \, , \; \mathbf{Y} = \hat{Y}_i \, \mathbf{e}_i \tag{3.2}$$

ومقطع كمية الحرارة في الجسم والمتشكلة في وحدة الحجم ووحدة الزمن: r وهو مقطع سلمي.

من أجل متطلبات البحث، يلزمنا فيمايلي التعاريف والنتائج التالية حول كل من الطاقة الداخلية e والطاقة الحرة ψ لعنصر حجم لاغرانجي dV ، في اللحظة $t > 0$ [1,2,3] .

تعريف1: ندعو المقدار السلمي U ، المعطى بالعلاقة:

$$\dot{e} = \hat{\sigma}_{ji} \, \dot{\hat{\gamma}}_{ji} + \hat{\mu}_{ji} \, \dot{\hat{\kappa}}_{ji} - \hat{q}_{i,i} + r \tag{3.3}$$

ندعوه بالطاقة الداخلية لعنصر حجم لاغرانجي dV ، في اللحظة $t > 0$. في العلاقة (3.3)، النقطة تعني المشتق الجزئي الزمني الأول؛ $\dot{f} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial t}$ ، الفاصلة الدليلية تعني المشتق الجزئي بالنسبة لمتحولات الموضع؛ $f_{,i} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

تعريف2: ندعو المقدار السلمي ψ، المعطى بالعلاقة:

$$\psi = e - \eta\,\theta \tag{3.4}$$

ندعوه بالطاقة الحرة لعنصر حجم لاغرانجي dV ، في اللحظة $t > 0$.

نتيجة1: باشتقاق (3.4) جزئياً بالنبة للزمن ومن ثم يتعوض (.33) في العلاقة الناتجة، نجد:

$$\dot{\psi} = \hat{\sigma}_{ji}\,\dot{\hat{\gamma}}_{ji} + \hat{\mu}_{ji}\,\dot{\hat{\kappa}}_{ji} - \eta\,\dot{\theta} - \dot{\eta}\,\theta - \hat{q}_{i,i} + r \tag{3.5}$$

نتيجة2: في الحالة الترموديناميكية الدقيقة، إذا فرضنا أن المتحولات المستقلة للحالة الترموديناميكية الدقيقة هي الانفعالات: $\hat{\gamma}_{ij}$, $\hat{\kappa}_{ij}$ ، والحرارة المطلقة θ والمركبات الديكارتية: $\hat{q}_i$ لمتجه التدفق $\mathbf{q}$ ، بينما توابع الحالة الترموديناميكية الدقيقة هي: الإجهادات: $\hat{\sigma}_{ij}$, $\hat{\mu}_{ij}$ والأنتروبية η والطاقة الحرة ψ، بالتالي يكون:

$$\begin{aligned} &\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}(\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \theta, \hat{q}_i)\ ,\ \ \hat{\mu}_{ij} = \hat{\mu}_{ij}(\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \theta, \hat{q}_i)\ , \\ &\eta = \eta(\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \theta, \hat{q}_i)\ ,\ \ \psi = \psi(\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \theta, \hat{q}_i)\ ,\ \ e = e(\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \theta, \hat{q}_i) \end{aligned} \tag{3.6}$$

تسمى العلاقات السابقة بالعلاقات التأسيسية، المعممة.

كما تلزمنا مترجحة Clausius-Duhem المعممة (المبدأ الثاني في الترموديناميك المعمم) بشكلها المحلي التالي [1,2,3]:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \hat{q}_i}\right)_{\boldsymbol{\gamma}\,\boldsymbol{\kappa}\theta} \dot{\hat{q}}_i + \frac{\hat{q}_i\,\theta_{,i}}{\theta} \le 0 \tag{3.7}$$

حيث الرمز $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \hat{q}_i}\right)_{\boldsymbol{\gamma}\,\boldsymbol{\kappa}\theta}$ يعني اشتقاق ψ مع ثبات كل من: θ , $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\gamma}$.

كما يلزمنا قانون انحفاظ الأنتروبية، المعمم التالي، بشكله المحلي [1,2,3]:

$$\theta\,\dot{\eta} = -\hat{q}_{i,i} + r - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \hat{q}_i}\right)_{\gamma\,\kappa\theta} \dot{\hat{q}}_i \qquad (3.8)$$

يلزمنا أيضاً قانون Maxwell-Cattaneo التالي في التوصيل الحراري:

$$L\,\hat{q}_i = -\hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,j}\ , \qquad (3.9)$$

حيث L هو مؤثر المؤثر الاشتقاقي المعطى بالعلاقة:

$$L := 1 + t_0\,\partial/\partial t\ ;\ t_0 > 0 \qquad (3.10)$$

وهنا الثابت الموجب t_0 يدعى بزمن الاسترخاء، كما أن الرموز $\hat{k}_{ij}$ تدل عل المركبات الديكارتية لمقطع التوصيل الحراري **k**، وهي تحقق:

$$\hat{k}_{ij} = \hat{k}_{ji}\ ,\ \hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,i}\,\vartheta_{,j} > 0, \qquad (3.11)$$

ومن أجل متطلبات الفقرة القادمة، أيضاً تلزمنا، معادلات الحركة والعلاقات الهندسية التالية للجسم المعتبر الدقيق ومركزي التناظر (K-N)، والمحققة في $B \times A^{+}$ [2] :

$$\hat{\sigma}_{ji,j} + \hat{X}_i = \rho\,\ddot{\hat{u}}_i\ \ ,\ \ \epsilon_{ijk}\,\hat{\sigma}_{jk} + \hat{\mu}_{ji,j} + \hat{Y}_i = J\,\ddot{\hat{\varphi}}_i\ , \qquad (3.12)$$

$$\hat{\gamma}_{ji} = \hat{u}_{i,j} - \epsilon_{kji}\,\hat{\varphi}_k\ \ ,\ \ \hat{\kappa}_{ji} = \hat{\varphi}_{i,j}\ , \qquad (3.13)$$

حيث ϵ_{ijk} هو تنسور Levi-Chivit النسبي من المرتبة الثالثة، بالوزن $w = \frac{1}{2}$ [8]، ρ تمثل الكتلة الحجمية للجسم وهي تتبع للموضع، كما أن J تمثل العطالة الدورانية للجسم، وهي أيضاً تتبع للموضع.

إن العلاقات التأسيسية (3.6) يجب أن تتوافق مع كل من المتراجحة (3.7) ومع قانون انحفاظ الأنتروبية (3.8)، ومع قانون التوصيل الحراري المعمم (3.13) – (3.9).

4. النتائج والمناقشة:

1.4 . الطاقة الحرة المعممة بزمن استرخاء واحد كنابع لمتحولات الحالة الترموديناميكية الدقيقة: $\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \theta, \hat{q}_i$: نبدأ بالنتيجة التالية.

نتيجة1: ترتبط توابع الحالة الترموديناميكية الدقيقة: η , $\hat{\mu}_{ij}$, $\hat{\sigma}_{ij}$ مع الطاقة الحرة المعممة، الدقيقة: ψ بالعلاقات التأسيسية التالية:

$$\hat{\sigma}_{ji}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\gamma}_{ji}}\right)_{\mathbf{\kappa q}\theta} , \ \hat{\mu}_{ji}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\kappa}_{ji}}\right)_{\mathbf{\gamma q}\theta} , \ \eta=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_{\mathbf{\gamma\kappa}\theta} \qquad (4.1)$$

حيث الرمز $\left(\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\gamma}_{ji}}\right)_{\mathbf{\kappa q}\theta}$ يعني اشتقاق ψ مع ثبات كل من: $\mathbf{\kappa}, \mathbf{q}, \theta$ ، والرمز $\left(\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\kappa}_{ji}}\right)_{\mathbf{\gamma q}\theta}$ يعني اشتقاق ψ مع ثبات كل من: $\mathbf{\gamma}, \mathbf{q}, \theta$ ، أما الرمز $\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_{\mathbf{\gamma\kappa}\theta}$ فيعني اشتقاق ψ مع ثبات كل من: $\mathbf{\gamma}, \mathbf{\kappa}, \theta$.

البرهان: من العلاقة الرابعة في (3.6)، نجد أن:

$$\dot{\psi}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\gamma}_{ji}}\right)_{\mathbf{\kappa q}\theta}\dot{\hat{\gamma}}_{ji}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\kappa}_{ji}}\right)_{\mathbf{\gamma q}\theta}\dot{\hat{\kappa}}_{ji}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_{\mathbf{\gamma\kappa}\theta}\dot{\theta}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\hat{q}_i}\right)_{\mathbf{\gamma\kappa}\theta}\dot{\hat{q}}_i \qquad (4.2)$$

وينتج الآن من (3.5) و (3.8) و (4.2) أن:

$$0=\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\gamma}_{ji}}\right)_{\mathbf{\kappa q}\theta}-\hat{\sigma}_{ji}\right\}\dot{\hat{\gamma}}_{ji}+\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\kappa}_{ji}}\right)_{\mathbf{\gamma q}\theta}-\hat{\mu}_{ji}\right\}\dot{\hat{\kappa}}_{ji}+\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_{\mathbf{\gamma\kappa}\theta}+\eta\right\}\dot{\theta} \qquad (4.3)$$

إن الطرف الأيمن في (4.3) هو تركيب خطي بالمحولات المستقلة: $\dot{\theta}, \dot{\kappa}_{ji}, \dot{\gamma}_{ji}$. بالتالي (4.3) تتحقق إذا وفقط إذا تحققت العلاقات (4.1).

بنشر الطاقة الحرة المعممة الدقيقة $\psi(\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \theta, \hat{q}_i)$ في متسلسلة Tylor في جوار الحالة الطبيعية: $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})$ حيث الصفرين الأولين (في المركبة الأولى والثانية) يدلان عبى المقطع التنسوري الصفري، أما الصفر الأخير (في المركبة الأخيرة) يدل على المقطع المتجهي الصفري، فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned}
\psi(\hat{\gamma}_{ji}, \hat{\kappa}_{ji}, \theta, \hat{q}_i) &= \psi(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0}) + \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\gamma}_{ji}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \hat{\gamma}_{ji} + \\
&+ \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\kappa}_{ji}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \hat{\kappa}_{ji} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \vartheta + \frac{\partial \psi}{\partial \hat{q}_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \hat{q}_k + \\
&+ \frac{1}{2}\Bigg[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{\gamma}_{ji} \partial \hat{\gamma}_{k\ell}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \hat{\gamma}_{ji}\, \hat{\gamma}_{k\ell} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{\kappa}_{ji} \partial \hat{\kappa}_{k\ell}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \hat{\kappa}_{ji}\, \hat{\kappa}_{k\ell} + \\
&+ 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{\gamma}_{ji} \partial \hat{\kappa}_{k\ell}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \hat{\gamma}_{ji}\, \hat{\kappa}_{k\ell} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{\gamma}_{ji} \partial \theta}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \hat{\gamma}_{ji}\, \vartheta + \\
&+ 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{\kappa}_{ji} \partial \theta}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \hat{\kappa}_{ji}\, \vartheta + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{\gamma}_{ji} \partial \hat{q}_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \hat{\gamma}_{ji}\, \hat{q}_k + \\
&+ 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{\kappa}_{ji} \partial \hat{q}_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \hat{\kappa}_{ji}\, \hat{q}_k + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta\, \partial \hat{q}_k}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \vartheta\, \hat{q}_k + \\
&+ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \hat{q}_k \partial \hat{q}_\ell}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \hat{q}_k\, \hat{q}_\ell + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{0})\, \vartheta^2 \Bigg] + \cdots
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ينتج عن (4.1) أنه في الحالة الطبيعية $(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0})$ يكون:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\gamma}_{ji}}\right)_{\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}\theta}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0})=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\kappa}_{ji}}\right)_{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{q}\theta}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0})=$$
$$=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)_{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\kappa}\theta}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0})=0 \qquad (4.4)$$

في الحالة الطبيعية فإن: فإن كل من $\psi(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0})$ و $\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\gamma}_{ji}}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0})$ هو قيمة ثابتة، يمكن أن نفرضها معدومة، دون المساس بعمومية المسألة.

ينتج ذلك وعن (4.4) وعن الاكتفاء في المنشور السابق، بقوى الانفعالات والحرارة والتدفق الحراري، التي مجموعها لايزيد عن الـ 2 (الأمر الذي يتوافق مع الجسم المرن الدقيق ومركزي التناظر المعتبر، ذي الانفعالات الصغيرة جداً، ومع حالة كون $\left|(\theta-\theta_0)/\theta_0\right|\ll 1$)، أن المنشور السابق يأخذ الشكل التالي:

$$\psi(\hat{\gamma}_{ji},\hat{\kappa}_{ji},\theta,\hat{q}_i)=\frac{1}{2}\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa}\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\ \hat{\gamma}_{ji}\,\hat{\gamma}_{k\ell}+\frac{1}{2}\hat{c}^{\boldsymbol{\gamma}\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\ \hat{\kappa}_{ji}\,\hat{\kappa}_{k\ell}+$$
$$+\hat{b}^{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\kappa}:\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\ \hat{\gamma}_{ji}\,\hat{\kappa}_{k\ell}-\hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}_{ji}\ \hat{\gamma}_{ji}\,\vartheta-\hat{\zeta}^{\boldsymbol{\kappa}\theta:\boldsymbol{\gamma}\mathbf{q}}_{ji}\ \hat{\kappa}_{ji}\,\vartheta-\hat{\gamma}^{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{q}:\boldsymbol{\kappa}\theta}_{jik}\ \hat{\gamma}_{ji}\,\hat{q}_k \qquad (4.5)$$
$$-\hat{\varepsilon}^{\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}:\boldsymbol{\gamma}\theta}_{jik}\ \hat{\kappa}_{ji}\,\hat{q}_k-\hat{\rho}^{\theta\mathbf{q}:\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\kappa}}_{j}\ \vartheta\,\hat{q}_j+\frac{1}{2}\hat{d}^{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\kappa}\theta}_{ji}\ \hat{q}_j\,\hat{q}_i+\psi_0(\vartheta)$$

حيث: $\psi_0(\vartheta)$تابع لـ ϑ فقط ، و:

$$\hat{a}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\kappa}\theta\mathbf{q}} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\hat{\gamma}_{ji}\partial\hat{\gamma}_{k\ell}}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0}) \ , \ \hat{c}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma}\theta\mathbf{q}} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\hat{\kappa}_{ji}\partial\hat{\kappa}_{k\ell}}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0}) \ ,$$

$$\hat{d}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\kappa}\theta} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\hat{q}_j\partial\hat{q}_i}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0}) \ , \ \hat{b}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\kappa}:\theta\mathbf{q}} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\hat{\gamma}_{ji}\partial\hat{\kappa}_{k\ell}}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0}) \ ,$$

$$\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial\hat{\gamma}_{ji}\partial\theta}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0}) \ , \hat{\xi}_{ji}^{\boldsymbol{\kappa}\theta:\boldsymbol{\gamma}\mathbf{q}} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial\hat{\kappa}_{ji}\partial\theta}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0}), \quad (4.6)$$

$$\hat{\gamma}_{jik}^{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{q}:\boldsymbol{\kappa}\theta} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial\hat{\gamma}_{ji}\partial\hat{q}_k}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0}) \ , \hat{\varepsilon}_{jik}^{\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}:\boldsymbol{\gamma}\theta} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial\hat{\kappa}_{ji}\partial\hat{q}_k}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0}),$$

$$\hat{\rho}_j^{\theta\mathbf{q}:\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\,\partial\hat{q}_j}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0})$$

حيث المعاملات $\hat{a}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\kappa}\theta\mathbf{q}}$ محسوبة في ظروف إيزوتيرمية[4]، ثابتة الانفعال الدقيق $\boldsymbol{\kappa}$ ، وثابتة التدفق الحراري $\mathbf{q}$ ، المعاملات $\hat{c}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma}\theta\mathbf{q}}$ محسوبة في ظروف إيزوتيرمية، ثابتة الانفعال $\boldsymbol{\gamma}$ ، وثابتة التدفق الحراري $\mathbf{q}$ ، كذلك المعاملات $\hat{d}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\kappa}\theta}$ محسونة في ظروف إيزوتيرمية، ثابتة الانفعال $\boldsymbol{\gamma}$ وثابتة الانفعال الدقيق $\boldsymbol{\kappa}$ ، المعاملات $\hat{b}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\kappa}:\theta\mathbf{q}}$ محسوبة في ظروف إيزوتيرمية ثابتة التدفق $\mathbf{q}$ ، على مرحلتين؛ الأولى ثابتة الانفعال $\boldsymbol{\gamma}$ ، والثانية ثابتة الانفعال الدقيق $\boldsymbol{\kappa}$ ، المعاملات $\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}$ محسوبة في ظروف ثابتة التدفق $\mathbf{q}$ وثابتة الانفعال الدقيق $\boldsymbol{\kappa}$ ، وعلى مرحلتين؛ الأولى ثابتة الانفعال $\boldsymbol{\gamma}$ والثانية إيزوتيرمية، المعاملات $\hat{\xi}_{ji}^{\boldsymbol{\kappa}\theta:\boldsymbol{\gamma}\mathbf{q}}$ محسوبة في ظروف ثابتة التدفق $\mathbf{q}$ وثابتة الانفعال $\boldsymbol{\gamma}$ ، وعلى مرحلتين؛ الأولى ثابتة الانفعال الدقيق $\boldsymbol{\kappa}$ والثانية إيزوتيرمية، المعاملات $\hat{\gamma}_{jik}^{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{q}:\boldsymbol{\kappa}\theta}$ محسوبة في

[4] العملية الإيزوتيرمية (Isothermal Process) هي العملية التي تكون فيها: $\vartheta = 0$.

ظـروف إيزوتيرميـة ثابتـة الانفعـال الـدقيق $\boldsymbol{\kappa}$ ؛ وعلـى مـرحلتين؛ الأولـى ثابتـة الانفعـال $\boldsymbol{\gamma}$ ، والثانيـة ثابتـة التـدفق $\mathbf{q}$ ، المعـاملات $\hat{\varepsilon}_{jik}^{\boldsymbol{\kappa q:\gamma\theta}}$ محسـوبة فـي ظـروف إيزوتيرميـة ثابتـة الانفعـال $\boldsymbol{\gamma}$ ، وعلـى مـرحلتين؛ الأولـى ثابتـة الانفعـال الـدقيق $\boldsymbol{\kappa}$ ، والثانيـة، ثابتـة التـدفق $\mathbf{q}$ ، أخيراً المعاملات $\hat{\rho}_j^{\boldsymbol{\theta q:\gamma\kappa}}$ محسوبة في ظروف ثابتة الانفعال $\boldsymbol{\gamma}$ وثابتة الانفعال الدقيق $\boldsymbol{\kappa}$ ، وعلى مرحلتين؛ الأولى إيزوتيرمية، والثانية ثابتة التدفق $\mathbf{q}$.

ينـتج مـن العلاقـات (4.5) و $(4.6)_{1,2,3}$ أن المعـاملات $\hat{a}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}$, $\hat{c}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}$, $\hat{d}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}}$ تمثل على الترتيب، المركبات الديكارتية لمقطع تنسوري من المرتبة الرابعة، والتي أيضاً تليها المركبات الديكارتية لمقطع تنسوري من المرتبة الرابعة، أما الأخيرة فهي المركبات الديكارتيـة لمقطـع تنسـوري مـن المرتبـة الثانيـة، كمـا ينـتج عـن نفـس العلاقـات(4.5) و $(4.6)_{1,2,3}$، أن هذه المركبات تحقق الخواص التناظرية التالية:

$$\hat{a}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}} = \hat{a}_{k\ell ji}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}} \quad , \quad \hat{c}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}} = \hat{c}_{k\ell ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}} \quad , \quad \hat{d}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}} = \hat{d}_{ij}^{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}} \qquad (4.7)$$

كما ينتج العلاقات:(4.5) و $(4.6)_{5,6,9}$ ومن عدم تناظر المقطعين التنسوريين $\boldsymbol{\gamma}$ و $\boldsymbol{\kappa}$ ، أن: $\hat{\rho}_j^{\boldsymbol{\theta q:\gamma\kappa}}, \hat{\zeta}_{ji}^{\boldsymbol{\kappa\theta:\gamma q}}, \hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}$ ، هي كميات،أولها تمثل المركبات الديكارتية لمقطع تنسوري من المرتبة الثانية وغير متناظر، وثانيها أيضا تمثل المركبات الديكارتية لمقطع تنسوري من المرتبة الثانية وغير متناظر، وآخرها يمثل المركبات الديكارتية لمقطع متجهي.

أما باقي الكميات: $\hat{\varepsilon}_{jik}^{\boldsymbol{\kappa q:\gamma\theta}}, \hat{\gamma}_{jik}^{\boldsymbol{\gamma q:\kappa\theta}}, \hat{b}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma\kappa:\theta q}}$ فهي لا تمثل مركبات ديكارتية لمقاطع تنسورية، وإنما لمقاطع شبه تنسورية؛ كونهاتغيير أشارتها عند انعكاس النظام الاحداثي الديكارتي [2]. هذا من جهة أولى.

من جهة أخرى، كون أن الجسم الدقيق مركزي التناظر فالطاقة الحرة لاتحتوي حدود مستطيلة،باستثناء الحد المستطيل المعبر عن ترابط الحرارة المعممة مع الإجهاد $\boldsymbol{\gamma}$ [1,2]؛

أي باستثناء الحد المستطيل: $\hat{\eta}_{ji}^{\gamma\theta:\kappa q}\ \hat{\gamma}_{ji}\vartheta$ - . ينتج مما تقدم أن:

$$\hat{b}_{jik\ell}^{\gamma\kappa:\theta q}=0\,,\ \hat{\zeta}_{ji}^{\kappa\theta:\gamma q}=0\,,\hat{\gamma}_{jik}^{\gamma q:\kappa\theta}=0\,,\ \hat{\varepsilon}_{jik}^{\kappa q:\gamma\theta}=0\,,\ \hat{\rho}_{j}^{\theta q:\gamma\kappa}=0 \quad (4.8)$$

وبذلك تأخذ الطاقة الحرة المعممة للجسم الترموديناميكي المعمم الدقيق ومركزي التناظر، الشكل التالي:

$$\begin{aligned}\psi(\hat{\gamma}_{ji}\,,\hat{\kappa}_{ji}\,,\theta,\hat{q}_i)=&\frac{1}{2}\hat{a}_{jik\ell}^{\kappa\theta q}\ \hat{\gamma}_{ji}\,\hat{\gamma}_{k\ell}+\frac{1}{2}\hat{c}_{jik\ell}^{\gamma\theta q}\ \hat{\kappa}_{ji}\,\hat{\kappa}_{k\ell}\\&-\hat{\eta}_{ji}^{\gamma\theta:\kappa q}\ \hat{\gamma}_{ji}\vartheta+\frac{1}{2}\hat{d}_{ji}^{\gamma\kappa\theta}\,\hat{q}_j\,\hat{q}_i+\psi_0(\vartheta)\end{aligned} \quad (4.9)$$

2.4 . العلاقات التأسيسية المعممة بزمن استرخاء واحد كتوابع لمتحولات الحالة الترموديناميكية الدقيقة: $\hat{\gamma}_{ij}\,,\hat{\kappa}_{ij},\theta,\hat{q}_i$:

ينتج عن الطاقة الحرة المعممة (4.9) وعن العلاقات التأسيسية المصفوفية (4.1)، أن العلاقات التأسيسية كتوابع لمتحولات الحالة الترموديناميكية الدقيقة: $\hat{\gamma}_{ij},\hat{\kappa}_{ij},\theta,\hat{q}_i$ تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{ji}&=\ \hat{a}_{jik\ell}^{\kappa\theta q}\ \hat{\gamma}_{k\ell}-\hat{\eta}_{ji}^{\gamma\theta:\kappa q}\ \vartheta\,,\\ \hat{\mu}_{ji}&=\ \hat{c}_{jik\ell}^{\gamma\theta q}\ \hat{\kappa}_{k\ell}\,,\\ \eta&=\hat{\eta}_{ji}^{\gamma\theta:\kappa q}\ \hat{\gamma}_{ji}-\ \frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}(\vartheta)\end{aligned} \quad (4.10)$$

ندعوا العلاقات (4.10) بالعلاقات التأسيسية المعممة (الشكل الأول)، حيث ندعوا العلاقتين الأولى والثانية في (4.10)، بعلاقتي Duhamel−Neumann، الترموديناميكية المعممة بزمن استرخاء واحد للجسم المرن الدقيق مركزي التناظر (K−N)، وغير متماثل المناحي.

يبقى علينا الآن، تحديد قيمة الحد $-\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}(\vartheta)$، في الطرف الأيمن للعلاقة الأخيرة في (4.10)،والذي يتم باتباع مايلي. من العلاقة الأخيرة في (4.10)، نلاحظ أن: $\eta = \eta(\hat{\gamma}_{ji}, \theta)$ بالتالي يكون:

$$d\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \hat{\gamma}_{ji}}\right)_{\theta} d\hat{\gamma}_{ji} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta}\right)_{\boldsymbol{\gamma}} d\theta \qquad (4.11)$$

هذا من جهة أولى. ومن جهة ثانية يحسب العلاقة الأخيرة في (4.10) يكون:

$$d\eta = \hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma}\theta;\boldsymbol{\kappa q}}\, d\hat{\gamma}_{ji} - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \theta^2}(\vartheta)\, d\theta \qquad (4.12)$$

وينتج من (4.11) و (4.12) أن:

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta}\right)_{\boldsymbol{\gamma}} = -\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \theta^2}(\vartheta) \qquad (4.13)$$

إن المقدار $\theta\left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta}\right)_{\boldsymbol{\gamma}}$ هو مقدار ثابت [2,3,4,5]، يدعى بالحرارة النوعية للجسم المرن الدقيق ومركزي التناظر (K–N)، خلال تشوه ثابت $\boldsymbol{\gamma}$، ونرمز لهذا المقدار الثابت بالرمز $c_{\boldsymbol{\gamma}}$. ينتج عن ذلك وعن (4.13)، أن:

$$-\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \theta^2}(\vartheta) = \frac{c_{\boldsymbol{\gamma}}}{\theta} \qquad (4.14)$$

بمكاملة طرفي العلاقة السابقة مرة واحدة على المجال $[\theta_0\ ,\ \theta]$، وبالأخذ بعين الاعتبار أن: $\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}(0) = 0$، نحصل على:

$$-\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}(\vartheta) = c_\gamma \ln \frac{\theta}{\theta_0} = c_\gamma \ln (1+\frac{\vartheta}{\theta_0}) \qquad (4.15)$$

ينتج عن (4.15) أنالعلاقة الأخيرة في (4.10) تصبح بالشكل:

$$\eta = \hat{\eta}_{ji}^{\gamma\theta:\kappa q}\ \hat{\gamma}_{ji} + c_\gamma \ln (1+\frac{\vartheta}{\theta_0}) \qquad (4.16)$$

وإذا نشرنا الكمية $\ln (1+\frac{\vartheta}{\theta_0})$ في متسلسلة Tylor في جوار الحالة الطبيعية $\vartheta = 0$، وأخذنا بعين الاعتبار فرضيات الجسم ($|\vartheta/\theta_0| \ll 1$)، يمكننا إذاً الاكتفاء بالحد الأول فقط من هذا المنشور، حيث نحصل على: $\ln (1+\frac{\vartheta}{\theta_0}) \cong \frac{\vartheta}{\theta_0}$. ينتج عن ذلك وعن (4.15) وعن كون $\psi_0(0) = 0$، أن: $\psi_0(\vartheta) = -\frac{c_\gamma}{2\theta_0}\vartheta^2$. استناداً إلى ماتقدم تصبح الطاقة الحرة المعممة ψ والأنتروبية η بالشكل:

$$\begin{aligned}\psi(\hat{\gamma}_{ji}, \hat{\kappa}_{ji}, \theta, \hat{q}_i) = &\frac{1}{2}\hat{a}_{jik\ell}^{\kappa\theta q}\ \hat{\gamma}_{ji}\,\hat{\gamma}_{k\ell} + \frac{1}{2}\hat{c}_{jik\ell}^{\gamma\theta q}\ \hat{\kappa}_{ji}\,\hat{\kappa}_{k\ell} \\ &- \hat{\eta}_{ji}^{\gamma\theta:\kappa q}\ \hat{\gamma}_{ji}\vartheta + \frac{1}{2}\hat{d}_{ji}^{\gamma\kappa\theta}\,\hat{q}_j\,\hat{q}_i - \frac{c_\gamma}{2\theta_0}\vartheta^2 ,\end{aligned} \qquad (4.17)$$

$$\eta = \hat{\eta}_{ji}^{\gamma\theta:\kappa q}\ \hat{\gamma}_{ji} + \frac{c_\gamma}{\theta_0}\vartheta \qquad (4.18)$$

الحدان الأول والثاني في الطرف الأيمن للعلاقة (4.17) له لهما طابع الانفعال، حيث الحد الأول له طابع الانفعال والحد الثاني له طابع الانفعال الدقيق. الحدان الرابع والخامس لهما طابع حراري، حيث الحد الخامس له طابع حراري بحت والحد الرابع له طابع تدفق حراري. بينما الحد الثالث له طابع مزيج للطابعين السابقين، وهو يعبر عن التأثير المتبادل بين مقطع تنسور الانفعال والمقطع الحراري. في (4.17)، أيضاً،

المقادير $\hat{a}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}$ تمثل المعاملات الميكانيكية، والمعاملات $\hat{c}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}$ تمثل المعاملات الميكانيكية الدقيقة للجسم المرن الدقيق (K–N). المعاملات $\hat{d}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}}$ تمثل المعاملات الحرارية المعممة بزمن استرخاء واحد للجسم الدقيق ومركزي التناظر(K–N)، بينما المقادير $\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}$ ترتبط بالمعاملات الميكانيكية وكذلك بالمعاملات الحرارية لهذا الجسم، لذلك تدعى بالمعاملات الترموميكانيكية للجسم المرن الدقيق (K–N).

تعريف (مقطع المقاومة الحرارية):

ندعو المقطع التنسوري من المرتبة الثانية، والمتناظر $\boldsymbol{\lambda}$، والذي تعطى مركباته الديكارتية $\hat{\lambda}_{ji}$ بالعلاقة:

$$\hat{d}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}} = \frac{t_0}{\theta_0}\,\hat{\lambda}_{ji} \tag{4.19}$$

يدعى مقطع المقاومة الحرارية بزمن استرخاء واحد t_0 للجسم المرن الدقيق ومركزي التناظر (K–N).

ينتج عن (4.19) أن الطاقة الحرة المعممة بزمن استرخاء واحد t_0 تملك الشكل:

$$\begin{aligned}\psi(\hat{\gamma}_{ji},\hat{\kappa}_{ji},\theta,\hat{q}_i) = \frac{1}{2}\hat{a}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}\;\hat{\gamma}_{ji}\,\hat{\gamma}_{k\ell} + \frac{1}{2}\hat{c}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}\;\hat{\kappa}_{ji}\,\hat{\kappa}_{k\ell}\\ -\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\;\hat{\gamma}_{ji}\,\vartheta + \frac{t_0}{2\theta_0}\,\hat{\lambda}_{ji}\hat{q}_j\,\hat{q}_i - \frac{c_{\boldsymbol{\gamma}}}{2\,\theta_0}\,\vartheta^2\end{aligned} \tag{4.20}$$

تعريف (السلوك الترموديناميكي المعمم بزمن استرخاء واحد للجسم الدقيق المدروس (K-N)):

ندعو مجموعة المقاطع التنسورية المجهولة $\{\hat{u}_i,\hat{\varphi}_i,\hat{\gamma}_{ij},\hat{\kappa}_{ij},\hat{\sigma}_{ij},\hat{\mu}_{ij},\ \vartheta,\ \eta,\ \hat{q}_i\}$، والتي تحقق في $A\times B$، العلاقات (3.13)–(3.7) و(4.10) و(4.10)$_{1,2}$ و(4.20)–(4.18)

ندعوها بالسلوك الترموديناميكي المعمم بزمن استرخاء واحد للجسم الدقيق المدروس (K-N)، والمتوافقة الحمل الترموديناميكي الحجمي المعمم (المعطى) $\{ r , \hat{Y}_i , \hat{X}_i \}$.

ملاحظة1: واضح أن النظام (3.13)−(3.7)و(4.10) و $_{1,2}$(4.10)و(4.20)−(4.18) الذي يصف السلوك الترموديناميكي المعمم للجسم الدقيق (K–N)، المتوافق في $A \times B$ مع الحمول الترموديناميكية المعلومة $\{ r , \hat{Y}_i , \hat{X}_i \}$، هو نظام معقد، فعادةً ما نقوم باختصار هذا النظام إلى نظام يحتوي أقل عدد ممكن من المقاطع التنسورية المجهولة. فعلى سبيل المثال، بحذف مقطع الأنتروبية η من اهذا لنظام، نجد أن السلوك الترموديناميكي المعمم يوصف من خلال مجموعة المقاطع التنسورية $\{\hat{u}_i , \hat{\varphi}_i , \hat{\gamma}_{ij} , \hat{\kappa}_{ij} , \hat{\sigma}_{ij} , \hat{\mu}_{ij} , \vartheta , \hat{q}_i\}$، والمحكومة بدورها في $A \times B$ بواسطة نظام المعادلات:

$$\hat{\gamma}_{ji} = \hat{u}_{i,j} - \in_{k\,j\,i} \hat{\varphi}_k \quad , \quad \hat{\kappa}_{ji} = \hat{\varphi}_{i,j} \ , \tag{4.21}$$

$$\hat{\sigma}_{ji,j} + \hat{X}_i = \rho \ddot{\hat{u}}_i \quad , \quad \in_{i\,j\,k} \hat{\sigma}_{jk} + \hat{\mu}_{ji,j} + \hat{Y}_i = J \ddot{\hat{\varphi}}_i \ , \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} \psi(\hat{\gamma}_{ji} , \hat{\kappa}_{ji} , \theta , \hat{q}_i) = & \frac{1}{2} \hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell} \ \hat{\gamma}_{ji} \hat{\gamma}_{k\ell} + \frac{1}{2} \hat{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}_{jik\ell} \ \hat{\kappa}_{ji} \hat{\kappa}_{k\ell} \\ & - \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji} \ \hat{\gamma}_{ji} \vartheta + \frac{1}{2} \hat{d}^{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}}_{ji} \hat{q}_j \hat{q}_i - \frac{c_{\boldsymbol{\gamma}}}{2\theta_0} \vartheta^2 \ , \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$-\hat{q}_{i,i} + r - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \hat{q}_i} \right)_{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}} \dot{\hat{q}}_i = \theta_0 \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji} \dot{\hat{\gamma}}_{ji} + c_{\boldsymbol{\gamma}} \dot{\vartheta} \ , \tag{4.24}$$

$$\hat{\sigma}_{ji} = \hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell} \ \hat{\gamma}_{k\ell} - \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji} \vartheta \ , \quad \hat{\mu}_{ji} = \hat{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}_{jik\ell} \ \hat{\kappa}_{k\ell} \ , \tag{4.25}$$

$$L \hat{q}_i = -\hat{k}_{ij} \vartheta_{,j} \ , \tag{4.26}$$

وهنا نشير إلى أنه تم استنتاج (4.24) من (3.8) و(4.18) بعد استخدام العلاقة $\theta \cong \theta_0$ في الطرف الأيسر للعلاقة (.38).

ملاحظة2: أيضاً النظام (4.26)– (4.21) الذي يصف السلوك الترموديناميكي المعمم للجسم الدقيق (K–N)، المتوافق في $A \times B$ مع الحمول الترموديناميكية المعلومة $\{\hat{X}_i, \hat{Y}_i\ ,\ r\}$، هو نظام معقد، ويمكن تبسيطه بالشكل التالي. باهمال الحد الثالث في الطرف الأيسر للمعادلة (4.24) (وهذا ممكن بسبب صغره)، عندئذ لايوجد داعي للعلاقة (4.23)، وعندئذ يوصف السلوك السلوك الترموديناميكي المعمم للجسم المرن الدقيق (K–N) من خلال مجموعة المقاطع التنسورية $\{\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \vartheta, \hat{q}_i\}$، والمحكومة بدورها في $A \times B$ بواسطة نظام المعادلات:

$$\hat{\gamma}_{ji} = \hat{u}_{i,j} - \epsilon_{kji}\,\hat{\varphi}_k \quad , \quad \hat{\kappa}_{ji} = \hat{\varphi}_{i,j} \quad , \tag{4.27}$$

$$\hat{\sigma}_{ji,j} + \hat{X}_i = \rho\ddot{\hat{u}}_i \quad , \quad \epsilon_{ijk}\,\hat{\sigma}_{jk} + \hat{\mu}_{ji,j} + \hat{Y}_i = J\ddot{\hat{\varphi}}_i \quad , \tag{4.28}$$

$$-\hat{q}_{i,i} + r = \theta_0\,\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,\dot{\hat{\gamma}}_{ji} + c_{\boldsymbol{\gamma}}\dot{\vartheta} \ , \tag{4.29}$$

$$\hat{\sigma}_{ji} = \hat{a}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}\,\hat{\gamma}_{k\ell} - \hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,\vartheta \ , \quad \hat{\mu}_{ji} = \hat{c}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}\,\hat{\kappa}_{k\ell} \ , \tag{4.30}$$

$$L\,\hat{q}_i = -\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j} \ , \tag{4.31}$$

3.4 . معادلة التوصيل الحراري الزائدية، المعممة بزمن استرخاء واحد للجسم الدقيق المدروس (K–N): نحصل عليها من العلاقتين (4.29) و(4.31) (بعد تطبيق المؤثر L على طرفي (4.29)) ، حيث نحصل على المعادلة التالية المحققة في $A \times B$:

$$c_{\boldsymbol{\gamma}}\,L\,\dot{\vartheta} + \theta_0\,\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,L\,\dot{\hat{\gamma}}_{ji} = (\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j})_{,i} + L\,r$$

أو:

$$(\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j})_{,i} - c_{\boldsymbol{\gamma}} L\,\dot{\vartheta} - \theta_0\,\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}} L\,\dot{\hat{\gamma}}_{ji} = -\,L\,r \qquad (4.32)$$

أو:

$$(\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j})_{,i} - c_{\boldsymbol{\gamma}}(\dot{\vartheta} + t_0\,\ddot{\vartheta}) - \theta_0\,\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}} L\,\dot{\hat{\gamma}}_{ji} = -\,L\,r \qquad (4.33)$$

تمثل(4.32) أو(4.33) معادلة التوصيل الحراري الزائدية المعممة بزمن استرخاء واحد للجسم الدقيق المعتبر (K-N).

4.4 . نموذج Lame الرياضي المعمم بزمن استرخاء واحد للجسم الدقيق المدروس (K-N): نحصل على هذا النموذج الرياضي من خلال حذف مجموعة الحقول $\{\hat{\gamma}_{ij},\hat{\kappa}_{ij},\hat{\sigma}_{ij},\hat{\mu}_{ij},\hat{q}_i\}$ من العلاقات (4.31)-(4.27)، عبر الخطوتين التاليتين. في الخطوة الأولى نعوض (4.27) في (4.30)، فنحصل على العلاقات التالية المحققة في $B \times A^+$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ji} &= \hat{a}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}\,(\hat{u}_{\ell,k} - \epsilon_{nk\ell}\,\hat{\varphi}_n) - \hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,\vartheta\ , \\ \hat{\mu}_{ji} &= \hat{c}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}\ \hat{\varphi}_{\ell,k}\ , \end{aligned} \qquad (4.34)$$

في الخطوة الثانية نعوض (4.34) في (4.28)، ونعوض العلاقة الأولى من (4.27) في معادلة التوصيل الحراري المعممة (4.32) نحصل على المعادلات التالية المحققة في $B \times A^+$:

$$
\begin{aligned}
&[\,\hat{a}^{\kappa\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\,(\hat{u}_{\ell,k}-\epsilon_{nk\ell}\,\hat{\varphi}_n)-\hat{\eta}^{\gamma\theta:\kappa\mathbf{q}}_{ji}\,\vartheta\,]_{,j}-\rho\ddot{\hat{u}}_i=-\hat{X}_i\ ,\\
&\epsilon_{ijk}\,[\,\hat{a}^{\kappa\theta\mathbf{q}}_{jkm\ell}\,(\hat{u}_{\ell,m}-\epsilon_{nm\ell}\,\hat{\varphi}_n)-\hat{\eta}^{\gamma\theta:\kappa\mathbf{q}}_{jk}\,\vartheta\,]+\\
&+\,(\hat{c}^{\gamma\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\ \hat{\varphi}_{\ell,k})_{,j}-J\ddot{\hat{\varphi}}_i=-\hat{Y}_i\ ,\\
&(\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j})_{,i}-c_{\gamma}L\,\dot{\vartheta}-\theta_0\hat{\eta}^{\gamma\theta:\kappa\mathbf{q}}_{ji}L\,(\dot{\hat{u}}_{i,j}-\epsilon_{kji}\,\dot{\hat{\varphi}}_k)=-Lr\ ,
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

لكن ينتج عن خواص مناوب Levi-Chivita وعن تناظر $\hat{\eta}^{\gamma\theta:\kappa\mathbf{q}}_{ji}$ ، أن:

$$
\epsilon_{ijk}\,\hat{\eta}^{\gamma\theta:\kappa\mathbf{q}}_{jk}=\hat{\eta}^{\gamma\theta:\kappa\mathbf{q}}_{ji}\,\epsilon_{kji}=0 \tag{4.36}
$$

وبذلك تأخذ المعادلات (4.35) شكلها النهائي التالي في $B\ \times\ A^{+}$:

$$
\begin{aligned}
&[\,\hat{a}^{\kappa\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\,(\hat{u}_{\ell,k}-\epsilon_{nk\ell}\,\hat{\varphi}_n)-\hat{\eta}^{\gamma\theta:\kappa\mathbf{q}}_{ji}\,\vartheta\,]_{,j}-\rho\ddot{\hat{u}}_i=-\hat{X}_i\ ,\\
&\epsilon_{ijk}\hat{a}^{\kappa\theta\mathbf{q}}_{jkm\ell}\,(\hat{u}_{\ell,m}-\epsilon_{nm\ell}\,\hat{\varphi}_n)+(\hat{c}^{\gamma\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\ \hat{\varphi}_{\ell,k})_{,j}-J\ddot{\hat{\varphi}}_i=-\hat{Y}_i\ ,\\
&(\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j})_{,i}-c_{\gamma}L\,\dot{\vartheta}-\theta_0\hat{\eta}^{\gamma\theta:\kappa\mathbf{q}}_{ji}L\,\dot{\hat{u}}_{i,j}=-Lr\ ,
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

نضيف إلى ذلك الشروط الحدية والابتدائية التالية.

الشروط الابتدائية في B :

$$
\hat{u}_i(.,0)=\hat{u}_{i0}\ ,\ \ \dot{\hat{u}}_i(.,0)=\dot{\hat{u}}_{i0}\quad \text{in } B\ , \tag{4.38}
$$

$$
\hat{\varphi}_i(.,0)=\hat{\varphi}_{i0}\ ,\ \ \dot{\hat{\varphi}}_i(.,0)=\dot{\hat{\varphi}}_{i0}\quad \text{in } B\ , \tag{4.39}
$$

$$
\vartheta(.,0)=\vartheta_0\ ,\ \ \dot{\vartheta}(.,0)=\dot{\vartheta}_0\quad \text{in } B\ , \tag{4.40}
$$

حيث المقاطع التنسورية الناطقة: $\{\hat{u}_{i0},\dot{\hat{u}}_{i0},\hat{\varphi}_{i0},\dot{\hat{\varphi}}_{i0},\vartheta_0,\dot{\vartheta}_0\}$ مفروضة في B ،

الشروط الحدية على $\partial B \times A$:

$$\hat{u}_i = \hat{u}_i' \ , \ \hat{\varphi}_i = \hat{\varphi}_i' \quad \text{on } \partial B_1 \times A \ , \tag{4.41}$$

$$\left.\begin{aligned} &[\, \hat{a}_{j i k \ell}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}} \ (\hat{u}_{\ell,k} - \epsilon_{n k \ell} \ \hat{\varphi}_n) - \hat{\eta}_{j i}^{\boldsymbol{\gamma\theta;\kappa q}} \ \vartheta \,] \, \hat{n}_j = \hat{p}_i' \ , \\ &\hat{c}_{j i k \ell}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}} \ \ \hat{\varphi}_{\ell,k} \, \hat{n}_j = \hat{m}_i' \ , \end{aligned}\right\} \text{ on } \partial B_2 \times A \, , \tag{4.42}$$

$$\vartheta = \vartheta' \quad \text{on } \partial B_3 \times A \ , \tag{4.43}$$

$$-\hat{k}_{i j} \, \vartheta_{,j} \, \hat{n}_i = q' \quad \text{on } \partial B_4 \times A \ , \tag{4.44}$$

حيث:

$$\partial B = \partial B_1 \cup \partial B_2 = \partial B_3 \cup \partial B_4 \ , \tag{4.45}$$

$$\partial B_1 \cap \partial B_2 = \partial B_3 \cap \partial B_4 = \Phi \ , \tag{4.46}$$

والمقاطع التنسورية الناطقة $\{\hat{u}_i' \, , \, \hat{\varphi}_i' \, , \hat{p}_i' \, , \hat{m}_i' \, , \vartheta' \, , q'\}$ مفروضة، و $\hat{n}_i$ المركبات الديكارتية لمقطع الواحدة المتجهي **n** على السطح ∂B، والموجه نحو خارج ∂B.

تعريف: ندعو المقاطع التنسورية الناطقة: $\{\hat{u}_i \, , \hat{\varphi}_i \, , \vartheta\}$ (النتائج)، المحققة للمعادلات الترموديناميكية المعممة (4.37)، وللشروط الابتدائية (4.40)−(4.38) والشروط الحدية (4.46)−(4.41)، ندعوها بسلوك Lame الترموديناميكي المعمم في $A \times B$ للجسم الدقيق مركزي التناظر (k−N)، والمتوافق مع الحمول الترموديناميكية المفروضة (المسببات):

$$\{ \ \hat{X}_i \, , \hat{Y}_i \, , r \, , \, \hat{u}_{i0} , \dot{\hat{u}}_{i0} \, , \, \hat{\varphi}_{i0} , \dot{\hat{\varphi}}_{i0} \, , \, \vartheta_0 \, , \dot{\vartheta}_0 \ , \hat{u}_i' \, , \ \hat{\varphi}_i' \ , \hat{p}_i' \, , \hat{m}_i' \, , \vartheta' \, , q' \ \} \tag{4.47}$$

5.4 . الشكل التنسوري الصامد للسلوك الترموديناميكي المعمم بزمن استرخاء واحد للجسم الدقيق المدروس (K-N).

سنناقش الشكل التنسوري الصامد للسلوك الترموديناميكي المعمم بزمن استرخاء واحد للجسم الدقيق المدروس (K-N) المتجانس وغير متماثل المناحي، باتباع طريقة هي تعميم الطريقة المستخدمة في [9,12,14,15]، انطلاقاً من حقيقية أن اللامتغيرات ومنها المقاطع التنسورية، لا تتغير بتغيير النظام الاحداثي المنحني.يتألف الشكل التنسوري الصامد، للسلوك الترموديناميكي المعمم بزمن استرخاء واحد للجسم الدقيق المدروس (K-N) المتجانس وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط والمحدودة B في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3، هو عبارة عن مجموعة المقاطع التنسورية $\{\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\vartheta,\mathbf{q}\}$ التي تحقق المعادلات التنسورية الصامدة، التالية في $B\times A$ [12,14,15]:

$$\boldsymbol{\gamma}=(\nabla\mathbf{u})^T+\boldsymbol{\varphi}_{\times\times}\quad,\quad\boldsymbol{\kappa}=(\nabla\boldsymbol{\varphi})^T\quad, \tag{4.48}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{X}=\rho\ddot{\mathbf{u}}\quad,\ \boldsymbol{\sigma}_{\times}+\operatorname{div}\boldsymbol{\mu}+\mathbf{Y}=J\ddot{\boldsymbol{\varphi}}\quad, \tag{4.49}$$

$$-\operatorname{div}\mathbf{q}+r=c_{\boldsymbol{\gamma}}\dot{\vartheta}+\theta_0\,\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}:\dot{\boldsymbol{\gamma}}\quad, \tag{4.50}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{a}^{\boldsymbol{\kappa}\theta\mathbf{q}}[\boldsymbol{\gamma}]-\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}\vartheta\ ,\ \boldsymbol{\mu}=\mathbf{c}^{\boldsymbol{\gamma}\theta\mathbf{q}}[\boldsymbol{\kappa}]\ , \tag{4.51}$$

$$L\,\mathbf{q}=-\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\ , \tag{4.52}$$

حيث: الرمز: $\nabla=\mathbf{e}_i\,\partial_i$ ؛ $\nabla\mathbf{u}\equiv\operatorname{grad}\mathbf{u}=\hat{u}_{i\,,\,j}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$، والرمز الرمز $\mathbf{Q}^T$ يدل على منقول المقطع التنسوري $\mathbf{Q}$[5]، والرمز: $\boldsymbol{\varphi}_{\times\times}$ هو المقطع التنسوري المحوري المولد

[5] انظر [12] صفحة 6.

بالمقطع المتجهي $\boldsymbol{\varphi}$ ؛ $\boldsymbol{\varphi}_{\times\times} = \in_{i\,j\,k} \hat{\varphi}_k \, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ، و $\boldsymbol{\sigma}_\times$ هو المقطع المتجهي المحوري المولد بالجزء التناظري العكسي للمقطع التنسوري $\boldsymbol{\sigma}$ ؛ $\boldsymbol{\sigma}_\times = \in_{i\,j\,k} \hat{\sigma}_{j\,k} \, \mathbf{e}_i$ ، والرمز div يرمز للتفرق: $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = (\partial_j \hat{\sigma}_{ji})\, \mathbf{e}_i$ ، حيث ∂_k يمثل المشتق الجزئي بالنسبة للموضع X_k ؛ $\partial_k \hat{\sigma}_{ji} = \dfrac{\partial\, \hat{\sigma}_{ji}}{\partial\, X_k} \equiv \hat{\sigma}_{ji,k}$ ، والرمز $\boldsymbol{\eta}^{\gamma\theta:\kappa q}$: يمثل الجداء الداخلي للمقطعين التنسوريين $\boldsymbol{\eta}^{\gamma\theta:\kappa q}$ و $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ ، وبحسب تعريفه يعطى بـ : $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\eta}^{\gamma\theta:\kappa q}_{ji} \, \dot{\hat{\gamma}}_{ji}$. كما أن: $\mathbf{a}^{\kappa\theta q}[\boldsymbol{\gamma}] = \hat{a}^{\kappa\theta q}_{j\,i\,k\,\ell} \, \hat{\gamma}_{k\ell}\, \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i$ ، و $\mathbf{c}^{\gamma\theta q}[\boldsymbol{\kappa}] = \hat{c}^{\gamma\theta q}_{j\,i\,k\,\ell} \, \hat{\kappa}_{k\ell}\, \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i$ ، أخيراً: $\mathbf{k}\,\nabla\vartheta = \hat{k}_{i\,j}\, \vartheta_{,j}\, \mathbf{e}_i$.

5.5 . الشكل التنسوري الصامد للنموذج الرياضي من نوع Lame للجسم الترموديناميكي الدقيق المعمم (K–N)، المتجانس، وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط B ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3 :

نحصل على هذا انموذج الرياضي من النظام المعادلاتي التنسوري الصامد (4.52)–(4.48) بحذف المقاطع التنسورية: $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\gamma}$ ، ذلك باتباع مايلي. بتعويض (4.48) في (4.50) و (4.51)، ومن ثم الأخذ بعين الاعتبار أن[6] [10]:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\eta}^{\gamma\theta:\kappa q} : (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T = \boldsymbol{\eta}^{\gamma\theta:\kappa q} : \nabla \dot{\mathbf{u}} \quad , \quad \boldsymbol{\eta}^{\gamma\theta:\kappa q} : \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{\times\times} = 0 \quad , \\
&\mathbf{a}^{\kappa\theta q}[\boldsymbol{\gamma}] = \mathbf{a}^{\kappa\theta q}\left[(\nabla \mathbf{u})^T\right] + \mathbf{a}^{\kappa\theta q}\left[\boldsymbol{\varphi}_{\times\times}\right] \quad , \\
&\mathbf{c}^{\gamma\theta q}[\boldsymbol{\kappa}] = \mathbf{c}^{\gamma\theta q}\left[(\nabla \boldsymbol{\varphi})^T\right] \quad , \quad (\boldsymbol{\eta}^{\gamma\theta:\kappa q})_\times = 0 \, ,
\end{aligned} \tag{4.53}$$

فنحصل على المعادلات التنسورية الصامدة، التالية المحققتين في $B \times A^+$:

$$-\operatorname{div}\mathbf{q} + r = c_{\boldsymbol{\gamma}}\, \dot{\vartheta} + \theta_0\, \boldsymbol{\eta}^{\gamma\theta:\kappa q} : \nabla \dot{\mathbf{u}} \, , \tag{4.54}$$

[6] الجداء الداخلي لمقطعين تنسوريين من المرتبة الثانية، احداهما توافقي والأخر تخالفي، هو المقطع الصفري.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}\left[(\nabla \mathbf{u})^T + \boldsymbol{\varphi}_{\times\times}\right] - \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,\vartheta\ ,\quad \boldsymbol{\mu} = \mathbf{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}\left[(\nabla \boldsymbol{\varphi})^T\right] \tag{4.55}$$

كما نحصل على المعادلة التنسورية الصامدة التالية المحققة في $B\ \times\ A^+$:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\times} = \{\ \mathbf{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}\left[(\nabla \mathbf{u})^T + \boldsymbol{\varphi}_{\times\times}\right]\}_{\times} \tag{4.56}$$

بتطبيق المؤثر L على طرفي (4.54)، وبالأخذ بعين الاعتبار استقلال $\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}$ و c_{γ} عن الزمن نحصل على المعادلة التنسورية الصامدة التالية المحققة في $B\ \times\ A^+$:

$$-\ \mathrm{div}\, L\,\mathbf{q} + Lr = c_{\gamma}\, L\,\dot{\vartheta}\ +\ \theta_0\,\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}} : \nabla\,(L\dot{\mathbf{u}})\ , \tag{4.57}$$

في الخطوة الأخيرة، بتعويض (4.55) و(4.56) في (4.49) و (4.52) في (4.57)، نحصل على معادلات الإزاحة والدوران والحرارة التالية بشكلها التنسوري الصامد في $B\ \times\ A^+$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\left\{\mathbf{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}\left[(\nabla \mathbf{u})^T + \boldsymbol{\varphi}_{\times\times}\right]\right\} - \mathrm{div}\left(\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,\vartheta\right) + \mathbf{X} = \rho\ddot{\mathbf{u}}\ ,\\
&\{\ \mathbf{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}\left[(\nabla \mathbf{u})^T + \boldsymbol{\varphi}_{\times\times}\right]\}_{\times} + \mathrm{div}\left\{\mathbf{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}\left[(\nabla \boldsymbol{\varphi})^T\right]\right\} + \mathbf{Y} = J\,\ddot{\boldsymbol{\varphi}}\ ,\\
&\mathrm{div}\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right) + Lr = c_{\gamma}\, L\,\dot{\vartheta}\ +\ \theta_0\,\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}} : \nabla\,(L\dot{\mathbf{u}})\ ,
\end{aligned} \tag{4.58}$$

وبما أن [12.p.12]:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{k}^T = \mathbf{k}\ ,\ \mathrm{div}\left(\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,\vartheta\right) = \vartheta\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}} + \boldsymbol{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,\nabla\vartheta\ ,\\
&\mathrm{div}\left(\mathbf{k}^T\nabla\vartheta\right) = (\nabla\vartheta)\,.\,\mathrm{div}\,\mathbf{k} + \mathbf{k}\,.\nabla(\nabla\vartheta)\ ,
\end{aligned} \tag{4.59}$$

فتأخذ المعادلات التنسورية (4.58)، الشكل التالي في $B\ \times\ A^+$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\left\{\mathbf{a}^{\boldsymbol{\kappa}\theta\mathbf{q}}\left[(\nabla\mathbf{u})^{T}+\boldsymbol{\varphi}_{\times\times}\right]\right\}-\boldsymbol{\eta}^{\gamma\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}\nabla\vartheta-\vartheta\operatorname{div}\boldsymbol{\eta}^{\gamma\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}+\mathbf{X}=\rho\ddot{\mathbf{u}}\,,\\
&\{\mathbf{a}^{\boldsymbol{\kappa}\theta\mathbf{q}}\left[(\nabla\mathbf{u})^{T}+\boldsymbol{\varphi}_{\times\times}\right]\}_{\times}+\operatorname{div}\left\{\mathbf{c}^{\boldsymbol{\gamma}\theta\mathbf{q}}\left[(\nabla\boldsymbol{\varphi})^{T}\right]\right\}+\mathbf{Y}=J\ddot{\boldsymbol{\varphi}}\,,\qquad(4.60)\\
&\mathbf{k}.\nabla(\nabla\vartheta)+(\nabla\vartheta).\operatorname{div}\mathbf{k}\;-c_{\boldsymbol{\gamma}}L\dot{\vartheta}-\theta_{0}\boldsymbol{\eta}^{\gamma\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}:\nabla(L\dot{\mathbf{u}})=-Lr\,,
\end{aligned}$$

إلى ذلك نضيف الشروط الحدية والابتدائية، الصامدة التالية:

الشروط الابتدائية في B :

$$\mathbf{u}(.,0)=\mathbf{u}_{0}\,,\;\;\dot{\mathbf{u}}(.,0)=\dot{\mathbf{u}}_{0}\quad\text{in }B\,,\qquad(4.61)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(.,0)=\boldsymbol{\varphi}_{0}\,,\;\;\dot{\boldsymbol{\varphi}}(.,0)=\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{0}\quad\text{in }B\,,\qquad(4.62)$$

$$\vartheta(.,0)=\vartheta_{0}\,,\;\;\dot{\vartheta}(.,0)=\dot{\vartheta}_{0}\quad\text{in }B\,,\qquad(4.63)$$

حيث المقاطع التنسورية الناطقة: $\{\mathbf{u}_{0},\dot{\mathbf{u}}_{0},\boldsymbol{\varphi}_{0},\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{0},\vartheta_{0},\dot{\vartheta}_{0}\}$ مفروضة في B ،

الشروط الحدية على $\partial B\times A$:

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}'\,,\;\;\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}'\quad\text{on }\partial B_{1}\times A\,,\qquad(4.64)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\mathbf{a}^{\boldsymbol{\kappa}\theta\mathbf{q}}\left[(\nabla\mathbf{u})^{T}+\boldsymbol{\varphi}_{\times\times}\right]-\boldsymbol{\eta}^{\gamma\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}\vartheta\right\}\mathbf{n}=\mathbf{p}'\,,\\
&\left\{\mathbf{c}^{\boldsymbol{\gamma}\theta\mathbf{q}}\left[(\nabla\boldsymbol{\varphi})^{T}\right]\right\}\mathbf{n}=\mathbf{m}'\,,
\end{aligned}\right\}\ \text{on }\partial B_{2}\times A\,,\qquad(4.65)$$

$$\vartheta=\vartheta'\quad\text{on }\partial B_{3}\times A\,,\qquad(4.66)$$

$$-(\mathbf{k}\nabla\vartheta)\mathbf{n}=q'\quad\text{on }\partial B_{4}\times A\,,\quad\text{on }\partial B_{4}\times A\,,\qquad(4.67)$$

والمقاطع التنسورية الناطقة $\{\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \mathbf{p}', \mathbf{m}', \vartheta', q'\}$ مفروضة، و $\mathbf{n}$مقطع الواحدة المتجهي العمودي على السطح ∂B، والموجه نحو خارج ∂B.

تعريف: ندعو المقاطع التنسورية الناطقة: $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \vartheta\}$ (النتائج)، المحققة للمعادلات الترموديناميكية المعممة (4.60)، وللشروط الابتدائية (4.63)−(4.61) والشروط الحدية (4.67)−(4.64)، ندعوها بالشكل التنسوري الصامد لسلوك Lame الترموديناميكي المعمم في $B\times A$ للجسم الدقيق مركزي التناظر (k−N)، والمتوافق مع الحمول الترموديناميكية المفروضة (المسببات):

$$\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, r, \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0, \vartheta_0, \dot{\vartheta}_0, \mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \mathbf{p}', \mathbf{m}', \vartheta', q'\} \quad (4.68)$$

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولا) الاستنتاجات: استنتجنا الشكل التنسوري الناطق والصامد للأسس الترموديناميكية المعممة ولعملية Lame الترموديناميكية المعممة للجسم الدقيق (K−N) المتجانس وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط B محدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3. وتكمن أهمية النتائج بأنه يمكن اسقاطها في نظام الإحداثيات المنحنية، الملائم الذي فيه يسهل حل المسألة.

ثانياً) المقترحات: يمكن أن نختتم البحث باقتراح ثلاث مسائل للمناقشة، هي الآتية:

المسألة الأولى: مناقشة الشكل التنسوري الناطق في نظام احداثي منحني كيفي، للأسس الترموديناميكية المعممة ولعملية Lame الترموديناميكية المعممة للجسم الدقيق (K–N) المتجانس وغير متماثل المناحي.

المسألة الثانية: مناقشة مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية للجسم الدقيق (K–N) بلغة $\{\mathbf{u},\varphi,\vartheta\}$ وبلغة $\{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\mathbf{q}\}$، ذلك بالشكلين التنسوريين الصامد والناطق في نظام احداثي منحني كيفي.

المسألة الثالثة: مناقشة الشكلين التنسورين الصامد والناطق في نظام إحداثي منحني كيفي لكلٍ من العملية الترموديناميكية المعممة بزمني استراحة وسلوك Lame الترموديناميكي المعمم بزمني استراحة [1]، والمتوافقين مع الجسم الدقيق (K–N) المتجانس وغير المتماثل المناحي.

المراجع

[1]- Kaliski, S. , 1992 - Vibrations and Waves,Part B:Waves, Polish Scientific Publishers PWN Ltd.—Warszaw.

[2] –Nowacki, W , 1986 - Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.

[3]- Ignaczak, J., Starzewski, M.O., 2010 - Thermoelasticity with Finite Wave Speeds**,** Oxford University Press Inc., New York.

[4]- Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Eslami, M.R., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y.,2013 - Theory of Elasticity and Thermal Stresses**,** Springer Science+Business Media Dordrecht.

[5] – Hetnarski, R.B., and Ignaczak, J., 2011 - The Mathematical Theory of Elasticity , Second Edition , CRC Press,Taylor & Francis Group,6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300,Boca Raton, FL 33487-2742**.**

[6]- *Bertold Lysik, 1970* - Matematyczne Podstawy Teorii Sprężystości, Politechnika Wrocławska.

[7]- Drobot , *S ,1971*-On Cosserat Continua , Zastos .Math. 12, 323 -346

[8]-*Heinbockel ,J.H, 1996*- Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics, Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University.

[9] - Al-Hasan, M. and Attiah, W., 2019 - The Hooke thermodynamical model in a curve coordinate system, Journal of Al-Baath University,Vol.41, Accepted for Publication in 15/7/2019.

[10]-*Philippe G.Ciarlet* , 2005 - An Introduction To Differential Geometry with Applications to Elasticity , Liu Bie Ju Centre For

mathematical Sciences ,Gty Unversity of Hong Kong , Department of mathematics.

[11]- *K. Hackl & M. Goodarzi*, 2010 - An Introduction to Linear Continuum Mechanics, Lecture Notes, Ruhr-University Bochum, Faculty of Civil and Environmental Engineering.

[12]- *Truesdell C.*, 1984 - Mechanics of Solids, Volume II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH.

[13]- *Hung Nguyen-Schåfer*, 2017 - Tensor Analysis and Elementary Differential Geometry for Physicists and Engineers, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[14]- *Alaa Khallouf*, 2021-The foundations of the generalized thermoelasticity with one relax time in the invariable tensorial form,Accepted for Publication in August 2021, Journal of Tartous University.

[15] – Mountajab Al-Hasan and Rameh Rajab Deeb , **2022** – The Invariance tensorial forms of the energy balance for the (L-S) thermodynamical body of one relax time in terms of $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ and of $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$, Journal of Al-Baath University,Vol.44, Nr.1, p. 79-104**.**