

التحليل الحركي لمنظومة مستوية مولدة بالآلية السباعية

د. مصطفى الحسن

علاء خلوف

1. ملخص البحث:

مع التقدم الصناعي الهائل الذي يشهده العصر، وخاصة في مجال الروبوتات والآلات المبرمجة، أصبح من الضروري تصميم ميكانيزمات (آليات) جديدة ودراسة حركتها لاستخدامها كأدع رابوتية أو ميكانيزمات تؤدي أغراض معينة.

حازت الآلة السباعية على اهتمام الباحثين في العديد من المجالات الصناعية، لذا تم التركيز في هذه الورقة البحثية على إجراء دراسة حركية لمنظومة مستوية مولدة بالآلة السباعية مؤلفة من جسم ثابت وجسمين مثلثين وأربعة قضبان وثمانية مفاصل دورانية، تؤدي حركة وفق مسار محدد. وتم إجراء تحليل رياضي مفصل لهذه الحركة، حيث تم استنتاج معادلات الإزاحة أولاً، ومن خلال معادلات الإزاحة تم التوصل إلى معادلات السرعة والتسارع، بحيث يتمكن المصمم من معرفة حركة المسار الناتج في نقطة معينة (تم اعتبارها النقطة الخاصة بموضوع الدراسة)، ويكون قادراً على تحديد سرعة وتسارع هذه النقطة من أجل أبعاد محددة لأجسام الآلة.

إن المعادلات التي تم التوصل إليها من خلال البحث، تشكل نواة لدراسة آلات جديدة أكثر تعقيداً.

كلمات مفتاحية: التحليل الحركي، ميكانيزم، آلة، سرعة، تسارع.

Kinematic Analysis of a Planar System Generated by Seven Bar –Mechanism

1. Abstract:

With the recent huge industrial progress, especially in the field of robotics and CNC. It has been essential to design new mechanisms, and study their motion in order to employ them as robotic arms and mechanisms of special usages.

The seven bar-mechanisms took the interest of researchers in several industrial fields. So, this paper concentrated on studying a planar system generated by seven bar-mechanism composed of a fixed body, two triangle bodies, 4 bars and eight rotational pivoted joints that performs movement according to a specific path. A detailed mathematical analysis was done. First, the displacement equations were attained, then the equations of velocity and acceleration were derived. Which allows the designer to know the output path at a specified point (that is considered the special point of study), and makes him able to specify velocity and acceleration of this point for special dimensions of the mechanism bodies.

The equations concluded through research, are a beginning for studying new machines which are more complicated.

Key words: *Kinematic Analysis, Mechanism, Machine, Velocity, Acceleration.*

2. مقدمة:

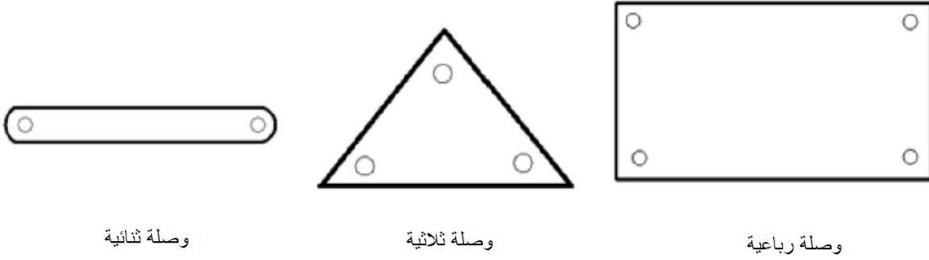
تتلقى معظم الآلات الطاقة الميكانيكية، وتقوم بتعديلها بحيث يمكن استخدام الطاقة للقيام ببعض المهام المحددة، المصممة من أجلها، ومن الأمثلة الشائعة على هذه الآلات الرافعة، والمخرطة، والرافعة اللولبية، وما إلى ذلك.

ويتطلب تحويل الطاقة وتعديلها داخل الآلة إدراج عدد من الأجزاء (الوصلات أو العناصر) التي تم اختيارها بحيث تنتج الحركة المطلوبة وتحمل بأمان القوى التي تتعرض لها حتى تتمكن الآلة من أداء مهمتها بنجاح.

لكل آلية مخرجات خاصة بها عند تشغيلها، ويتم تحليل الآلية عن طريق حساب الموقع والسرعة والتسارع في نقاط مختلفة على الآليات، ومن أجل تحليل السرعة والتسارع عند أية نقطة من الآلية لا نحتاج إلى حساب القوى والضغط المؤثرة في أجزاء الآلية. وبمعنى آخر، عند تحليل حركة آلية معينة، لا نحتاج إلى النظر في مساحة المقطع العرضي أو قوة الأجزاء في تلك الآلية. كما أنه لا يهم ما إذا كانت الأجزاء مصنوعة من الحديد الزهر أو الخشب أو أي شيء آخر لدراستها وتحليل حركتها.

توجد عدة أنواع من الوصلات (الأجسام) منها [1]، ويوضح الشكل (1) بعض أنواع هذه الوصلات:

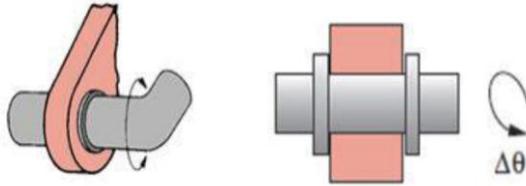
- 1- الوصلات الثنائية (القضبان).
- 2- الوصلة الثلاثية (الجسم المثلث).
- 3- الوصلة الرباعية.



الشكل 1 - المفصل الحركي الدوراني

وقد تم اختيار وصلتين ثلاثيتين وأربعة وصلات ثنائية بالإضافة إلى الجسم الثابت لتكوين الآلة المطلوبة.

أما عن المفصل الحركية فقد تم استخدام مفصل دورانية [1] وهي مفصل تتيح للجسم الدوران حول محور ثابت بزواوية مستوية محددة، موضحة بالشكل رقم (2).



الشكل 2 - المفصل الحركي الدوراني

أهمية البحث:

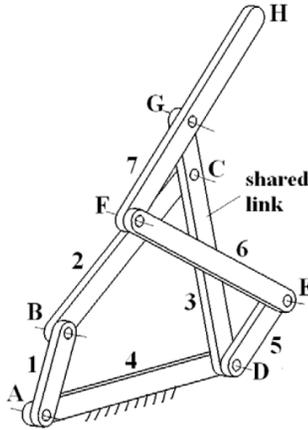
إن التحليل الحركي للآلية يمكّن من معرفة مسار حركة الجسم الخاص (أي الجسم المقود) تبعاً لحركة الجسم القائد (الذي يتعشق معه المحرك)، ويوضح معادلات الإزاحة والسرعة والتسارع للنقطة الخاصة أي النقطة المدروسة والتي ستؤدي حركة الخرج للآلية. بحيث يتمكن الصناعيون من استخدام حركة هذه النقطة لأداء غرض معين، فمثلاً:

حركة ذراع روبوتية وفق مسار محدد لنقل مادة معينة من مكان إلى مكان. أو تحريك أداة القطع لآلة مبرمجة بحيث تزيد من قابلية التصنيع وفق مسارات أكثر تعقيداً.

الدراسات المرجعية:

- في عام 2010، قام الباحثان *Jian S. Dai* و *Guowu Wei* [2] بتحليل هندسي وحركي (كينماتيكي) لميكانيزم مؤلف من سبعة قضبان ذي ثلاث مفاصل ثابتة دورانية مركبة، حيث تم اعتماد نظام تصنيف قائم على معيار قابلية الدوران بأنواعه المختلفة مستخرج من التغيرات في بارامترات الوصلة وفضاءات العمل والتفرد والتوزع الإيزوتروبي. وقد تم تطوير معادلات الصيغة باستخدام معادلتين تحليليتين للقضبان الأربعة على الترتيب من أجل التحليل الهندسي للميكانيزم. حيث تم التوصل من خلال البحث إلى المصفوفات اليعقوبية للميكانيزم، وعرض التحليل الحركي له، من أجل اختبار فضاء العمل والتفرد والتوزع الإيزوتروبي. يبين الشكل (1) الميكانيزم ذي الوصلات السبع والمفاصل الثلاث الثابتة الذي اقترحه الباحثان:

Jian S. Dai و *Guowu Wei*



الشكل 2 - ميكانيزم ذي سبع وصلات وثلاثة مفاصل ثابتة [2]

- استخدم *Greenough* و *Brashaw* [3] ميكانيزماً ذا سبعة قضبان كنظام وصلات هجين لتوليد حركة ثابتة، وبينت النتائج أن الطاقة المطلوبة لمحرك السيرفو بالحد الأدنى مقارنةً مع تلك المطلوبة لقيادة الحمل مباشرةً.
 - افترض *Kirecci* و *Dugler* [4,5] مفعلاً هجيناً وتحديداً ترتيب مؤلف من ميكانيزم ذي سبع وصلات ودرجتي حرية مسطح (مستوي) بمحركين أحدهما ذو سرعة ثابتة والآخر سيرفو. لقد درسا السلوك الديناميكي للمفعل الهجين بتطبيق محاكاة عددية للمنظومة ككل. علاوةً على ذلك، تم تطبيق ميكانيك لاغرانج لاشتقاق معادلات الحركة. كما تم تمثيل ما طُوّر باستخدام نظام التحكم التكاملي التفاضلي التناسبي *PID* فيما يخص قدرة النموذج وذلك تبعاً لنتائج المحاكاة. يمكن للمفعل الهجين أن يوفر مقداراً كبيراً من الطاقة عندما يتم تخفيض عزم عطالته إلى الحد الأدنى المطلوب. تعتمد الكلفة الأولية للمفعل على الطاقة المطلوبة للآلة المعطاة، وتبين أن متطلبات الطاقة الأعلى تنقص الكلفة النسبية للمفعل الهجين إذا ما قورنت بنظام قيادة سيرفو مباشر.
 - قدّم *Seth* و *Vaddi* [6,7] سمة توليد التوابع القابلة للبرمجة. ففي البداية درسا ميكانيزماً ذا خمسة قضبان ودرجتي حرية والتي تعد القاعدة التي على أساسها يمكن تركيب ميكانيزمات توليد توابع قابلة للبرمجة. وفي التقارير المتعلقة بذلك تمت نوقشت الاعتبارات التصميمية والكينماتيكية المقرر وأبعاد الوصلات، ونقاط الوصل واختيار الدخل التحكمي. في المرحلة الثانية بحث *Seth* و *Vaddi* في مولدة توابع قابلة للبرمجة لنقل الخرج، ذات سبع قضبان.
- لقد عرضا نتائج المحاكاة على تخفيض تسارع السيرفو الأعظمي، وعزم السيرفو الأعظمي وجذر متوسط المربعات *RMS* لعزم السيرفو. وجميعها تقترح أن

التخفيض الكبير في القيم العظمى للمتغيرات المختارة ممكنة من خلال المسارات المثلى.

- أجرى الباحثان *Hui Li* و *Yuping Zhang* [8,9,10] دراسة حول مكبس ميكانيكي ذي سبعة قضبان بميكانيزم مقود هجين من أجل السحب العميق. من خلال التصميم المناسب لحركة الدخل الخاصة بمحرك السيرفو، يمكن للمنزلق أن يمر من خلال المسارات المرغوبة. إن مكبس تشكيل المعادن هو إحدى الآلات الأكثر شيوعاً المستخدمة في الصناعة، لكن مكبس عمود المرفق (الكرنك) مع وصلات كرنك انزلاقية غير مناسب للسحب العميق، نظراً لكونه يفنقر لسرعة العمل الثابتة. وللحصول على سرعة عمل ثابتة فإن مصنعي المكبس الميكانيكي طوروا مكابس متعددة الوصلات، هذه الاختراعات بشكل خاص، ركزت على سرعتي الاقتراب والعودة. لتبطيء سرعة المنزلق في الشوط العامل، من الضروري أن نحصل على سرعات عمل مستقرة أو أن نجعل مواصفات شوط التحميل مناسبة لتطبيقات خاصة، ولكن المكابس ذات الوصلات المتعددة تفنقر إلى المرونة المطلوبة من أجل عمليات السحب المختلفة. ومن أجل الحصول على ميزات شوط تحميل مناسبة فإن العديد من الباحثين طوروا مكبساً مرناً يستخدم محرك سيرفو كمحرك أولي. تم تحسين أبعاد الوصلات وقواعد الحركة للمحرك التخيديمي (السيرفو) إلى الحالة المثالية. كما تم تمثيل المزايا المرنة لمكبس السحب المقود بشكل هجين من خلال ثلاثة أمثلة مثالية. حيث تؤكد النتائج المثالية ميزات المكبس الميكانيكي ذي القضبان السبعة المقود بشكل هجين، كالمرونة في التحكم بسرعات المنزلق والأشواط القابلة للضبط من أجل عمليات السحب. وقد تم تحسين هذا الميكانيزم إلى الحالة المثالية على مرحلتين، حيث تم أولاً تحسين البارامترات الهندسية للمكبس،

وتبع ذلك بارامترات الحركة. وعلى هذه الأسس وتحسين حركة الدخل بشكل مناسب لمحرك السيرفو، تم الحصول على حركات الخرج المرغوبة المختلفة.

خلال الدراسات المرجعية السابقة تم التركيز على عدة نقاط منها:

- دراسة الحركة لميكانيزمات بسيطة رباعية وخماسية.
- دراسة ميكانيزمات باستخدام نظرية البيان ونظرية الآلات.
- تغيير أشكال الميكانيزمات مما يغير أشكال الحلقات وعددها.
- تغيير عدد المفاصل الثابتة وعدد الوصلات.
- إيجاد العلاقات الرياضية والمصفوفات النازمة للميكانيزمات المدروسة.
- تطبيق الميكانيزمات على ذراع روبوتية.

ومنه تم التوصل إلى هدف البحث.

3. هدف البحث:

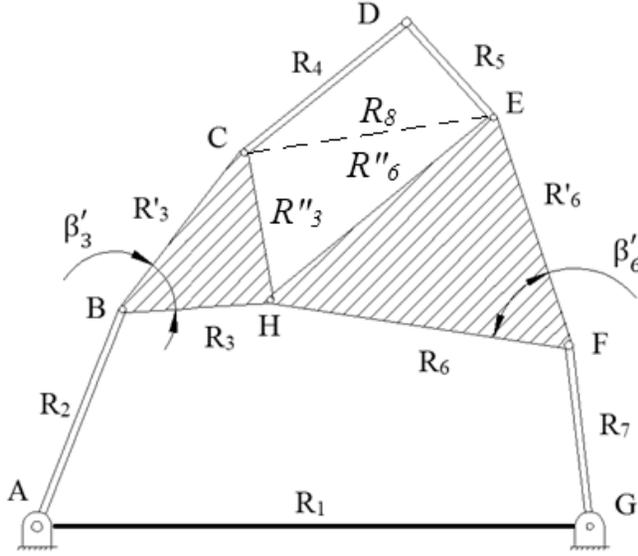
دراسة حركة منظومة مستوية مولدة بآلية سباعية واستنتاج معادلات الإزاحة والسرعة والتسارع لهذه المنظومة.

4. مواد وطرق البحث:

اعتمد البحث على الدراسة الرياضية للحركة واتم استخدام برنامج *Mathematica* لتبسيط الحلول الرياضية برمجياً.

5. التحليل الحركي:

يتضمن هذا الفصل وصفاً تحليلياً رياضياً لحركة الآلة السباعية المبينة بالشكل (3) حيث أن دوران الجسم القائد وهو الجسم المتصل بمنبع الحركة سينقل الحركة لباقي أجزاء الآلة التي سنسميها أجسام مقودة، بما فيها الجسم الخاص المختار، الذي تؤدي النقطة الخاصة منه الدور الأساسي في عمل هذه الآلة.



الشكل 3 - الآلة السباعية المدروسة

إذا تم وصل عدد من الأجسام بمفاصل دورانية، يمكن الحصول على سلسلة حركية، وإذا تُبنت إحدى وصلات السلسلة، يتم الحصول على الآلية (أو ما يسمى: التركيبة الآلية) وعندها يمكن استعمال المجموعة الناتجة في نقل الحركة أو تحويلها.

تتألف الآلة من تركيبة آلية واحدة أو مجموعة تركيبات آلية، قادرة على نقل الطاقة أو تحويلها من مصدر الطاقة إلى المقاومة المراد التغلب عليها بغية أداء عمل معين، وبالتالي يجب أن تقوم الآلة بنقل حركة نسبية محددة، وفائدتها محصورة في قدرتها على تحويل الطاقة المعطاة لها، وجعلها صالحة للقيام بغرض معين، بينما يتم التركيز في التركيبة الآلية فقط على قدرتها على نقل حركة معينة، وقد لا تنتقل كمية محسوسة من

الطاقة، بينما يجب على الآلة أن تنقل كمية محسوسة منها، فالآلة إذاً هي التنفيذ العملي للتركيبة الآلية.

وبالتالي كل الآلات تركيبات آلية [11]، لكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً، لأن بعض الأجهزة الدقيقة كالساعات والآلات الكاتبة، تقع وفقاً للتعريف على الحد الفاصل بين الآلات والتركيبات الآلية، لكنه من الأكثر ملاءمة تصنيفها كتركيبات آلية، لأنها تنقل طاقة صغيرة تكفي فقط للتغلب على الاحتكاك وإعطاء الحركة النسبية المطلوبة، أي: إن العمل المفيد هو تغيير الأوضاع النسبية للأجزاء دون الحاجة إلى أداء عمل خارجي، فالآلة إذاً بمفهومها العملي يجب أن تنقل كمية محسوسة من الطاقة، كافية لأداء عمل خارجي معين، والتغلب على المقاومات المؤثرة في أجزائها المتحركة.

يمكن في الآلة الحصول على حركة دورانية نتيجة دوران الوصلة القائدة، وسيتم البحث في تحديد الخواص الحركية للآلة بشكل مستقل عن القوى والعزوم المؤثرة في وصلاتها ويشمل تحليلنا الحركي للآلية تعيين الميزات الأساسية لهذه الحركة وهي الإزاحة الزاوية أو منحنى الحركة والسرعة والتسارع الزاوي لها.

إن الآلة السباعية المختارة هي آلة مستوية تتحرك جميع نقاطها في مستوٍ واحد نسميه مستوي الحركة وسنفرض أن أجسام الآلة هي أجسام صلبة أي أن المسافة بين أي نقطتين على أي جسم تبقى ثابتة بمرور الزمن، إن للآلة المدروسة درجة حرية واحدة، وتتألف من سبعة أجسام متصلة فيما بينها بثمانية مفاصل دورانية، يدور كل مفصل من هذه المفاصل حول محور عمودي على المستوي الذي تتحرك فيه الآلة.

تكون الحركة النسبية بين وصلات تركيبية آلية مقيدة تقييداً تاماً، لذلك فإن إزاحة جسم ما من هذه التركيبية بحركة معينة، تنتج عنها إزاحات متناسبة للأجسام الأخرى، ويمكن

توصيف الحركة النسبية للأجسام بدلالة الإزاحات والسرعات والتسارعات الزاوية لهذه
الوصلات بالنسبة للوصلة الثابتة بعدة طرق أهمها:

1- طريقة الجسم الشبيه بالصلب [12,13].

2- تحليل متجهات الحركة بتطبيق علاقات الأعداد المركبة: تعتمد هذه الطريقة
على علاقات وقوانين الأعداد المركبة، وتساعد في تبسيط تحليل الحركة في
الآليات المعقدة، وكذلك في وضع الهيكل الرياضي اللازم لإعداده للحاسوب
[14].

3- التمثيل التخطيطي لمعادلات الحركة النسبية: وذلك بتعيين ميل المماس لمنحنى
الإزاحة عند نقاط متعددة، كذلك الأمر بالنسبة لإنشاء منحنى التسارع من
تفاضل منحنى السرعة بالنسبة للزمن.

ولكن وبما أن مسارات حركة نقاط بعض الوصلات أو كلها في الحالة العامة
مسارات منحنية، فإن متجه السرعة عندئذٍ متغير القيمة والاتجاه، كما أن متجه
التسارع تنتج له مركبتان، إحداها مماسة للمسار والأخرى ناظمية باتجاه مركز
الانحناء، بينما يمثل تفاضل المنحنيات بهذه الطريقة قيم كل من السرعة
والتسارع المماسي فقط دون تحديد الاتجاه، وبالتالي تقيد هذه الطريقة بشكل
أكبر في حال كان مسار الحركة مستقيماً، بالإضافة إلى أن دقة نتائج هذه
الطريقة تعتمد إلى حد كبير على دقة رسم المماسات عند نقاط منحنى الإزاحة،
وعلى تباعد هذه النقاط على المنحنى، مع ملاحظة أن الخطأ النسبي من رسم
منحنى إلى آخر هو خطأ تراكمي يصل في الحالات العادية إلى حوالي 20%.

4- التحليل الرياضي لمعادلات الحركة النسبية لجملة محاور إحداثية ثابتة: تقوم على تحليل معادلات حركة عناصر التركيبات الآلية بإسقاط معادلتى السرعة والتسارع الموافقة لها على محورين متعامدين للحصول على معادلتين نحدد بهما ميزات حركة كل نقطة والوصلة التي تنتمي إليها، وتعد هذه الطريقة الأكثر دقة وشمولية لدراسة حركة التركيبات الآلية، وستتم الدراسة الحالية وفقاً لهذه الطريقة.

تتألف الآلة السباعية المدروسة المبينة في الشكل (66) من جسمين ثلاثيين وأربعة أجسام ثنائية بالإضافة إلى الجسم الصفري (الثابت)، نرمز لأجسام الآلة حسب الجدول (1) :

الجدول 1- أجسام الآلة

الجسم	AG	AB	BH	BC	CH	CD	DE	HF	EF	HE	FG
رمزه	R ₁	R ₂	R ₃	R' ₃	R'' ₃	R ₄	R ₅	R ₆	R' ₆	R'' ₆	R ₇

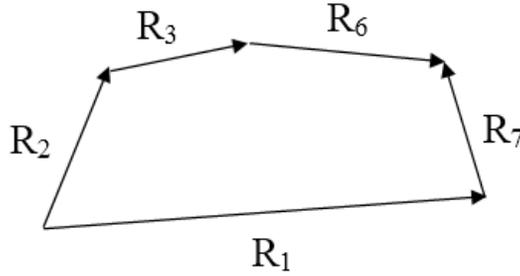
حيث: $R_1 = \text{const}$, $\beta'_3 = \text{const}$, $\beta'_6 = \text{const}$

أما R_8 فهي المسافة بين النقطتين C, E في لحظة معينة، حيث يتم الحصول على المتجه \vec{R}_8 بجمع المتجهين \vec{R}''_3 و \vec{R}''_6 .

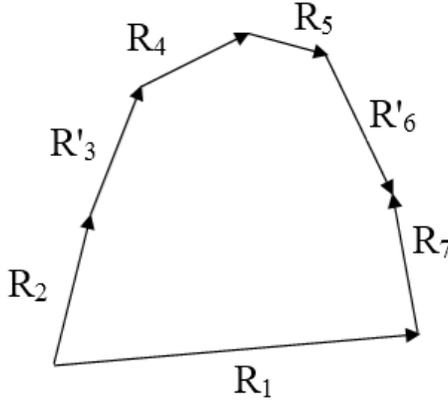
وعلى اعتبار أن الجسم القائد هو الجسم الثاني والجسم الخاص هو الجسم الرابع والنقطة الخاصة للآلة هي النقطة D .

تعتمد فكرة الحل على استنتاج معادلات الإزاحة الزاوية بدلالة زاوية الجسم القائد، ثم اشتقاق هذه المعادلات للحصول على معادلات السرعة الزاوية والتسارع الزاوي.

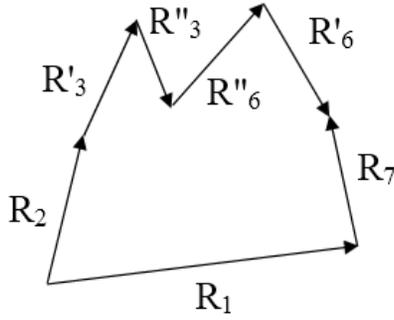
ومن أجل الحصول على الحل، يجب أن يتساوى عدد المجاهيل مع عدد المعادلات، لذا تم افتراض وجود ثلاث حلقات مغلقة مرقمة من الأولى وحتى الثالثة، ومبينة بالأشكال (4، 5، 6) على الترتيب:



الشكل 4 - الحلقة الأولى

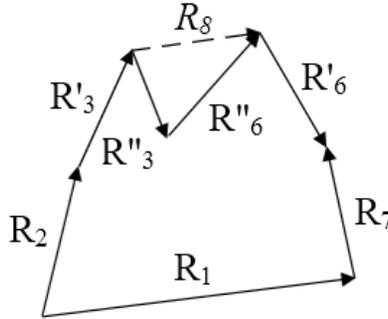


الشكل 5 - الحلقة الثانية



الشكل 6 - الحلقة الثالثة

كما يبين الشكل (7) المتجه الوهمي \vec{R}_8 لذي أضيف للحلقة الثالثة لتبسيط الحل:



الشكل 7 - الحلقة الثالثة

فيكون الحل كالآتي:

تعطى الحلقة المغلقة الأولى بالعلاقة التالية:

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_7 - \vec{R}_6 - \vec{R}_3 - \vec{R}_2 = \vec{0} \dots (1)$$

تعطى الحلقة المغلقة الثانية بالعلاقة التالية:

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_7 - \vec{R}'_6 - \vec{R}_5 - \vec{R}_4 - \vec{R}'_3 - \vec{R}_2 = \vec{0} \dots (2)$$

تعطى الحلقة المغلقة الثالثة بالعلاقة التالية:

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_7 - \vec{R}'_6 - \vec{R}''_6 - \vec{R}''_3 - \vec{R}'_3 - \vec{R}_2 = \vec{0} \dots (3)$$

نفرض أن:

$$\vec{R}_8 = \vec{R}''_6 + \vec{R}''_3 \dots (4)$$

تصبح لدينا العلاقة (3) بالشكل الآتي:

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_7 - \vec{R}'_6 - \vec{R}_8 - \vec{R}'_3 - \vec{R}_2 = \vec{0} \dots (5)$$

بإسقاط العلاقة (1) على محوري الجملة الإحداثية:

$$R_1 \cos \theta_1 + R_7 \cos \theta_7 - R_6 \cos \theta_6 - R_3 \cos \theta_3 - R_2 \cos \theta_2 = 0 \dots (6)$$

$$R_1 \sin \theta_1 + R_7 \sin \theta_7 - R_6 \sin \theta_6 - R_3 \sin \theta_3 - R_2 \sin \theta_2 = 0 \dots (7)$$

بإسقاط العلاقة (2) على محوري الجملة الإحداثية:

$$R_1 \cos \theta_1 + R_7 \cos \theta_7 - R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) - R_5 \cos \theta_5 - R_4 \cos \theta_4 - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) - R_2 \cos \theta_2 = 0 \dots (8)$$

$$R_1 \sin \theta_1 + R_7 \sin \theta_7 - R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) - R_5 \sin \theta_5 - R_4 \sin \theta_4 - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) - R_2 \sin \theta_2 = 0 \dots (9)$$

بإسقاط العلاقة (5) على محوري الجملة الإحداثية:

$$R_1 \cos \theta_1 + R_7 \cos \theta_7 - R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) - R_8 \cos \theta_8 - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) - R_2 \cos \theta_2 = 0 \dots (10)$$

$$R_1 \sin \theta_1 + R_7 \sin \theta_7 - R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) - R_8 \sin \theta_8 - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) - R_2 \sin \theta_2 = 0 \dots (11)$$

بترتيب وجمع العلاقتين (6) و(7):

$$\begin{aligned} & -2R_2R_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2R_3R_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) - 2R_6R_1 \cos(\theta_1 - \theta_6) + \\ & 2R_7R_1 \cos(\theta_1 - \theta_7) + 2R_2R_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) + 2R_2R_6 \cos(\theta_2 - \theta_6) + \\ & 2R_3R_6 \cos(\theta_3 - \theta_6) - 2R_2R_7 \cos(\theta_2 - \theta_7) - 2R_3R_7 \cos(\theta_3 - \theta_7) - \\ & 2R_6R_7 \cos(\theta_6 - \theta_7) + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_6^2 + R_7^2 = 0 \dots (12) \end{aligned}$$

بقسمة العلاقتين (6) و(7):

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{R_1 \sin \theta_1 + R_7 \sin \theta_7 - R_6 \sin \theta_6 - R_2 \sin \theta_2}{R_1 \cos \theta_1 + R_7 \cos \theta_7 - R_6 \cos \theta_6 - R_2 \cos \theta_2}\right) \dots (13)$$

بترتيب وجمع العلاقتين (8) و(9):

$$\begin{aligned} & 2R_1R'_3 \cos(-\beta'_3 + \theta_1 - \theta_3) - 2R_1R'_6 \cos(-\beta'_6 + \theta_1 + \theta_6) \\ & + 2R_2R'_3 \cos(-\beta'_3 + \theta_2 - \theta_3) + 2R_4R'_3 \cos(\beta'_3 + \theta_3 - \theta_4) \\ & + 2R_5R'_3 \cos(\beta'_3 + \theta_3 - \theta_5) - 2R_7R'_3 \cos(\beta'_3 + \theta_3 - \theta_7) \\ & + 2R_2R'_6 \cos(-\beta'_6 + \theta_2 + \theta_6) \\ & + 2R_4R'_6 \cos(-\beta'_6 + \theta_4 + \theta_6) \\ & + 2R_5R'_6 \cos(-\beta'_6 + \theta_5 + \theta_6) \\ & - 2R_7R'_6 \cos(-\beta'_6 + \theta_6 + \theta_7) \\ & + 2R'_3R'_6 \cos(\beta'_3 - \beta'_6 + \theta_3 + \theta_6) + (R'_3)^2 + (R'_6)^2 \\ & - 2R_2R_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2R_4R_1 \cos(\theta_1 - \theta_4) \\ & - 2R_5R_1 \cos(\theta_1 - \theta_5) + 2R_7R_1 \cos(\theta_1 - \theta_7) \\ & + 2R_2R_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) + 2R_2R_5 \cos(\theta_2 - \theta_5) \\ & + 2R_4R_5 \cos(\theta_4 - \theta_5) - 2R_2R_7 \cos(\theta_2 - \theta_7) \\ & - 2R_4R_7 \cos(\theta_4 - \theta_7) - 2R_5R_7 \cos(\theta_5 - \theta_7) + R_1^2 + R_2^2 \\ & + R_4^2 + R_5^2 + R_7^2 = 0 \dots (14) \end{aligned}$$

بقسمة العلاقتين (8) و(9):

$$\theta_5 = \arctan\left(\frac{R_1 \sin \theta_1 + R_7 \sin \theta_7 - R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) - R_4 \sin \theta_4 - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) - R_2 \sin \theta_2}{R_1 \cos \theta_1 + R_7 \cos \theta_7 - R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) - R_4 \cos \theta_4 - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) - R_2 \cos \theta_2}\right) \dots (15)$$

بترتيب وجمع العلاقتين (10) و(11):

$$\begin{aligned} & R_2 R'_3 \sin(-\beta'_3 + \theta_2 - \theta_3) + R_2 R'_3 \sin(\beta'_3 + \theta_2 + \theta_3) + R_2 R'_6 \sin(-\beta'_6 + \theta_2 + \theta_6) + R_2 R'_6 \sin(\beta'_6 + \theta_2 - \theta_6) - 2R_1 R'_3 \cos(-\beta'_3 + \theta_1 - \theta_3) - \\ & 2R_1 R'_6 \cos(-\beta'_6 + \theta_1 + \theta_6) + R_2 R'_3 \cos(-\beta'_3 + \theta_2 - \theta_3) - R_2 R'_3 \cos(\beta'_3 + \theta_2 + \theta_3) - 2R_7 R'_3 \cos(\beta'_3 + \theta_3 - \theta_7) + 2R_8 R'_3 \cos(\beta'_3 + \theta_3 - \theta_8) + \\ & R_2 R'_6 \cos(-\beta'_6 + \theta_2 + \theta_6) - R_2 R'_6 \cos(\beta'_6 + \theta_2 - \theta_6) - 2R_7 R'_6 \cos(-\beta'_6 + \theta_6 + \theta_7) + 2R_8 R'_6 \cos(-\beta'_6 + \theta_6 + \theta_8) + \\ & 2R'_3 R'_6 \cos(\beta'_3 - \beta'_6 + \theta_3 + \theta_6) + (R'_3)^2 + (R'_6)^2 + R_2 R_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) - R_2 R_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) - R_2 R_7 \sin(\theta_2 - \theta_7) - R_2 R_7 \sin(\theta_2 + \theta_7) + \\ & R_2 R_8 \sin(\theta_2 - \theta_8) + R_2 R_8 \sin(\theta_2 + \theta_8) - R_2 R_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + R_2 R_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + 2R_7 R_1 \cos(\theta_1 - \theta_7) - 2R_8 R_1 \cos(\theta_1 - \theta_8) - \\ & R_2^2 \cos(2\theta_2) - R_2 R_7 \cos(\theta_2 - \theta_7) + R_2 R_7 \cos(\theta_2 + \theta_7) + R_2 R_8 \cos(\theta_2 - \theta_8) - R_2 R_8 \cos(\theta_2 + \theta_8) - 2R_7 R_8 \cos(\theta_7 - \theta_8) + R_1^2 + R_2^2 + R_7^2 + R_8^2 = \\ & 0 \dots (16) \end{aligned}$$

بقسمة العلاقتين (10) و(11):

$$\theta_8 = \arctan\left(\frac{R_1 \sin \theta_1 + R_7 \sin \theta_7 - R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) - R_2 \sin \theta_2}{R_1 \cos \theta_1 + R_7 \cos \theta_7 - R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) - R_2 \cos \theta_2}\right) \dots (17)$$

من العلاقات السابقة نستنتج أن جميع المجاهيل يمكن كتابتها بدلالة الزاوية θ_2 .

وبفرض أن:

$$\dot{\theta}_{n2} = \frac{d\theta_n}{d\theta_2} \quad (n = 3,4,5,6,7,8) \dots (18)$$

باشتقاق العلاقات السابقة نجد:

$$-R_7 \sin \theta_7 \dot{\theta}_{72} + R_6 \sin \theta_6 \dot{\theta}_{62} + R_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_{32} + R_2 \sin \theta_2 = 0 \dots (19)$$

$$R_7 \cos \theta_7 \dot{\theta}_{72} - R_6 \cos \theta_6 \dot{\theta}_{62} - R_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_{32} - R_2 \cos \theta_2 = 0 \dots (20)$$

$$\begin{aligned} -R_7 \sin \theta_7 \dot{\theta}_{72} - R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62} + R_5 \sin \theta_5 \dot{\theta}_{52} \\ + R_4 \sin \theta_4 \dot{\theta}_{42} + R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32} + R_2 \sin \theta_2 \\ = 0 \dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_7 \cos \theta_7 \dot{\theta}_{72} + R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62} - R_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_{52} \\ - R_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_{42} - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32} - R_2 \cos \theta_2 \\ = 0 \dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -R_7 \sin \theta_7 \dot{\theta}_{72} - R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62} + R_8 \sin \theta_8 \dot{\theta}_{82} \\ + R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32} + R_2 \sin \theta_2 = 0 \dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_7 \cos \theta_7 \dot{\theta}_{72} + R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62} - R_8 \cos \theta_8 \dot{\theta}_{82} \\ - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32} - R_2 \cos \theta_2 = 0 \dots (24) \end{aligned}$$

مع ملاحظة أن كلاً من المقدارين $R_1 = AG, \theta_1$ هو مقدار ثابت وبالتالي مشتقه

معدوم.

باستخدام المصفوفات نكتب العلاقات (19)، (20)، (23)، (24) بالشكل الآتي:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin(\theta_7)R_7 & \sin(\theta_6)R_6 & \sin(\theta_3)R_3 \\ 0 & \cos(\theta_7)R_7 & -\cos(\theta_6)R_6 & -\cos(\theta_3)R_3 \\ \sin(\theta_8)R_8 & -\sin(\theta_7)R_7 & \sin(\theta_6 - \beta'_6)R'_6 & \sin(\theta_3 + \beta'_3)R'_3 \\ -\cos(\theta_8)R_8 & \cos(\theta_7)R_7 & \cos(\theta_6 - \beta'_6)R'_6 & -\cos(\theta_3 + \beta'_3)R'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{82} \\ \dot{\theta}_{72} \\ \dot{\theta}_{62} \\ \dot{\theta}_{32} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -R_2 \sin \theta_2 \\ R_2 \cos \theta_2 \\ -R_2 \sin \theta_2 \\ R_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix} \dots (25)$$

ويحل المعادلات السابقة نحصل على الحل الآتي:

$$\begin{pmatrix} \frac{R_2 \sin(\theta_2 - \theta_7)(R_3(R'_6 \sin(-\beta'_6 + \theta_3 + \theta_6) + R_6 \sin(\theta_3 - \theta_6)) - R'_3(R'_6 \sin(\beta'_3 - \beta'_6 + \theta_3 + \theta_6) + R_6 \sin(\beta'_3 + \theta_3 - \theta_6)))}{R_8(R_6 \sin(\theta_6 - \theta_7)R'_3 \sin(\beta'_3 + \theta_3 - \theta_8) + R_3(R_6 \sin(\theta_3 - \theta_6) \sin(\theta_7 - \theta_8) - \sin(\theta_3 - \theta_7)R'_6 \sin(-\beta'_6 + \theta_6 + \theta_8)))} \\ \frac{R_2(R_3(\sin(\theta_2 - \theta_3)R'_6 \sin(-\beta'_6 + \theta_6 + \theta_8) + R_6 \sin(\theta_3 - \theta_6) \sin(\theta_2 - \theta_8)) - R_6 \sin(\theta_2 - \theta_6)R'_3 \sin(\beta'_3 + \theta_3 - \theta_8))}{R_7(R_6 \sin(\theta_6 - \theta_7)R'_3 \sin(\beta'_3 + \theta_3 - \theta_8) + R_3(R_6 \sin(\theta_3 - \theta_6) \sin(\theta_7 - \theta_8) - \sin(\theta_3 - \theta_7)R'_6 \sin(-\beta'_6 + \theta_6 + \theta_8)))} \\ \frac{R_2 \sin(\theta_2 - \theta_7)(R_3 \sin(\theta_3 - \theta_8) - R'_3 \sin(\beta'_3 + \theta_3 - \theta_8))}{R_6 \sin(\theta_6 - \theta_7)R'_3 \sin(\beta'_3 + \theta_3 - \theta_8) + R_3(R_6 \sin(\theta_3 - \theta_6) \sin(\theta_7 - \theta_8) - \sin(\theta_3 - \theta_7)R'_6 \sin(-\beta'_6 + \theta_6 + \theta_8))} \\ \frac{R_2 \sin(\theta_2 - \theta_7)(R'_6 \sin(-\beta'_6 + \theta_6 + \theta_8) - R_6 \sin(\theta_6 - \theta_8))}{R_6 \sin(\theta_6 - \theta_7)R'_3 \sin(\beta'_3 + \theta_3 - \theta_8) + R_3(R_6 \sin(\theta_3 - \theta_6) \sin(\theta_7 - \theta_8) - \sin(\theta_3 - \theta_7)R'_6 \sin(-\beta'_6 + \theta_6 + \theta_8))} \end{pmatrix} \dots (26)$$

بالعودة إلى المعادلة (21)، (22) نحصل على:

$$\begin{aligned} R_5 \sin \theta_5 \dot{\theta}_{52} + R_4 \sin \theta_4 \dot{\theta}_{42} \\ = R_7 \sin \theta_7 \dot{\theta}_{72} + R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62} \\ - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32} - R_2 \sin \theta_2 \dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_{52} + R_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_{42} \\ = R_7 \cos \theta_7 \dot{\theta}_{72} + R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62} \\ - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32} - R_2 \cos \theta_2 \dots (28) \end{aligned}$$

باستخدام المصفوفات نكتب العلاقات (27)، (28) بالشكل الآتي:

$$\begin{pmatrix} R_5 \sin \theta_5 & R_4 \sin \theta_4 \\ R_5 \cos \theta_5 & R_4 \cos \theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{52} \\ \dot{\theta}_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \dots (29)$$

حيث:

$$P = R_7 \sin \theta_7 \dot{\theta}_{72} + R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62} - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32} - R_2 \sin \theta_2 \dots (30)$$

$$Q = R_7 \cos \theta_7 \dot{\theta}_{72} + R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62} - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32} - R_2 \cos \theta_2 \dots (31)$$

وبحل المعادلتين السابقتين نجد:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\csc(\theta_5)(P \sin(\theta_5) \cos(\theta_4) - Q \sin(\theta_4) \sin(\theta_5))}{R_5(\sin(\theta_4) \cos(\theta_5) - \sin(\theta_5) \cos(\theta_4))} \\ \frac{P \cos(\theta_5) - Q \sin(\theta_5)}{R_4(\sin(\theta_4) \cos(\theta_5) - \sin(\theta_5) \cos(\theta_4))} \end{pmatrix} \dots (32)$$

بالاعتماد على العلاقات السابقة نستطيع حساب السرعة الزاوية لكل جسم:

$$w_j = \dot{\theta}_{j2}; j = 3,4,5,6,7$$

باشتقاق العلاقات (19)، (20)، (21)، (22)، (23)، (24) نحصل على:

$$\begin{aligned} -R_7 \sin \theta_7 \ddot{\theta}_{72} + R_6 \sin \theta_6 \ddot{\theta}_{62} + R_3 \sin \theta_3 \ddot{\theta}_{32} \\ = R_7 \cos \theta_7 \dot{\theta}_{72}^2 - R_6 \cos \theta_6 \dot{\theta}_{62}^2 - R_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_{32}^2 \\ - R_2 \cos \theta_2 \dots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_7 \cos \theta_7 \ddot{\theta}_{72} - R_6 \cos \theta_6 \ddot{\theta}_{62} - R_3 \cos \theta_3 \ddot{\theta}_{32} \\ = R_7 \sin \theta_7 \dot{\theta}_{72}^2 - R_6 \sin \theta_6 \dot{\theta}_{62}^2 - R_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_{32}^2 \\ - R_2 \sin \theta_2 \dots (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -R_7 \sin \theta_7 \ddot{\theta}_{72} - R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) \ddot{\theta}_{62} + R_5 \sin \theta_5 \ddot{\theta}_{52} \\
& + R_4 \sin \theta_4 \ddot{\theta}_{42} + R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) \ddot{\theta}_{32} \\
& = R_7 \cos \theta_7 \dot{\theta}_{72}^2 - R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62}^2 \\
& - R_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_{52}^2 - R_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_{42}^2 \\
& - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32}^2 - R_2 \cos \theta_2 \dots (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_7 \cos \theta_7 \ddot{\theta}_{72} + R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) \ddot{\theta}_{62} - R_5 \cos \theta_5 \ddot{\theta}_{52} \\
& - R_4 \cos \theta_4 \ddot{\theta}_{42} - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) \ddot{\theta}_{32} \\
& = R_7 \sin \theta_7 \dot{\theta}_{72}^2 - R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62}^2 \\
& - R_5 \sin \theta_5 \dot{\theta}_{52}^2 - R_4 \sin \theta_4 \dot{\theta}_{42}^2 \\
& - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32}^2 - R_2 \sin \theta_2 \dots (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -R_7 \sin \theta_7 \ddot{\theta}_{72} - R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) \ddot{\theta}_{62} + R_8 \sin \theta_8 \ddot{\theta}_{82} \\
& + R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) \ddot{\theta}_{32} \\
& = R_7 \cos \theta_7 \dot{\theta}_{72}^2 - R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62}^2 \\
& - R_8 \cos \theta_8 \dot{\theta}_{82}^2 - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32}^2 \\
& - R_2 \cos \theta_2 \dots (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_7 \cos \theta_7 \ddot{\theta}_{72} + R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) \ddot{\theta}_{62} - R_8 \cos \theta_8 \ddot{\theta}_{82} \\
& - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) \ddot{\theta}_{32} \\
& = R_7 \sin \theta_7 \dot{\theta}_{72}^2 - R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62}^2 \\
& - R_8 \sin \theta_8 \dot{\theta}_{82}^2 - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32}^2 \\
& - R_2 \sin \theta_2 \dots (38)
\end{aligned}$$

حيث:

$$\ddot{\theta}_{n2} = \frac{d^2 \theta_n}{d\theta_2^2} (n = 3,4,5,6,7,8) \dots (39)$$

باستخدام المصفوفات نكتب العلاقات (33)، (34)، (37)، (38) بالشكل الآتي:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin(\theta_7)R_7 & \sin(\theta_6)R_6 & \sin(\theta_3)R_3 \\ 0 & \cos(\theta_7)R_7 & -\cos(\theta_6)R_6 & -\cos(\theta_3)R_3 \\ \sin(\theta_8)R_8 & -\sin(\theta_7)R_7 & \sin(\theta_6 - \beta'_6)R'_6 & \sin(\theta_3 + \beta'_3)R'_3 \\ -\cos(\theta_8)R_8 & \cos(\theta_7)R_7 & \cos(\theta_6 - \beta'_6)R'_6 & -\cos(\theta_3 + \beta'_3)R'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{82}'' \\ \theta_{72}'' \\ \theta_{62}'' \\ \theta_{32}'' \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \theta_{32}^{\cdot 2} R_3 (-\cos(\theta_3)) - R_2 \cos(\theta_2) - \theta_{62}^{\cdot 2} R_6 \cos(\theta_6) + \theta_{72}^{\cdot 2} R_7 \cos(\theta_7) \\ \theta_{32}^{\cdot 2} R_3 (-\sin(\theta_3)) - R_2 \sin(\theta_2) - \theta_{62}^{\cdot 2} R_6 \sin(\theta_6) + \theta_{72}^{\cdot 2} R_7 \sin(\theta_7) \\ \theta_{32}^{\cdot 2} R'_3 (-\cos(\beta'_3 + \theta_3)) - \theta_{62}^{\cdot 2} R'_6 \cos(\theta_6 - \beta'_6) - R_2 \cos(\theta_2) + \theta_{72}^{\cdot 2} R_7 \cos(\theta_7) - \theta_{82}^{\cdot 2} R_8 \cos(\theta_8) \\ \theta_{32}^{\cdot 2} R'_3 (-\sin(\beta'_3 + \theta_3)) + \theta_{62}^{\cdot 2} R'_6 \sin(\theta_6 - \beta'_6) - R_2 \sin(\theta_2) + \theta_{72}^{\cdot 2} R_7 \sin(\theta_7) - \theta_{82}^{\cdot 2} R_8 \sin(\theta_8) \end{pmatrix} \dots (40)$$

ويحل المعادلات السابقة نحصل على قيم θ_{82}'' و θ_{72}'' و θ_{62}'' و θ_{32}''

بالعودة إلى المعادلة (35) (36) نحصل على:

$$R_5 \sin \theta_5 \theta_{52}'' + R_4 \sin \theta_4 \theta_{42}'' = R_7 \sin \theta_7 \theta_{72}'' + R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) \theta_{62}'' - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) \theta_{32}'' + R_7 \cos \theta_7 \theta_{72}^{\cdot 2} - R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) \theta_{62}^{\cdot 2} - R_5 \cos \theta_5 \theta_{52}^{\cdot 2} - R_4 \cos \theta_4 \theta_{42}^{\cdot 2} - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) \theta_{32}^{\cdot 2} - R_2 \cos \theta_2 \dots (41)$$

$$R_5 \cos \theta_5 \theta_{52}'' + R_4 \cos \theta_4 \theta_{42}'' = R_7 \cos \theta_7 \theta_{72}'' + R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) \theta_{62}'' - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) \theta_{32}'' - R_7 \sin \theta_7 \theta_{72}^{\cdot 2} + R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) \theta_{62}^{\cdot 2} + R_5 \sin \theta_5 \theta_{52}^{\cdot 2} + R_4 \sin \theta_4 \theta_{42}^{\cdot 2} + R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) \theta_{32}^{\cdot 2} + R_2 \sin \theta_2 \dots (42)$$

باستخدام المصفوفات نكتب العلاقات (27)، (28) بالشكل الآتي:

$$\begin{pmatrix} R_5 \sin \theta_5 & R_4 \sin \theta_4 \\ R_5 \cos \theta_5 & R_4 \cos \theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{52}'' \\ \theta_{42}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \dots (43)$$

حيث

$$V = R_7 \sin \theta_7 \ddot{\theta}_{72} + R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) \ddot{\theta}_{62} - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) \ddot{\theta}_{32} + R_7 \cos \theta_7 \dot{\theta}_{72}^2 - R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62}^2 - R_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_{52}^2 - R_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_{42}^2 - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32}^2 - R_2 \cos \theta_2 \dots (44)$$

$$W = R_7 \cos \theta_7 \ddot{\theta}_{72} + R'_6 \cos(\beta'_6 - \theta_6) \ddot{\theta}_{62} - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta'_3) \ddot{\theta}_{32} - R_7 \sin \theta_7 \dot{\theta}_{72}^2 + R'_6 \sin(\beta'_6 - \theta_6) \dot{\theta}_{62}^2 + R_5 \sin \theta_5 \dot{\theta}_{52}^2 + R_4 \sin \theta_4 \dot{\theta}_{42}^2 + R'_3 \sin(\theta_3 + \beta'_3) \dot{\theta}_{32}^2 + R_2 \sin \theta_2 \dots (45)$$

وبحل المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$\left(\begin{array}{l} -\frac{\csc(\theta_5)(V \sin(\theta_5) \cos(\theta_4) - W \sin(\theta_4) \sin(\theta_5))}{R_5(\sin(\theta_4) \cos(\theta_5) - \sin(\theta_5) \cos(\theta_4))} \\ \frac{V \cos(\theta_5) - W \sin(\theta_5)}{R_4(\sin(\theta_4) \cos(\theta_5) - \sin(\theta_5) \cos(\theta_4))} \end{array} \right) \dots (46)$$

بالاستفادة من العلاقتين (45)، (46) يُمكن حساب التسارع الزاوي لكل جسم بالعلاقة:

$$a_j = \dot{\theta}_{j2} w_2^2 + \theta_{j2} a_2; \quad j = 3, 4, 5, 6, 7 \dots (47)$$

6. الاستنتاجات والتوصيات:

الاستنتاجات:

من خلال البحث تم التوصل إلى الحل الرياضي الذي يعطي التحليل الحركي لمنظومة مستوية مولدة بالآلية السباعية، ومن خلال هذه المعادلات اتضحت معادلات الإزاحة للنقطة الخاصة المدروسة والجسم الخاص المدروس. حيث يمكن توظيف المسار المدروس لأداء حركة معقدة يصعب تحقيقها بالآلات الأبسط، كما يمكن من خلال ضبط البارامترات بدقة مثل أبعاد القضبان والأجسام وسرعة المحرك الذي يقود حركة الآلة، يمكن معرفة السرعة والتسارع ليس فقط للجسم الخاص والنقطة الخاصة وإنما لكل عناصر الآلية.

يمكن توظيف هذه الآلية والمسار الناتج عنها في أداء حركة معينة لذراع روبوتية أو أداة قطع لآلة تشغيل مبرمجة مثلاً وتوظيف تلك الحركة في أداء وظيفة ميكانيكية معقدة.

التوصيات:

- الاستفادة من المعادلات الرياضية الناتجة، وتوظيفها في الحياة العملية وفي الأبحاث الميكانيكية لأداء وظائف معينة.
- دراسة إمكانية توصيل الآلة السباعية المدروسة مع آلات بسيطة أخرى، والاستفادة من المعادلات التي تم الحصول عليها في إيجاد حلول رياضية، من أجل دراسة حركة آلات أكثر تعقيداً مما يولد مسارات جديدة وبتيح لابتكار آلات جديدة تلبي المتطلبات التصنيعية المتزايدة.

7. المراجع

- 1- Dr. Bob Williams, 2014- An Atlas of Structures, Mechanisms, and Robots, Mechanical Engineering, Ohio University, Ohio, USA, 61P.
- 2- Guowu Wei & Jian S. Dai, 2010 - Geometric and kinematic analysis of a seven-bar three-fixed-pivoted compound-joint mechanism, Mechanism and Machine Theory, Vol (45), 170-184.
- 3- J. D. Greenough, et al., 1995- Design of hybrid machine, Proceedings of the 9th IFTOMM World Congress 2501-2505.
- 4- Ali Kirecci and L. Canan Dulger, 2000- A study on a hybrid actuator, Mechanism and Machine Theory, 35 (8) (2000) 1141-1149.
- 5- L. C. Dulger, Ali Kirecci and M. Topalbekiroglu, 2003- Modeling and simulation of a hybrid actuator, Mechanism and Machine Theory, 38 (5) 395-407.
- 6- Bhartendu Seth and Sessa Sai Vaddi, 2003- Programmable function generators—1: base five-bar mechanism, Mechanism and Machine Theory, 38 (4) 321-330.
- 7- Sessa Sai Vaddi and Bhartendu Seth, 2003- Programmable function generators – 2: seven-bar translatory-out mechanism, Mechanism and Machine Theory, 38 (4) 331-343.
- 8- Hui Li and Ce Zhang, 2004- Research on the feasibility of hybrid-driven mechanical press, Mechanical Science and Technology, 23 (10) 1253-1256.
- 9- Hui Li, Yuping Zhang, Haiqi Zheng, 2008- Dynamics modeling and simulation of a new nine-bar press with hybrid-driven mechanism, Journal of Mechanical Science and Technology, 22 (12) 2436-2444.
- 10- Hui Li, 2003- Fundamental study on the hybrid-driven programmable mechanical press, Ph.D. Thesis, Tianjin University, Tianjin, China.

11- د. نزيه يوسف، نظرية الآلات 2018، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، منشورات جامعة البعث.

- 12- وليد حمدان، دراسة آلة ستيفنسون المضاعفة. (رسالة ماجستير-جامعة البعث 2015 -).
- 13- د. مصطفى حسن، وليد حمدان، دراسة حول آلة ستيفنسون المضاعفة بوصلة ذات مفصلين (بحث منشور في مجلة جامعة البعث- المجلد- 36 عام 2014).
- 14- د. نوفل الأحمد، نظرية الآلات 1995 ، ص 85 حتى ص 90 ، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، منشورات جامعة تشرين.