دراسة استقرار المنظومات الديناميكية المتزاوجة

*نسرين الأسعد،** محمد العلي،*** عبد الباسط الخطيب

ملخص البحث:

عرفنا في هذا البحث بعض المفاهيم المتعلقة بنظرية البيان والمصفوفات غير السالبة وبينا العلاقة بين نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة وذلك من خلال رسم البيان الموجه المقترن بالمصفوفات غير السالبة. وقد وضعنا بعض المبرهنات التي يمكن من خلالها معرفة بعض خواص المصفوفات غير السالبة (عدم قابلية الاختزال والاولية والاحتمالية ومصفوفات سيا). وقد وضعنا تطبيقاً عملياً يوضح العلاقة بين المصفوفات غير السالبة والبيانات الموجهة، وكذلك عرفنا المنظومات الديناميكية المتزاوجة، وأثبتنا بعض المبرهنات التي تفيدنا في دراسة استقرار المنظومات الديناميكية المتزاوجة بالاعتماد على نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة.

الكلمات المفتاحية: المصفوفات غير السالبة، البيانات الموجهة، المصفوفات غير قابلة للاختزال، المصفوفات الأولية، المصفوفات الاحتمالية، المنظومات الديناميكية المتزاوجة.

*) طالبة ماجستير مكانيك رياضي في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث– حمص– سوريا.

**) دكتور مكانيك رياضي في قسم الرياضيات – كمية العلوم– جامعة البعث– حمص– سوريا.

***) أستاذ دكتور جبر خطي في قسم الرياضيات – كمية العلوم– جامعة البعث– حمص– سوريا.

AStudy on the Stability of Coupled Dynamical Systems

Nsreen Alasaad,** Mouhammad Alali, Abd Albaset Alkhateb**

ABSTRACT

In this paper, we define some concepts related to graph theory and nonnegative matrices, as we illustrate the relationship between graph theory and non-negative matrices by drawing a digraph associated with nonnegative matrices. We state some theorems through which we were able to know some properties of non-negative matrices as, Irreducible matrices, Primitive matrices, Stochastic matrices and SIA matrices . Finally, we deal with a practical application that shows the relationship between non-negative matrices and digraphs. We also define coupled dynamic systems and we have proven some theorems that help us in studying the stability of coupled dynamical systems by relying on the graph theory and non-negative matrices.

Key words: Nonnegative Matrices, Digraphs, Irreducible Matrices, Primitive Matrices, Stochastic Matrices, Coupled Dynamical Systems.

*) master student, Department of mathematics–Faculty of science–Albaath university Homs–Syria.

**) Doctor of mechanics, Department of mathematics–Faculty of science – AlBaath university Homs–Syria.

***) professor of linear algebra, Department of mathematics –Faculty of science– AlBaath university Homs–Syria.

1. مقدمة البحث

تعريف البيان: هو عبارة عن بنية بسيطة تتكون من عقد وأوتار، تمثل العقد عناصر المسألة وتكون الأوتار هي العلاقة بين هذه العناصر.

على أرض الواقع قد تكون هذه العقد مدناً، والأوتار هي الطرق بينها أو قد تكون العقد جزيئات كيميائية، والأوتار هي الروابط بينها.

على الرغم من استخدام البيان في الكثير من مجالات الحياة إلا أنه لم يُدرس بحد ذاتهِ حتى العام 1936 حيث ألف العالم كونغ كتاباً اسمه نظرية البيان، أصبحت بعدهُ نظرية البيان فرعاً من فروع الرياضيات نستطيع من خلاله البحث عن حلول في مختلف المجالات.

في هذا البحث قمنا بإيجاد علاقة بين نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة وذلك من خلال رسم البيان الموجه المقترن بالمصفوفة غير السالبة، واستطعنا بذلك معرفة العديد من خواص المصفوفات غير السالبة، وقمنا بدراسة خواص المنظومات الديناميكية المتزاوجة بالاعتماد على نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة.

2. هدف البحث

توفير قاعدة رياضية في نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة، ومعرفة بعض خواص المصفوفات غير السالبة، ودراسة استقرار المنظومات الديناميكية المتزاوجة وذلك بالاعتماد على نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة.

3. طرق أدوات البحث

في هذا البحث تم الاعتماد على نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة، لدراسة استقرار وجذب المنظومات الديناميكية المتزاوجة.

4. مشكلة البحث

قد نعلم من خلال دراسات سابقة السلوك الديناميكي لمنظومة ديناميكية معينة عندما تتطور مع الزمن بشكل منفرد، إلا أن معرفتنا بهذه السلوكية المنفردة لن يؤدي إلى معرفة السلوكية الكلية لمجموعة المنظومات السابقة في حال التزاوج فيما بينها الذي ينتج عنه تأثير متبادل فيما بينها. تعتبر مسألة الربط ما بين الديناميكية المنفردة والديناميكية المتزاوجة من المسائل الهامة المفتوحة حالياً والتي لا يزال البحث فيها قائماً. ونعتبر هذا البحث مدخلاً مهماً للتعريف بهذه المسألة ومحاولة حلها والحصول على نتائج جديدة.

5. المناقشة والنتائج

من أجل متطلبات هذا البحث تلزمنا التعاريف التالية:

تعريف البيان الموجه:

البيان الموجّه (أو الرسم الموجه) $\mathcal{G}$ يتكون من مجموعة غير خالية V من العناصر تدعى العقد ومجموعة محدودة E من الأزواج المرتبة من العقد تدعى أوتاراً، حيث نسمي V مجموعة العقد و E مجموعة الأوتار من $\mathcal{G}$ و نكتب $\mathcal{G}=(V,E)$ للدلالة على البيان الموجه الموصوف بمجموعة العقد V و ومجموعة الأوتار E.

تعريف الممرات والمسارات والدورات في البيان الموجه:

الممر في البيان الموجه $\mathcal{G}$ هو أي متتالية متناوبة من الشكل:

$$w : v_1 e_1 v_2 e_2 .. e_{k-1} v_k$$

من العقد v_i والأوتار e_i بحيث أن $e_i=(v_i,v_{i+1})$ لكل $i=1,2,...,k-1$. نقول عن W أنّه ممر من v_1 إلى v_k طوله هو عدد الأوتار في هذا الممر و هو $k-1$.

شبه الممر في البيان الموجه $\mathcal{G}$ يكون متتالية متناوبة من الشكل:

$$v_1e_1v_2e_2..e_{k-1}v_k$$

من العقد والأوتار بحيث إن: $e_i=(v_{i+1},v_i)$ أو $e_i=(v_i,v_{i+1})$ لكل $i=1,2,...,k-1$ عندئذٍ:

- إذا كانت العقد في الممر W مختلفة، فإنَّ W يكون مساراً .
- إذا كانت العقد $v_1,...,v_{k-1}$ مختفة وبحيث $v_1=v_k$ ، عندئذٍ W يكون دورة .
- تمثل المسارات والدورات حالات خاصة من الممرات.
- الدورات التي طولها 1 تكون حلقات، البيانات الموجهة بلا دورات تدعى لا دورية.

اتصالات البيانات الموجهة:

يُعدّ أحد مفاهيم نظرية البيان المهمة. سنقدم الآن بعض الأفكار المعنية بهذا الجانب من أشكال البيان الموجه تلزمنا التعاريف التالية:

تعاريف:

تعريف1: إذا وجد ممر في البيان الموجه G من عقدة أولى u إلى عقدة أخرى v قلنا أن v عقدة يمكن الوصول إليها من u ونكتب $u\to v$. وفي حال لم يتحقق ذلك نقول أن v هي عقدة لا يمكن الوصول إليها من u و نكتب $u\not\to v$.

تعريف 2: العقدة v التي يمكن الوصول إليها من كل عقدة في البيان الموجه G تدعى عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان في البيان الموجه، العقدة التي من خلالها نصل إلى جميع العقد في البيان الموجه تدعى عقدة مركزية في البيان الموجه .

تعريف 3: البيان الموجه G يكون متصل تماماً إذا كان من أجل كل عقدتان u,v يوجد وتر من u إلى v ووتر من v إلى u.

تعريف 4: البيان الموجه $\mathcal{G}$ يكون قوي الاتصال إذا كان من أجل كل عقدتان u ، v يمكن الوصول من أحدهما إلى الأخرى بشكل متبادل.

تعريف 5: البيان الموجه $\mathcal{G}$ متّصل بجانب واحد إذا كان من أجل كل عقدتين u ، v توجد واحدة على الأقل يمكن الوصول إليها من الأخرى.

تعريف 6: البيان الموجه $\mathcal{G}$ شبه قوي الاتصال **(QSC)** إذا كان من أجل أي عقدتين u ، v توجد العقدة w التي من خلالها يمكن الوصول إلى u ، v.

تعريف 7: البيان الموجه $\mathcal{G}$ ضعيف الاتصال إذا وجد من أجل أي عقدتين u ، v شبه ممر يحتوي هاتين العقدتين.

تعريف 8: البيان الموجه $\mathcal{G}$ عديم الاتصال إذا لم يكن حتى ضعيف الاتصال.

نتيجة 1: يمكن بسهولة ملاحظة أن البيان الموجه قوي الاتصال إذا وفقط إذا كانت كل عقدة في البيان الموجه يمكن الوصول إليها من كل مكان أو بشكل مكافئ كل عقدة في البيان الموجه $\mathcal{G}$ هي عقدة مركزية. من الواضح أن البيان الموجه $\mathcal{G}$ الذي يتكون من عقدة واحدة فقط يكون قوي الاتصال وذلك لأنَّ العقدة يمكن الوصول إليها من نفسها.

العمليات على البيانات الموجهة :

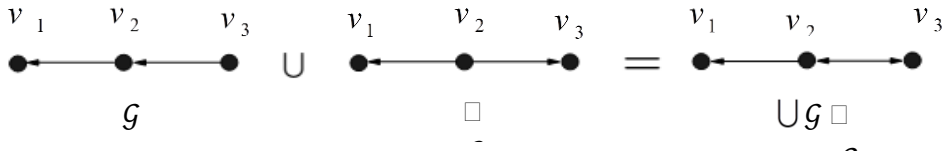
تعريف: ندعو البيان الموجه $\mathcal{G}^*$ الذي نحصل عليه من البيان الموجه $\mathcal{G}$ من خلال عكس كل اتجاهات البيان الموجه $\mathcal{G}$ بمعكوس البيان الموجه $\mathcal{G}$.

الشكل (1) : البيان الموجه و معاكس البيان الموجه .

- إذا كان $\mathcal{G}=(V,E)$ و $\mathcal{G}'=(V,E')$ بيانين موجهين فأن الاجتماع $\mathcal{G}\cup\mathcal{G}'$ هو البيان الموجه الذي يملك مجموعة الأوتار $E\cup E'$:

$$\mathcal{G}\cup\mathcal{G}'=(V,E\cup E')$$

يعطي الشكل **(2)** مثالاً يبين عملية الاجتماع لبيانين موجهين $\mathcal{G}\cup\mathcal{G}'$ بمجموعة العقد $\{v_1,v_2,,v_3\}$.



الشكل (2) اجتماع بيانين موجهين.

- إذا كانت U مجموعة جزئية غير خالية من V، نعرف البيان الموجه $(U,E\cap(U\times U))$ والذي يسمى بالبيان الموجّه الجزئي المحَّدث باستخدام المجموعة U.

- المركبة القوية من البيان الموجه $\mathcal{G}=(V,E)$ تكون البيان الموجه الجزئي المحدث الأعظمي من $\mathcal{G}$ ذي الاتصال القوي.

ملاحظة: نلاحظ أن البيان الموجّه الجزئي المُحدث الأعظمي ليس وحيداً في الحالة العامة.

إذا كانت $\mathcal{G}_1=(V_1,E_1),...,\mathcal{G}_k=(V_k,E_k)$ مركبات قوية من $\mathcal{G}=(V,E)$، من الواضح أن $V_1\cup...\cup V_k=V$ (نذكرّ بأن البيان الموجه المكون من عقدة واحدة فقط يكون قوي الاتصال) وأيضاً يجب أن يكون $V_i\cap V_j=\phi$ لكل $i\neq j$ وإلا جميع العقد في $V_i\cup V_j$ يمكن الوصول إليها من بعضها البعض، مما يعني أن العقد في $V_i\cup V_j$ تنتمي إلى نفس المركبة القوية للبيان الموجه $\mathcal{G}$.

من جهة أخرى من أجل البيان الموجه $\mathcal{G}=(V,E)$ مجموعة العقد غير الخالية $U\subseteq V$ مغلقة إذا لم يكن ممكناً الوصول من v إلى u حيث $u\in U$ و $v\in V-U$.

المركبة القوية $\mathcal{G}_1=(V_1,E_1)$ من البيان الموجّه $\mathcal{G}$ تكون مغلقة إذا كانت V_1 مغلقة في $\mathcal{G}$.

البيان الموجه الدوري:

تعريف: عندما يملك **(**أي بيان موجه**)** دورات فأننا نعرف الدور d للبيان الموجه $\mathcal{G}$ بالقاسم المشترك الأكبر لجميع أطوال دورات البيان الموجه $\mathcal{G}$. وندعو البيان الموجه دورياً عندما يكون $d>1$ و يكون غير دوري عندما $d=1$.

تلزمنا أيضاً المبرهنة التالية [5,7]:

مبرهنة (1) :

من أجل البيان الموجه $\mathcal{G}=(V,E)$ العبارات التالية تكون متكافئة:

a)- البيان الموجه $\mathcal{G}$ شبه قوي الاتصال.

b)- البيان الموجه $\mathcal{G}$ يملك عقدة مركزية.

c)- البيان الموجه المعاكس $\mathcal{G}^*$ يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان.

d)-البيان الموجه المعاكس $\mathcal{G}^*$ يملك مركب مغلق قوي واحد فقط.

كما يلزمنا في البحث، التمهيدية [7]:

التمهيدية (1) :

أي بيان موجه $\mathcal{G}=(V,E)$ يملك مركب مغلق قوي واحد على الأقل، أيضاً إذا كانت المجموعة غير الخالية $U\subset V$ مغلقة في $\mathcal{G}$ عندئذٍ $\mathcal{G}$ يملك مركب مغلق قوي أخر $\mathcal{G}_c=(V_c,E_c)$ يحقق أن $V_c\subseteq U$.

المصفوفات غير السالبة ونظرية البيان:

تعريف: المصفوفة غير السالبة هي مصفوفة جميع المدخلات فيها أكبر أو تساوي الصفر .

وعندما تكون مدخلات مصفوفة أكبر تماماً من الصفر ندعو المصفوفة بالمصفوفة الموجبة.

مصفوفات الجوار ، البيانات الموجهة المقترنة بالمصفوفة غير السالبة:

تعريف: من أجل المصفوفة غير السالبة E من المرتبة n البيان الموجه المقترن $\mathcal{G}(E)$ يتكون من n عقدة: $v_1,...,v_n$، حيث توجد أوتار مؤدية من v_i إلى v_j إذا وفقط إذا كان: $e_{ij} \neq 0$.

تعريف: مصفوفة الجوار $\bar{E} = (e_{ij}) \in R^{nxn}$ للبيان الموجه تكون المصفوفة التي من خلالها يكون $\bar{e}_{ij} = 1$ إذا وجدت أوتار مؤدية من v_i إلى v_j في $\mathcal{G}$ و $\bar{e}_{ij} = 0$ إذا لم توجد أوتار مؤدية من v_i إلى v_j.

المصفوفات غير المختزلة:

تعريف: المصفوفة E تكون مصفوفة مماثلة للمصفوفة $\tilde{E}$ إذا وُجدت مصفوفة تبديل P بحيث يكون: $PEP^T = \tilde{E}$.

تعريف: المصفوفة E من المرتبة n تسمى مصفوفة مختزلة عندما $n = 1$ وفي حال كانت $n > 1$ إذا كانت مصفوفة مماثلة للمصفوفة :

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

حيث B,D مصفوفات مربعة غير خالية. بخلاف ذلك نقول إن المصفوفة E غير مختزلة.

مبرهنة (2) :

المصفوفة غير السالبة E من المرتبة n تكون غير مختزلة إذا وفقط إذا كان البيان الموجه المقترن بالمصفوفة الغير السالبة E قوي الاتصال [1].

مبرهنة (3) :

لتكن E مصفوفة غير سالبة، يكون $e_{ij}^{(k)} > 0$ إذا وفقط إذا كان البيان الموجه المقترن بالمصفوفة E يملك ممر من العقدة v_i إلى العقدة v_j طوله k [2].

المصفوفات الأولية:

تعريف: المصفوفة غير السالبة E تسمى بالمصفوفة الأولية إذا وُجد عدد صحيح موجب k بحيث أن $E^k > 0$.

ولنلاحظ الآن إن المصفوفة الأولية تكون غير قابلة للاختزال، لكن العكس غير صحيح عموماً.

التمهيدية (2) :

ليكن $m_2, m_1 > 1$ عددان صحيحان، إذا كان $gcd\{m_1, m_2\} = 1$ عندئذٍ يوجد عدد صحيح $\bar{k} \geq 0$ بحيث إنه من أجل أي عدد صحيح $k \geq \bar{k}$ يكون :

$$k = \alpha m_1 + \beta m_2$$

حيث β, α أعداد غير سالبة مناسبة.

البرهان:

بما أن $gcd\{m_1,m_2\}=1$ ، فإن 1 يكتب على شكل تركيب خطي لـ m_1,m_2 ومنه يمكن أن نكتب :

$$1=\alpha_1 m_1-\beta_1 m_2 \qquad (1)$$

حيث α_1,β_1 عدادان غير سالبان .

بفرض أن $\bar{k}=\beta_1 m_2^2$ عندئذ يكون $\bar{k}\geq 0$ ، ولكل $k\geq\bar{k}$ يكون لدينا:

$$k=\beta_1 m_2^2+i.m_2+j \qquad (2)$$

من أجل العددان الصحيحان i , j بحيث أن $0\leq j<m_2$, $i\geq 0$. بتعويض (1) في (2) نحصل على:

$$\begin{aligned} k &= \beta_1 m_2^2+i.m_2+j\left(\alpha_1 m_1-\beta_1 m_2\right) \\ &= \left(j.\alpha_1\right)m_1+\left(\beta_1\left(m_2-j\right)+i\right).m_2 \end{aligned}$$

وبفرض أن: $\alpha=j\alpha_1$ و $\beta=\beta_1\left(m_2-j\right)+i$ ، فمن الواضح أن: β,α أعداد صحيحة غير سالبة، وبملاحظة أن $j<m_2$ نحصل على المطلوب.

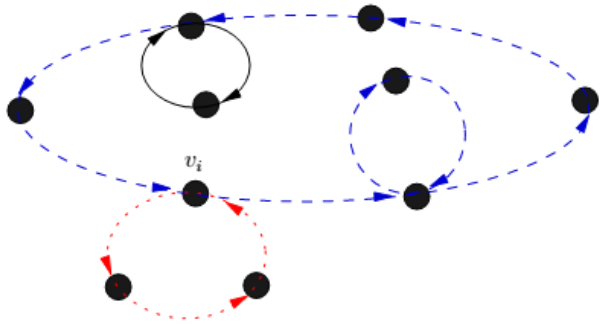
التمهيدية (3) :

لتكن d تمثل دورة البيان الموجه $\mathcal{G}$ و d_i تمثل دورة العقدة v_i في $\mathcal{G}$، بحيث $i=1,...,n$. إذا كان البيان الموجهٍ $\mathcal{G}$ قوي الاتصال عندئذٍ فإن $d=d_1=d_2=.....=d_n$.

البرهان:

لتكن $S=\{m_1,.....,m_p\}$ تمثل مجموعة جميع أطوال الدورات في $\mathcal{G}$. من الواضح أنها مجموعة منتهية وd يمثل القاسم المشترك الأكبر لعناصر المجموعة S. من

أجل أي عقدة v_i لتكن S_i مجموعة جميع أطوال الممرات من v_i إلى v_i وليكن d_i القاسم المشترك الأكبر لـعناصر المجموعة S_i ، إن أي ممر من v_i إلى v_i يكون إما دورة أو مُولَّد بعدد من الدورات.



الشكل (3) : الممر من v_i إلى v_i والذي يكون إما دورة أو مولد بعدد من الدورات.

(انظر الشكل **(3)**) وبالتالي يكون طول كل ممر (كل عنصر من S_i) تركيباً خطياً لـ m_j حيث $j=1,....,p$ بمعاملات صحيحة غير سالبة، وبالتالي فهو يقسم d ، القاسم المشترك الأكبر لـ m_j ، حيث $j=1,....,p$ ، وهذا يقتضي أن d_i تقسم d .

من جهة أخرى، باعتبار أن أي دورة في البيان الموجه طولها m_j وإذا كانت تمر من خلال العقدة v_1 عندئذٍ d_1 تقسم m_j ، أما إذا لم يكن ذلك فإنها تمر عبر عقدة أخرى ولتكن v_2.وبما أن البيان الموجه قوي الاتصال فلا بد من وجود دورة تمر من خلال: v_1 و v_2 ولنفرض أن طول هذه الدورة هو: m_k ، ومن ثم فإن d_1 يقسم m_k . نلاحظ أن هاتين الدورتين تُولِدانْ ممر طوله m_k+m_j من v_1 إلى v_1 ومنه فإن d_1 تقسم: m_k+m_j وأيضاً d_1 يقسم m_j وبالتالي d_1 يقسم أي عنصر m_j من S. هذا يعني أن d_1 يقسم d ، بالتالي $d=d_1$ ، بنفس الطريقة نستطيع أثبات أن $d=d_i$ لكل: $i=1,2,...,n$ إذا كان البيان الموجه $\mathcal{G}$ قوي الاتصال.

التمهيدية (4):

لتكن E مصفوفة غير سالبة من المرتبة $n\times n$ إذا كان البيان الموجه $\mathcal{G}(E)$ قوي الاتصال ودوري، دورهُ d عندئذٍ: $e_{ii}^{(k)}=0$، وذلك أياً كان k ليس من مضاعفات العدد d و $i=1,2,....n$.

البرهان:

لتكن d_i تمثل دورات العقد في $\mathcal{G}(E)$ بحيث إن $i=1,2,....n$ ومنه بحسب التمهيدية (2) يكون $d=d_1=...=d_n$.

وبما أن $\mathcal{G}(E)$ قوي الاتصال فأنه من أجل أي عقدة v_i في $\mathcal{G}(E)$، طول أي ممر من v_i إلى v_i يكون من مضاعفات العدد d ولا يوجد ممر من v_i إلى v_i طوله k ليس من مضاعفات العدد d. بالتالي نجد أن: $e_{ii}^{(k)}=0$ من أجل $i=1,2,....n$ و k ليس من مضاعفات العدد d.

مبرهنة (4):

المصفوفة غير السالبة E من المرتبة n تكون أولية إذا وفقط إذا كان البيان الموجه المقترن بالمصفوفة E قوي الاتصال وغير دوري.

البرهان:

لزوم الشرط: إذا كان البيان الموجه $\mathcal{G}(E)$ قوي الاتصال وغير دوري عندئذٍ الدورة من $\mathcal{G}$ والدورة لأي عقدة v_i تساوي 1. من أجل أي عقدة v_i لتكن $m_i^1,m_i^2(m_i^1\neq m_i^2)$ تمثل أطوال ممرين من v_i إلى v_i عندئذٍ يوجد عدد كبير بقدرٍ كافٍ $\overline{K_i}$ بحيث أنه من أجل أي: $k\geq\overline{k_i}$، k تكون تركيب صحيح غير سالب لـ m_i^1 و m_i^2 ، وهذا يعني بدورهُ وجود ممر طوله: k من v_i إلى v_i.

لتكن v_j تمثل عقدة أخرى بحيث أنه يوجد مسار من v_i إلى v_j وليكن طوله L_{ij}، بالتالي من أجل أي: $k \geq q_{ij} := \bar{k}_i + L_{ij}$، يوجد ممر طوله k من v_i إلى v_j، عندئذٍ ينتج عن المبرهنة (3) أن: $e_{ij}^{(k)} > 0$ لكل $k \geq q_{ij}$.

لتكن: $q = \max\{q_{ij} : i, j = 1,...,n\}$، بالتالي: $e_{ij}^{(k)} > 0$ لكل $i, j = 1,...,n$ و $k \geq q$ فمن تعريف المصفوفة الأولية E تكون مصفوفة أولية.

كفاية الشرط:

بفرض أن البيان الموجه $\mathcal{G}(E)$ ليس قوياً الاتصال أو أنه قوي الاتصال لكنه غير دوري

من أجل الحالة الأولى، أي البيان الموجه $\mathcal{G}(E)$ لا يكون قوي الاتصال، يوجد زوج من العقد: v_i، v_j، بحيث أن v_j لا يمكن الوصول إليها من v_i، لذلك ينتج عن المبرهنة (3) أن: $e_{ij}^{(k)} = 0$، لكل $k > 0$ بالتالي لا يوجد عدد طبيعي k بحيث أن E^k تكون موجبة و E ليست مصفوفة أولية.

من أجل الحالة الثانية التي فيها البيان الموجه $\mathcal{G}(E)$ قوي الاتصال ولكنه غير دوري، لنفرض أن دورهُ d حيث $d > 1$ ومنه حسب التمهيدية (2) نجد أن $e_{ii}^{(k')} = 0$ لأجل أي عدد صحيح موجب k' ليس من مضاعفات العدد d، بالتالي لا يوجد عدد طبيعي $\boldsymbol{k}$ بحيث تكون المصفوفة E^k موجبة وإلا فإنه إذا كان هناك عدد طبيعي k^* بحيث أن E^{k^*} موجبة عندئذٍ تكون E^k موجبة لكل $k \geq k^*$ مما يناقض كون $e_{ii}^{(k')} = 0$ لأجل أي عدد صحيح موجب k' ليس من مضاعفات العدد d، وبالتالي E تكون مصفوفة غير أولية، وهذا تناقض.

مبرهنة (5):

لتكن E مصفوفة غير سالبة وغير قابلة للاختزال. إن الشرطين الآتيين محققين:

a)- $\rho(E)$ تكون قيمة ذاتية بسيطة للمصفوفة E وأي قيمة ذاتية للمصفوفة E لها نفس الطويلة تكون بسيطة أيضاً.

b)- المصفوفة E تملك متجه ذاتي x يقابل القيمة الذاتية $\rho(E)$، وإذا كانت E مصفوفة أولية، عندئذٍ جميع القيم الذاتية الأخرى للمصفوفة E تملك طويلة أقل من $\rho(E)$ [1].

المصفوفات الاحتمالية:

تعريف: المصفوفة المربعة E تكون احتمالية إذا كانت المصفوفة E غير سالبة وكان مجموع كل صف فيها يساوي الواحد.

الآن نقدم بعض خواص المصفوفات الاحتمالية:

- إذا كانت المصفوفة E احتمالية، عندئذٍ $\rho(E)=1$.
- المصفوفة غير السالبة E احتمالية إذا وفقط إذا كان 1 متجه ذاتي للمصفوفة E يقابل القيمة الذاتية $\lambda=1$.
- إذا كانت المصفوفتين E_1,E_2 احتماليتين، عندئذٍ الجداء E_1E_2 يكون أيضاً مصفوفة احتمالية.

مبرهنة (6) :

لتكن E مصفوفة غير سالبة من المرتبة n ، إذا كان $\mathcal{G}(E)$ يملك k مركبات قوية مغلقة، عندئذٍ E تكون مصفوفة مشابهة للمصفوفة

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & E_1 & 0 \\ B_k & \cdots & B_1 & E_0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

حيث E_i تكون مصفوفات من المرتبة r_i و r_i تكون أعداد صحيحة مناسبة تحقق $0 \le r_0 < n$ و $0 < r_i < n (i = 1,...,k)$. علاوةً على ذلك، إذا كانت E مصفوفة احتمالية، عندئذٍ $p(E_i) = 1$ تكون قيم ذاتية بسيطة للمصفوفات E_i; $i = 1,...,k$ و $p(E_0) < 1$ عندما $r_0 \neq 0$ [7].

مصفوفة سيا (SIA):

تعريف: تسمى المصفوفة المربعة E احتمالية غير قابلة للتحليل وغير دورية سيا **(SIA)** إذا كانت E احتمالية وكذلك $Q = \lim_{k \to \infty} E^K$ موجودة وجميع الصفوف في Q متماثلة.

مبرهنة (7) :

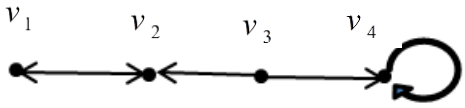
المصفوفة الاحتمالية E تكون مصفوفة SIA إذا وفقط إذا كان $\mathcal{G}(E)$ يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان و تكون غير دورية [7].

تطبيق:

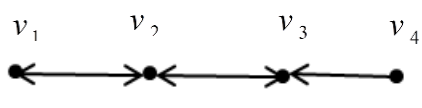
لتكن المصفوفات الأربعة الغير سالبة مُعطاة كالتالي:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

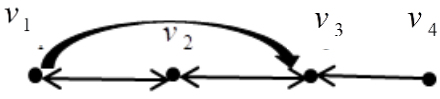
$$E_3=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0.5 & 0\\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \& \quad E_4=\begin{pmatrix}0 & 0.9 & 0.1 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$



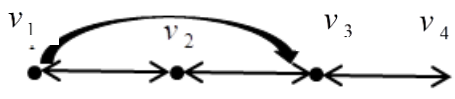
$\mathcal{G}(E_1)$



$\mathcal{G}(E_2)$



$\mathcal{G}(E_3)$



$\mathcal{G}(E_4)$

البيانات الموجهة المقترنة بالمصفوفات الغير السالبة

البيان الموجه $\mathcal{G}(E_1)$ لا يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان لذلك المصفوفة E_1 لا تكون مصفوفة سيا. البيان الموجه $\mathcal{G}(E_2)$ يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان (العقد v_1 , v_2,v_3 تكون عقد يمكن الوصول إليها من أي مكان)، لكن هذه العقد دورية دورها 2، لذلك المصفوفة E_2 لا تكون مصفوفة سيا. لكن البيان الموجه $\mathcal{G}(E_3)$ يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان، العقدة v_1 وتكون غير دورية $(d_1=gcd\{2.3\}=1)$ لذلك تكون المصفوفة E_3 مصفوفة سيا.

أيضاً البيان الموجه $\mathcal{G}(E_4)$ قوي الاتصال وغير دوري ويملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان، التي تكون غير دورية، لذلك المصفوفة E_4 تكون مصفوفة سيا.

مصفوفة ميتزلر والمصفوفة المولدة:

تعريف: ندعو كل مصفوفة حقيقية مربعة بحيث عناصرها الغير قطرية غير سالبة بمصفوفة ميتزلر.

ونقول عن مصفوفة ما أنها مصفوفة مولدة إذا كانت مصفوفة ميتزلر ومجموع كل صف من صفوفها يساوي الصفر.

مبرهنة (8):

الصفر يكون قيمة ذاتية للمصفوفة A و1 متجه ذاتي يميني مقترن، بينما جميع القيم الذاتية الأخرى تملك جزء حقيقي سالب [7].

مبرهنة (9):

إذا كان البيان الموجه $\mathcal{G}_A$ المقترن بالمصفوفة المولدة A قوي الاتصال، عندئذٍ القيمة الذاتية الصفرية لـلمصفوفة A تكون بسيطة. علاوةً على ذلك يقترن بالقيمة الذاتية الصفرية متجه ذاتي يميني 1 ومتجه ذاتي يساري يكون متجه موجب [7].

تعريف المنظومة الديناميكية المتزاوجة:

هي منظومة مؤلفة من منظومات جزئية (أعضاء) بحيثُ يؤثر موضع أحد الأعضاء في التطور الزمني للأعضاء الأخرى.

جداء كرونكر وخواصهُ:

نرمز لجداء كرونكر للمصفوفتين $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ و $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ بـالرمز $A \otimes B$ وهو مصفوفة من السعة $np \times mq$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{np\times mq}$$

يملك جداء كرونكر خواص متعددة نذكرمنها:

a- $(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$

b- $(A\otimes B)^T = A^T \otimes B^T$

c- إذا كان $A,C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ و $B,D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ عندئذٍ:

$$(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD)$$

d- إذا كانت $\lambda_1,...,\lambda_m$ قيم ذاتية للمصفوفة $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ و $\mu_1,...,\mu_n$ قيم ذاتية للمصفوفة $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ، عندئذٍ القيم الذاتية للمصفوفة $A\otimes B$ هي الأعداد $\lambda_r \mu_s$ حيث $r = 1,...,m \quad ; \quad s = 1,...,n$

البيان الموجه التفاعلي:

تعريف: نرمز لهُ بالرمز $\mathcal{G}_p = (V, E_p)$ ويتكون من:

- مجموعة محدودة V من العقد، العقدة i تمثل العضو(الوكيل) i.

- مجموعة الأوتار E_p تمثل الروابط بين الأعضاء، حيثُ يشير الوتر من العقدة i إلى العقدة j إلى أن العضو j هو مجاور العضو i، أي أن $a_{ij}(p) \neq 0$. نرمز لمجموعة مجاورات العضو i بالرمز $N_i(p)$.

استقرار وجذب المجموعات:

لتكن لدينا المنظومة التالية المرتبطة ظاهرياً بالزمن

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (1)$$

حيث $f : R\times R^n \to R^n$ دالة مستمرة بشكل متقطع في t ومستمرة في x على $R\times R^n$ ، وليكن $x(t,t_0,x^0)$ حل للمنظومة (1) الموافق للشرط الابتدائي

$$x(t_0,t_0,x^0) = x^0$$

المجموعة $\Omega \subset R^n$ تدعى مجموعة لا متغيرة (ثابتة) ايجابياً من المنظومة (1) إذا كان من أجل كل $t_0 \in R$ و $x^0 \in \Omega$ يكون $x(t,t_0,x^0) \in \Omega$ من أجل كل $t \geq t_0$.

المجموعة $\Omega \subset R^n$ تدعى مجموعة لا متغيرة من المنظومة (1) إذا كان من أجل كل $t_0 \in R$ و $x^0 \in \Omega$ يكون $x(t,t_0,x^0) \in \Omega$ من أجل كل $t \in R$.

ملاحظة: يمكن تمثيل المجموعات اللامتغيرة (الثابتة) بنقاط معزولة (ثابتة) ومنحنيات وسطوح ومجموعات أخرى مغلقة ومفتوحة.

تعريف: المجموعة الثابتة Ω أو المنظومة (1) بالنسبة للمجموعة الثابتة Ω تدعى:

- مستقرة إذا كان من أجل كل t_0 ومن أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن:
$$\|x^0\|_\Omega \leq \delta \Rightarrow (\forall t \geq t_0)\|x(t)\|_\Omega \leq \varepsilon$$
- مستقرة بشكل منتظم إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أنه من أجل كل t_0 يكون
$$\|x^0\|_\Omega \leq \delta \Rightarrow (\forall t \geq t_0)\|x(t)\|_\Omega \leq \varepsilon$$

نتيجة: وفقاً لهذا التعريف، نلاحظ أن العدد δ يعتمد على ε و t_0 ليتحقق الاستقرار ولكن إذا استطعنا العثور على العدد δ الذي يعتمد فقط على ε ولا يعتمد على t_0 فإن المنظومة تكون مستقرة بشكل منتظم بالنسبة للمجموعة الثابتة Ω .

ملاحظة: إذا كانت المنظومة (1) مستقلة عن t فلا يوجد فرق بين الاستقرار والاستقرار المنتظم.

تعريف: المجموعة الثابتة Ω أو المنظومة (1) بالنسبة للمجموعة الثابتة Ω تدعى:

- جاذبة في المنطقة D إذا تحقق:
$$x^0 \in D \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\|x(t)\|_\Omega = 0$$

- جاذبة بشكل منتظم في المنطقة D إذا كان من أجل كل $c>0$ يتحقق

$$(\|x^0\|\le c)\wedge(x^0\in D)\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|_\Omega=0$$

- جاذبة في كل مكان إذا كان جاذبة على كل R^n.
- جاذبة بانتظام في كل مكان إذا كان جذابة بانتظام على كل R^n .

المنظومات الخطية المتزاوجة ذات الطبولوجيا الثابتة:

في هذا القسم سنتعامل مع المنظومات الخطية المتزاوجة ذات الطبولوجيا الثابتة، أولاً سوف نركز تحليلنا على حالة بنية التزاوج الدورية، وبعد ذلك سيتم تقديم نتائج معممة من أجل أي اتصال. لنقم أولاً بتعريف الفضاء الجزئي Ω بالشكل:

$$\Omega=\{x\in R^{mn};x_1=x_2=...=x_n\}$$

سوف نفرض أن الفضاء الجزئي Ω يمثل مجموعة توازن للمنظومة وأن جميع مصفوفات المنظومة تكون مصفوفات مولدة.

بنية التزاوج الدورية:

تعريف: نقول عن منظومة مؤلفة من n عضو أنها تملك بنية تزاوج دورية إذا كانت من الشكل:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=x_2-x_1\\
\dot{x}_2&=x_3-x_2\\
&\vdots\\
\dot{x}_{n-1}&=x_n-x_{n-1}\\
\dot{x}_n&=x_1-x_n
\end{aligned}\qquad(2)$$

حيث $x_i\in R^m$. سوف نلاحظ لاحقاً أن الحالة $m>1$ هي مجرد حالة تافهة للحالة $m=1$ ولذلك للسهولة نفرض أن $m=1$.

بالتالي المنظومة أعلاه تكتب بالشكل المصفوفي بالشكل:

$$\dot{x} = Ax$$

حيث A تملك الشكل $A = p - 1$ و p مصفوفة التبديل التي يتم الحصول عليها من المصفوفة الواحدية I بوضع صفها الأول في الأسفل:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

مبرهنة (10):

المنظومة (2) جاذبة في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي Ω ويكون:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \left(\frac{x_1^0 + x_2^0 + \dots + x_n^0}{n}\right)1$$

البرهان:

إن كثير الحدود المميز للمصفوفة p هو $s^n - 1$، بالتالي المصفوفة p سوف تملك n قيمة ذاتية وبالتالي فإن القيم الذاتية للمصفوفة A تكون جذور العنصر المحايد بانزياح يساوي الواحد، وهذا يعني أن A تملك قيمة ذاتية في الأصل و $n-1$ قيمة مميزة مختلفة تماماً في نصف المستوي الأيسر، وعلاوةً على ذلك يمكن بسهولة ملاحظة أن: $\ker(A) = \Omega$، بالتالي المنظومة (2) تكون جاذبة في كل مكان بالنسبة إلى Ω، بالإضافة لذلك:

$$(\dot{x}_1 + \dots + \dot{x}_n)/n = (1^T Ax)/n = 0$$

لذلك:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = (\frac{x_1^0 + x_2^0 + \cdots + x_n^0}{n})1$$

تعميم: للانتقال إلى الحالة العامة من أجل n منظومة جزئية بأي نوع من أنواع بنية التزاوج، يمكن تمثيلها بمعادلات نموذجية من الشكل:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_1) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(x_j - x_n) \end{aligned} \qquad (3)$$

سوف نفرض $a_{ij} \geq 0$ و $x_i \in R^m$، حيثُ تكتب العلاقات السابقة بالشكل المصفوفي

$$\dot{x} = Ax \qquad (4)$$

حيث A مصفوفة مولدة.

مبرهنة (11):

المنظومة (4) مستقرة بالنسبة لكل توازن $\bar{x} \in \Omega$.

البرهان:

الأثبات يتم بشكل مشابه لإثبات المبرهنة السابقة.

مبرهنة (12):

المنظومة (4) جاذبة في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي Ω إذا وفقط إذا كان البيان الموجه التفاعلي $\mathcal{G}$ شبه قوي الاتصال وعلاوةً على ذلك:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = (\frac{c^T x^0}{c^T 1})1$$

حيث c^T متجه ذاتي يساري للمصفوفة A مقابل للقيمة الذاتية الصفرية.

البرهان:

لزوم الشرط: إذا كان البيان الموجه $\mathcal{G}$ شبه قوي الاتصال عندئذٍ يتحقق أن A تملك قيمة ذاتية صفرية واحدة وأن جميع القيم الذاتية الأخرى تملك جزء حقيقي سالب. بالتخمين فأن المتجه الذاتي المقترن يكون1، لذلك $\ker(A)=\Omega$، هذا يعني أن المنظومة (4) تكون جاذبة في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي Ω.

ليكن c^T متجه ذاتي يساري للمصفوفة A يقابل القيمة الذاتية الصفرية، ولنّعرف متغير جديد $y=c^T x$، ولدينا $\dot{y}=c^T\dot{x}=c^T Ax=0$، هذا يعني أن: $y(t)=y(0)$ لكل $t\geq 0$ و:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=y(0)=c^T x^0$$

ومن جهة أخرى:

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{t\to\infty} c^T x(t)=c^T(a1)=a(c^T 1)$$

وبالتالي نحصل على:

$$a(c^T 1)=c^T x^0$$

ولذلك:

$$a=\frac{c^T x^0}{c^T 1}$$

وبالتالي:

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=\left(\frac{c^T x^0}{c^T 1}\right)1$$

كفاية الشرط: بفرض أن البيان الموجه التفاعلي $\mathcal{G}$ لا يكون شبه قوي الاتصال، عندئذٍ يتحقق إن البيان الموجه $\mathcal{G}_A$ يملك $k \geq 2$ مركبات قوية مغلقة، وبالتالي A تملك قيمة ذاتية صفرية للتركيب الجبري والهندسي $k \geq 2$، ولذلك نستطيع إيجاد حالة أولية x^0 في $\ker(A)$، ولكنها ليست موجودة في الفضاء الجزئي Ω. ويمكن العثور على x^0 طالما أن بعد $\ker(A)$ أكبر من الواحد، علاوةً على ذلك بالنسبة للحالة الأولية x^0 الحل يبقى في x^0 من أجل كل t. أي أن $x(t) = x(0)$ بالتالي المنظومة (4) لا تكون جاذبة في كل مكان بالنسبة إلى Ω وهذا يناقض الفرض.

تعميم: في حال كانت $m > 1$ يمكن وضع المنظومة (3) بالشكل المصفوفي التالي:

$$\dot{x}(t) = (A \otimes I_m)x(t) \qquad (5)$$

نتيجة :

تكون المنظومة (5) جاذبة في كل مكان بالنسبة إلى Ω إذا وفقط إذا كان البيان الموجه التفاعلي $\mathcal{G}$ شبه قوي الاتصال، علاوةً على ذلك:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1 \otimes \left(\frac{(c^T \otimes I_2)x^0}{c^T 1}\right)$$

حيث c^T متجه ذاتي يساري للمصفوفة A يقابل القيمة الذاتية الصفرية.

البرهان:

باعتبار لدينا المصفوفة القطرية من المرتبة mn معطاة بالشكل:

$$I_{mn}=\begin{pmatrix} I_m & & \\ & \ddots & \\ & & I_m \end{pmatrix}$$

يتم بناء مصفوفة التبديل p باختيار الصفوف من I_{mn} بالترتيب التالي:

$$\begin{matrix} 1,1+m,1+2m,... \\ 2,2+m,2+2m,... \\ \vdots \\ m,2m,3m,... \end{matrix}$$

على سبيل المثال من أجل $m=2$ و $n=3$:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

وبملاحظة أن المصفوفة P تقوم بالتحويل التالي:

$$P(A\otimes I_m)P^T=I_m\otimes A=\begin{pmatrix} A & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A \end{pmatrix}$$

و بتطبيق التحويل الإحداثي $y=px$، نحصل على المنظومة التالية

$$\dot{y}(t) = (I_m \otimes A) y(t)$$

بملاحظة شكل المصفوفة $I_m \otimes A$، نجد أن

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = a \otimes 1$$

من أجل $a \in R^m$ يكون:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} P^T y(t) = P^T (a \otimes 1) = 1 \otimes a$$

وبالتالي المنظومة (5) جاذبة في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي Ω إذا وفقط إذا كان البيان الموجه التفاعلي $\mathcal{G}$ شبه قوي الاتصال وأيضاً:

$$a = \frac{(c^T \otimes I_2) x^0}{c^T 1}$$

المراجع:

[1] Berman, A and Plemmons, R. J 1994. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Classics in Appl. Math. 9, SIA M, 8990p.

[2] Beineke, L. W and Wilson, R. J 1997. Graph Connections: Relationships Between Graph Theory and Other Areas of Mathematics. Clarendon Press, 306p

[3]. Aeyel , D and Leenheer, P.D-2002, "Extension of the Perron-Frobenius theorem to homogeneous systems." SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 41, no. 2 pp. 563-582

[4] Wolfowitz, J 1963. "Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices." proceedings of the American Mathematical Society, vol. 14, no. 5, pp. 733–737.

[5] Berge, C and Ghouila-Houri, A 1965. Programming, Games and Transportation Networks. John Wiley and Sons

[6] Moreau, L 2005. Stability of multiagent systems with time-dependent communication linksIEEE. Transactions on Automatic Control, vol. 50, no. 2, pp. 169–182.

[7] Lin, Z 2006. Coupled Dynamical Systems. pp.20-82.