

معاملات ليابونوف الأسية الموضعية

إسم الباحث: الدكتور محمد شعيب العلي

العنوان: قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة البعث

البريد الإلكتروني: mali@albaath-univ.edu.sy

ملخص البحث

نقدم في هذا البحث تعريفاً موضعياً لمعاملات ليابونوف الأسية في فضاء الموضع لأي منظومة ديناميكية سواء كانت متقطعة أو مستمرة. كما نقوم بربط قيم هذه المعاملات الموضعية بقيمة معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي للمنظومة الذي تعتبر قيمته مؤشراً على وجود سلوكية فوضوية في ديناميكية المنظومة المدروسة. نعتمد خلال هذا البحث الطرائق الرياضية لإثبات صحة النتائج والنظريات التي يتم تقديمها في هذا البحث. كما نقدم في نهاية هذا البحث بعض الأمثلة العملية والتطبيقات التي تدعم صحة هذه النتائج والمبرهنات.

كلمات مفتاحية: منظومة ديناميكية، تصوير، تدفق، فوضى، جاذب، معاملات ليابونوف الأسية، معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي.

Local Lyapunov Exponents

Researcher's Name: Dr. Mohamad Alali

Address: Mathematics Dept. / Science Fac. / Albaath Univ.

Email Address: mali@albaath-univ.edu.sy

Abstract

We present in this paper, a local definition of Lyapunov Exponents of a dynamical system for both Maps and Flows cases. We also, find a formula to connect values of these exponents with the value of maximum Lyapunov exponent, which is used universally to predict existence of chaotic behavior of a dynamical system.

We use a systematic mathematical methods to prove results and theorems throughout this paper.

Finally, we use some well-known dynamical systems to verify our results and theorems.

Keywords: Dynamical System, Map, Flow, Chaos, Attractor, Lyapunov Exponents, Maximum Lyapunov Exponent.

1. مقدمة:

انقضت أكثر من أربعة قرون على اكتشاف نظرية الفوضى وقامت العديد من الأبحاث في هذا المجال، إلا أنه ما يزال هناك العديد من المعضلات والعوائق التي تقف أمام العلماء والرياضيين الباحثين فيها وهم يحاولون الكشف عن خفايا هذه النظرية. مع ذلك حدث الكثير من التطورات في هذه النظرية وكانت معاملات ليابونوف الأسية إحدى هذه التطورات [1]، وهي من أكثر الطرائق دقةً في توصيف وتحليل الفوضى في المنظومات الديناميكية. وقد قام أوسيلديك [2] لاحقاً بإدخال هذا المفهوم في النظرية الإرجودية (Ergodic Theory) حيث تم تطوير طريقة جديدة لحساب معاملات ليابونوف الأسية.

تعرف معاملات ليابونوف الأسية λ_i بأنها قياسات لمتوسط معدلات تباعد مسارات المنظومة مقاسةً على جاذب هذه المنظومة. وتعطي هذه المعاملات معلومات حول معدل تباعد المسارات على الجاذب الفوضوي، كما وتعطي معلومات حول إستقرار المدارات الدورية. و يعتبر العمل الذي قام به هينون وهيلز [3] واحداً من أوائل الأبحاث المتعلقة بالسلوك الفوضوي لمسارات المنظومات الديناميكية في فضاء الموضع وتباعدها، والتي أثارت الكثير من الأبحاث و الدراسات فيما بعد [4-7].

تعرف معاملات ليابونوف الأسية الموضعية $\lambda_i(x_0, n)$ من المرتبة n عند النقطة x_0 في فضاء موضع تصوير ما P على أنها المعدلات الأسية لتباعد مسارات هذا

التصوير، الناتجة عن اضطراب صغير في الشروط الابتدائية x_0 ، بعد تكرار تطبيق هذا التصوير n مرة (خطوة) على تلك الشروط [8]. إلا أننا سنقتصر هذا التعريف من خلال هذه المدارس على خطوة واحدة فقط (أي تطبيق التصوير مرة واحدة فقط) و سنرمز لهذا المعامل بالرمز $\lambda_p^E(x_0)$ و الذي سندعوه معامل ليابونوف الأسى الموضعي، حيث أن E هو متجه واحدة في فضاء موضع المنظومة الديناميكية الذي يحدد متجه الاضطراب الصغير الطارئ المفروض على الشروط الابتدائية للمسارات المتجاورة.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى ابتكار آلية جديدة تساعد في حساب معامل ليابونوف الأسى الأعظمي لمنظومة ديناميكية ما، لأهمية هذا المعامل في تحديد سلوكية المنظومة الديناميكية المدروسة. لذلك يمكن اعتبار هذا البحث من الأبحاث الهامة التي تحظى باهتمام و متابعة الكثير من الباحثين في معظم المجالات العلمية. أما الجديد في هذا البحث فهو تقديمه لتعريف جديد لمعاملات ليابونوف الأسية ولكن بشكل موضعي، و ربط هذه القيم مع قيمة معامل ليابونوف الأسى الأعظمي للمنظومة المدروسة.

3. أدوات و طرق البحث:

سنستخدم خلال هذا البحث الشكل العام لمنظومة ديناميكية منقطعة (تصوير) و كذلك الشكل العام لمنظومة ديناميكية مستمرة (تدفق). و بعد تعريف المصطلحات كالمعاملات

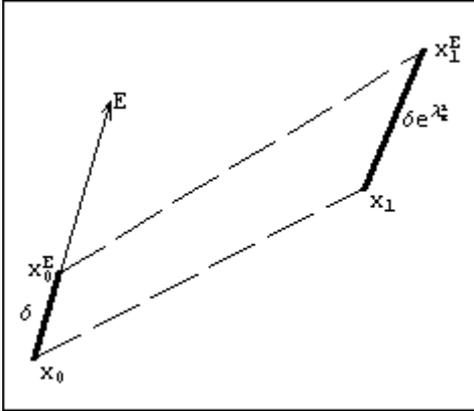
الموضعية لهذه المنظومات، سنقدم بعض المبرهنات و النتائج التي تمكننا من الربط بين قيم هذه المعاملات الموضعية و معامل ليايونوف الأسي الأعظمي.

4. النتائج و المناقشة: سنقوم فيما يلي بعرض بعض التعاريف و النتائج و المبرهنات.

تعريف (1) (معاملات ليايونوف الأسية الموضعية لتصوير) : لنأخذ تصويراً ما $P: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ذي بعد N ، حيث N هو عدد صحيح موجب، و الذي يعرف

بمعادلة فروق متجهية ذات N بعد تمثل جملة N معادلة فروق سلمية من الشكل

$$x_{i+1} = P(x_i) \quad ; \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$



ليكن $E \in \mathbb{R}^N$ متجه واحدة ما في فضاء موضع المنظومة الديناميكية، و لنأخذ اضطراب صغير في الشروط الابتدائية x_0 بحيث تصبح الشروط الابتدائية

الشكل (1): تطور متجه الواحدة في فضاء الموضع بعد

الجديدة بالشكل:

تطبيق التصوير خطوة واحدة

$$x_0^E = x_0 + \delta E$$

حيث أن $\delta \in \square$ و $0 < \delta \ll 1$. وبتطبيق التصوير (1) على هاتين النقطتين، نحصل على النقطتين التاليتين $x_1 = P(x_0)$ و $x_1^E = P(x_0^E)$ المبيتين في الشكل (1). باستخدام منشور تايلور للتابع P في جوار النقطة x_0 ، نجد أن:

$$x_1^E - x_1 = \delta \mathfrak{J}(x_0) \cdot E$$

حيث أن $\mathfrak{J}(x_0)$ هي المصفوفة اليعقوبية للتصوير P في النقطة x_0 .

و بالتالي يمكن تعريف معامل ليابونوف الأسي الموضعي في النقطة x_0 وفق اتجاه متجه الوحدة E في فضاء الموضع بالشكل:

$$\lambda_P^E(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{Log} \left(\|x_1^E - x_1\| / \delta \right)$$

حيث أن النظم $\|\cdot\|$ هو النظم الإقليدي المعرف على \square^N . بالتالي فإن:

$$\lambda_P^E(x) = \text{Log} \|\mathfrak{J}(x) \cdot E\| \quad (2)$$

تبين لنا هذه العلاقة أن المعامل الأسي المحلي $\lambda_P^E(x)$ موجود وهو عدد حقيقي من أجل أي نقطة x في فضاء موضع المنظومة ومن أجل أي متجه وحدة E .

تعريف (2) (معاملات ليابونوف الأسية الموضعية لتدفق):

لنأخذ منظومة ديناميكية مستمرة ذات N بعداً، من الشكل:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (3)$$

حيث أن $x \in \mathbb{R}^N$ و $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. فإذا انطلقنا من الشرط الابتدائي

$x = x_0$ في اللحظة الزمنية $t = 0$ ، سنحصل على التدفق $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ الموافق

للمنظومة (3) و الذي يحقق الشروط

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = F(\varphi(t)) \quad \& \quad \varphi(0) = x_0$$

وباعتبار تغير لا متناهي في الصغر في الزمن $0 < dt \ll 1$ ، يمكننا بناء المدار

$\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ للمنظومة، حيث أن $x_i = \varphi(i dt)$ و المدار الأخير هو مدار لتصوير

$G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ مرتبط بمنظومة التدفق المعطاة ومعرف بالشكل:

$$x_{i+1} = G(x_i) = x_i + F(x_i)dt$$

أما المصفوفة اليعقوبية لهذا التصوير، فنكتب بالشكل:

$$\mathfrak{T}_G(x) = I + \mathfrak{T}(x)dt$$

حيث أن $\mathfrak{T}(x)$ هي المصفوفة اليعقوبية للتابع F ، الذي يعرف التدفق المعطى في

النقطة x و I هي المصفوفة الواحدية من المرتبة N .

لنفرض الآن أن: $dt = \frac{1}{m}$ حيث أن m هو عدد صحيح موجب كبير بقدر كافٍ،

ولنعرف التصوير الهدف $P: \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}^N$ بالشكل التالي:

$$x_{i+1} = P(x_i) = G^m(x_i) = \underbrace{(G \circ G \circ \dots \circ G)}_{m \text{ times}}(x_i)$$

إن المصفوفة العيوقبية للتصوير الهدف P في نقطة x_0 تعطى بالعلاقة:

$$\mathfrak{S}_P(x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(I + \frac{1}{m} \mathfrak{S}(x_{m-1}) \right) \left(I + \frac{1}{m} \mathfrak{S}(x_{m-2}) \right) \dots \left(I + \frac{1}{m} \mathfrak{S}(x_0) \right)$$

حيث أن:

$$x_i = x_{i-1} + \frac{1}{m} F(x_{i-1}) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

و بالتالي يمكن أن نعرف معامل ليابونوف الأسي الموضوعي للتدفق المعطى في النقطة

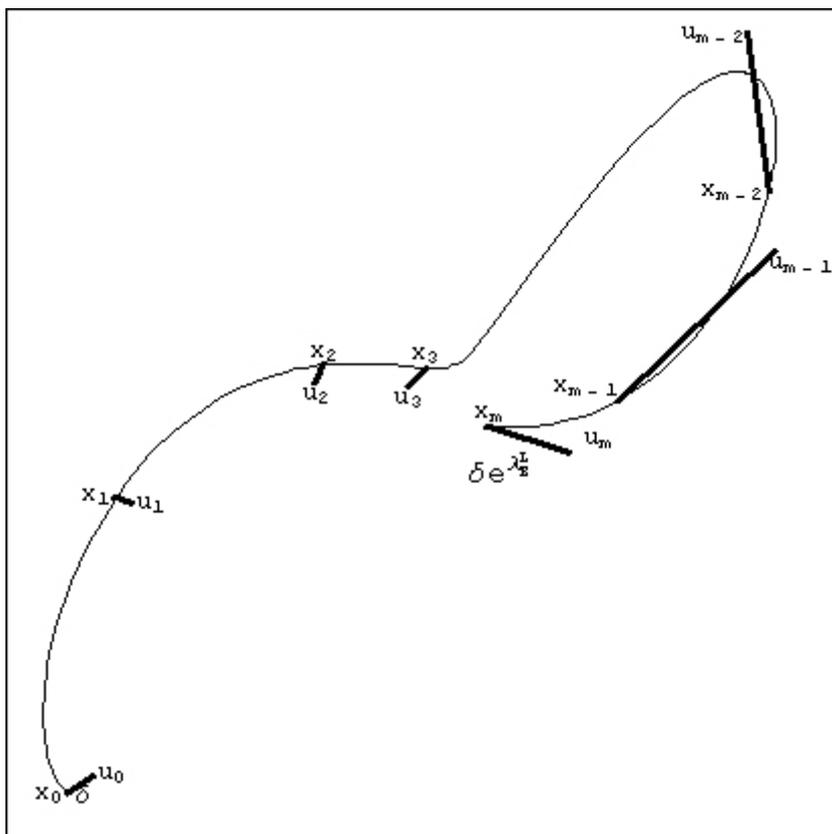
x_0 وفق اتجاه متجه الواحد E في فضاء الموضع بنفس الأسلوب الذي عرفنا به

معامل ليابونوف الأسي المحلي للتصوير P ، أي أن:

$$\lambda_P^E(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \log \left\| \left(I + \frac{1}{m} \mathfrak{S}(x_{m-1}) \right) \left(I + \frac{1}{m} \mathfrak{S}(x_{m-2}) \right) \dots \left(I + \frac{1}{m} \mathfrak{S}(x_0) \right) \cdot E \right\| \quad (4)$$

يبين الشكل (2) تطور متجه الاضطراب $\delta \cdot E$ في فضاء الموضع و بخطوات زمنية

تساوي الواحد.



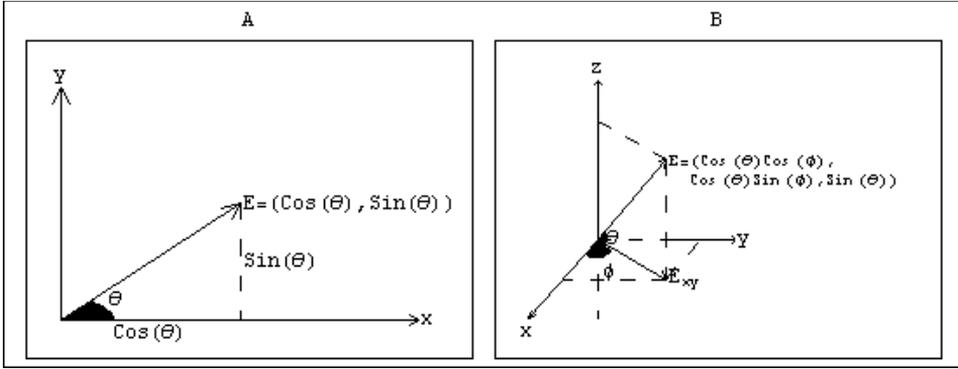
الشكل (2): تطور متجه الواحدة في فضاء موضع التدفق و بخطوة زمنية تساوي الواحد.

تبين العلاقتان (2) و (4) أن معامل ليابونوف الأسّي المحلي في أي نقطة x من فضاء الموضع هو تابع لمتجه الواحدة E . إضافةً إلى ذلك، إذا كان لفضاء الموضع N بعداً، حيث أن $N \geq 2$ ، فإن متجه الواحدة E يتبع لمجموعة وسطاء عددها $N - 1$ (كالزوايا θ_i التي يصنعها هذا المتجه مع المحاور الإحداثية) و التي تعين هذا المتجه في فضاء الموضع.

وبالتالي بحل مجموعة المعادلات التالية والتي عددها $N - 1$

$$\frac{\partial \lambda_p^E(x)}{\partial \theta_i} = 0 \quad (5)$$

سنحصل على الاتجاهات المميزة في كل نقطة من فضاء الموضع و التي تقابلها قيم حدية لمعامل ليابونوف الأسى الموضعي والتي يمكن من خلالها تحديد قيمة معامل ليابونوف الأسى المحلي الأعظمي $\lambda_p^{Max}(x)$ في تلك النقطة x .



الشكل (3): طريقة اختيار متجه الوحدة عندما يكون فضاء الموضع

(A) ثنائي البعد (B) ثلاثي البعد.

يبين الشكل (3) طريقة تحديد متجه الوحدة E في فضاء الموضع وذلك عندما يكون الفضاء ثنائي أو ثلاثي الأبعاد. تجدر الإشارة هنا إلى أنه في حال كان λ_1 هو معامل ليابونوف الأسى الأعظمي لتصوير P تم حسابه على جاذب ما A لهذا التصوير، فإن

$n\lambda_1$ هو معامل ليابونوف الأسي للتصوير $P^n = \underbrace{P \circ P \circ \dots \circ P}_{n \text{ times}}$ على

هذا الجاذب (أو جزء منه).

سنقدم فيما يلي بعض الملاحظات الهامة:

1. من أجل أي تصوير أحادي البعد، يكون متجه الواحدة هو متجه أحادي البعد (أي أنه عدد ثابت قيمته تساوي الواحد)، و بالتالي يوجد اتجاه مميز محلي وحيد يقابل معامل أسي محلي حدي واحد فقط و هو المعامل الأسي الموضعي الأعظمي في هذه الحالة. بالتالي من أجل التصوير أحادي البعد التالي

$$x_{i+1} = f(x_i) ; i = 0, 1, 2, \dots$$

يكون

$$\lambda_f^{Max}(x_0) = \text{Log} \left| \frac{df}{dx}(x_0) \right| ; \forall x_0 \in \bar{B}$$

2. من أجل تصوير ثنائي البعد، يكون فضاء الموضع ثنائي البعد أيضاً وبالتالي يمكن اختيار متجه الواحدة بالشكل $E = (\text{Cos}\theta, \text{Sin}\theta)$ و بالتالي من أجل التصوير

ثنائي البعد التالي

$$\begin{cases} x_{i+1} = f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = g(x_i, y_i) \end{cases} ; i = 0, 1, 2, \dots$$

ويعد حل المعادلة (5)، نجد أن

$$\lambda_P^{Max}(x, y) = \text{Log} \sqrt{\frac{1}{2}(A + \sqrt{4C^2 + B^2})}$$

حيث أن

$$\begin{cases} A = f_x^2 + f_y^2 + g_x^2 + g_y^2 \\ B = f_x^2 - f_y^2 + g_x^2 - g_y^2 \\ C = f_x f_y + g_x g_y \end{cases}$$

مميزات معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية:

تعريف (3): ليكن A جاذب محدود لتصوير P قابل للمفاضلة و لتكن B مجموعة

جزئية محدودة من مجال جذب هذا الجاذب و تحقق أن $B \supseteq A$ و $B \supseteq P(B)$.

يمكننا تعريف المقدار

$$\chi_P(B) = \text{Sup}\{\lambda_P^{Max}(x); x \in \overline{B}\}$$

حيث أن \overline{B} هي غلافة المجموعة B .

بما أن P قابل للمفاضلة، فإن

$$\lambda_{P^n}^{Max}(x) < \infty ; \quad \forall x \in \overline{B} \quad \& \quad \forall n \geq 1$$

و بالتالي فإن

$$\chi_{P^n}(B) < \infty ; \forall n \geq 1$$

ملاحظة: إن الشرط اللازم و الكافي لكي يكون

$$\lambda_{P^n}^{Max}(x) > -\infty ; \forall x \in \bar{B} \text{ \& } \forall n \geq 1$$

هو أن يكون $\det(\mathfrak{T}(x)) \neq 0 ; \forall x \in \bar{B}$ و بالتالي من الآن فصاعداً سنفرض تحقق هذا الشرط باستثناء الحالات التي يذكر فيها غير ذلك.

لتكن x_0 نقطة من مجال جذب جاذب ديناميكي A للتصوير P ، يعرف تشن و دونغ [9] معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي لهذا التصوير على الجاذب المعطى بالعلاقة

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log} |\mu_1(\mathfrak{T}_n(x_0))|$$

حيث أن \mathfrak{T}_n هي المصفوفة اليعقوبية للتصوير المركب P^n و $\mu_1(\cdot)$ يرمز لأكبر قيمة مميزة (كقيمة عددية) للمصفوفة المعطاة. و يمثل هذا المعامل المعدل الأسّي للمط في الاتجاه الذي يحدث فيه أعظم قيمة للمط. و بالتالي يمكننا أن نكتب

$$\lambda_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lambda_{P^n}^{Max}(x_0)$$

نتيجة (1): يمكننا بسهولة استنتاج أن $\forall n \geq 1$; $\chi_{P^n}(B) \leq n \lambda_1$. و بالتالي إذا وجد عدد صحيح n_1 بحيث أن $\chi_{P^{n_1}}(B) < 0$ ، عندئذ يكون الجاذب A غير فوضوي. علاوة على ذلك، إذا كان الجاذب A فوضوياً فإن

$$\chi_{P^n}(B) > 0 ; \forall n \geq 1$$

توطئة (1): من أجل أي نقطة x_0 من مجال جذب الجاذب الديناميكي A لتصوير P و من أجل أي عدد صحيح موجب n (كبير بقدر كافٍ)، تتوزع قيم معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتصاوير المركبة P^n على جانبي مستقيم في المستوي $(n - \lambda)$ ميله يساوي λ_1 (معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي للتصوير P على الجاذب الديناميكي A).

الإثبات: من أجل أي عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد صحيح $n_1 \geq 1$ بحيث أن

$$\left| \frac{1}{n} \lambda_{P^n}^{Max}(x_0) - \lambda_1 \right| < \varepsilon ; \forall n \geq n_1 \quad (6)$$

و بالتالي فإن

$$\left| \frac{1}{m} (\lambda_{P^{n+m}}^{Max}(x_0) - \lambda_{P^n}^{Max}(x_0)) - \lambda_1 \right| < (2 \frac{n}{m} + 1) \varepsilon ; \forall n \geq n_1 \ \& \ \forall m \geq 1 \quad (7)$$

فإذا وضعنا $n = n_1$ و $m \geq n_1$ ، يمكن عندئذٍ جعل الطرف الأيمن من المتراجحة (7) صغير بشكل كفي، و هذا يعني أن ميل المستقيم الذي يصل بين النقطتين $(n_1, \lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0))$ و $(n_1 + m, \lambda_{P^{n_1+m}}^{Max}(x_0))$ ينتهي إلى القيمة λ_1 عندما تسعى m إلى اللانهاية. أي أن النقاط $(n, \lambda_{P^n}^{Max}(x_0))$ تتوزع على جانبي المستقيم الذي يصل بين النقطتين السابقتين و ذلك أيّاً كانت $\forall n \geq 2n_1$.

توطئة (2): يكون الجاذب الديناميكي A الذي مجال جذبته B لتصوير P فوضوياً (غير فوضوي) إذا و فقط إذا كان من أجل أي نقطة $x_0 \in B$ يوجد عدد صحيح k بحيث أن $\lambda_{P^n}^{Max}(x_0) > 0$ و $\lambda_{P^n}^{Max}(x_0) < 0$ و ذلك أيّاً كانت $\forall n \geq k$.

الإثبات: لزوم الشرط

باستخدام المتراجحة (7-4) و بفرض أن $|\lambda_1| < \varepsilon$ و $n = n_1$ و $m \geq n_1$ ، نجد

الحالة الأولى: إذا كان الجاذب فوضوياً، أي أن $\lambda_1 > 0$ و باستخدام المتراجحة (7)

فإننا نميز الحالات التالية

• إما أن

$$\lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m\lambda_1 \leq \lambda_{P^{n_1+m}}^{Max}(x_0) < \lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m(\lambda_1 + \varepsilon) + 2n_1\varepsilon \quad (8)$$

و يثبت الطرف الأيسر من هذه المتراجحة صحة المبرهنة في هذه الحالة و ذلك بعد وضع $k = n_1 + m_1$ ، حيث أن m_1 كبير بقدر كافٍ بحيث يكون

$$\lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m_1 \lambda_1 > 0$$

• أو أن

$$\lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m \lambda_1 \geq \lambda_{P^{n_1+m}}^{Max}(x_0) > \lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m(\lambda_1 - \varepsilon) - 2n_1 \varepsilon \quad (9)$$

و يثبت الطرف الأيمن من هذه المتراجحة صحة المبرهنة في هذه الحالة و ذلك بعد وضع $k = n_1 + m_1$ ، حيث أن m_1 كبير بقدر كافٍ بحيث يكون

$$\lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m_1(\lambda_1 - \varepsilon) - 2n_1 \varepsilon > 0$$

الحالة الثانية: إذا كان الجاذب غير فوضوي، أي أن $\lambda_1 < 0$ ، عندئذٍ نميز الحالات

التالية

• من أجل الحالة الجزئية الأولى، يثبت الطرف الأيمن من المتراجحة (8) صحة

المبرهنة في هذه الحالة و ذلك بعد وضع $k = n_1 + m_1$ ، حيث أن m_1 كبير

$$\lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m_1(\lambda_1 - \varepsilon) - 2n_1 \varepsilon < 0$$

بقدر كافٍ بحيث يكون

• من أجل الحالة الجزئية الثانية، يثبت الطرف الأيسر من المتراجحة (9) صحة

المبرهنة في هذه الحالة و ذلك بعد وضع $k = n_1 + m_1$ ، حيث أن m_1 كبير

$$\lambda_{P^{n_1}}^{Max}(x_0) + m_1 \lambda_1 < 0$$

بقدر كافٍ بحيث يكون

أما إثبات كفاية الشرط فهو بديهي و بسيط لكون $\lambda_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lambda_{P^n}^{Max}(x_0)$ ، و

بالتالي فإن إشارة λ_1 هي إشارة المقدار $\lambda_{P^n}^{Max}(x_0)$ و ذلك عندما $n \rightarrow \infty$.

ملاحظة: إذا كان $\det(\mathfrak{J}(x_0)) = 0$ من أجل نقطة ما $x_0 \in \bar{B}$ ، تبقى التوطنتان

(1) و (2) صحيحتان طالما أن x_0 ليست نقطة ابتدائية لمسار المنظومة المدروس.

إضافةً إلى أن $\det(\mathfrak{J}_{P^n}(x_0)) = 0$; $\forall n \geq 1$ ، أي أن

$$\lambda_{P^n}^{Max}(x_0) = -\infty ; \forall n \geq 1$$

بعض الأمثلة التطبيقية:

1. التصوير اللوجستي: لقد درس كابلان و غلاس العديد من خصائص و ميزات هذا

التصوير [10]. و يعرف هذا التصوير بمعادلة الفروق

$$x_{i+1} = \alpha x_i (1 - x_i) ; \forall x_i \in [0,1]$$

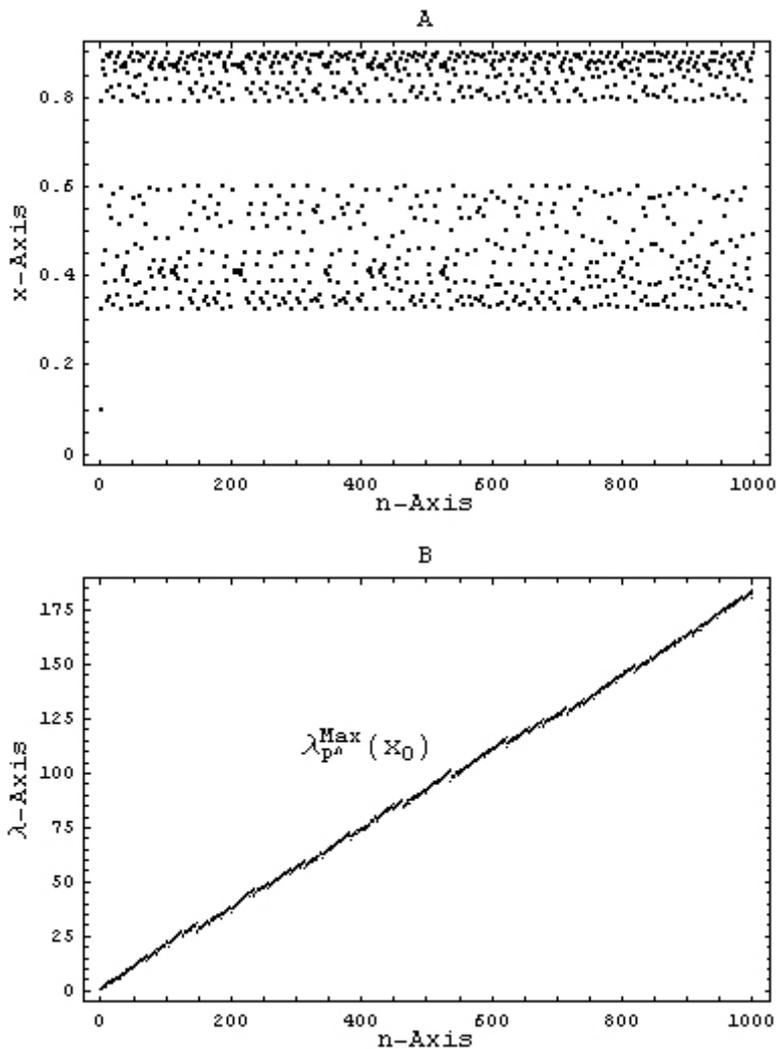
حيث أن $\alpha \in [0,4]$.

يبين الشكل (4) الجاذب الفوضوي لهذا التصوير من أجل قيمة الوسيط $\alpha = 3.6$

إضافةً إلى معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية المقابلة للتساوير المركبة

P^n و ذلك من أجل $n = 1, 2, \dots, 1000$ ، حيث أننا اخترنا النقطة $x_0 = 0.2$

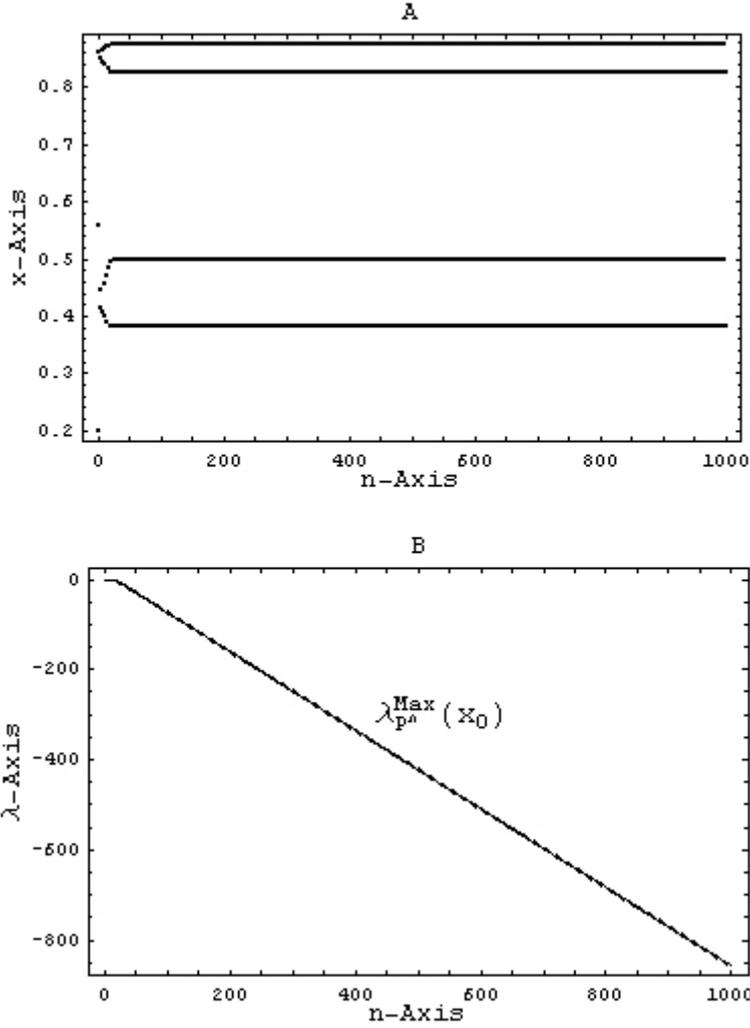
كنقطة ابتدائية. و يتضح من هذا الشكل أن المنحني الناتج يتقارب من كونه خطأً مستقيماً. و لإيجاد قيمة تقريبية لمعامل ليابونوف الأسّي الأعظمي λ_1 للتصوير من أجل قيمة الوسيط المعطاة نقوم بحساب ميل هذا المستقيم من خلال حساب ميل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(600, \lambda_{p600}^{Max}(x_0))$ و $(1000, \lambda_{p1000}^{Max}(x_0))$. و قد وجدنا أن هذه القيمة (القيمة التقريبية لميل المستقيم) تساوي قيمة معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي للتصوير $\lambda_1 = 0.1768$ و التي تم حسابها بالطريقة الاعتيادية المعروفة.



الشكل (4): (A) الجاذب الفوضوي للتصوير اللوجستي من أجل $\alpha = 3.6$

(B) معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتصاوير المركبة P^n من أجل

$$.n = 1, 2, \dots, 1000$$



الشكل (5): (A) الجاذب الدوري للتصوير اللوجستي من أجل $\alpha = 3.5$

(B) معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة P^n من أجل

$$.n = 1, 2, \dots, 1000$$

كما يبين الشكل (5) جاذب هذا التصوير و قيم معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية المقابلة للتصاوير المركبة P^n من أجل قيمة الوسيط $\alpha = 3.5$ و من أجل $x_0 = 0.2$. و يتضح من هذا الشكل أن المنحني الناتج يتقارب من كونه خطأً مستقيماً. و بحساب القيمة التقريبية لميل المستقيم الناتج في هذه الحالة و جدنا أنها تساوي قيمة معامل ليابونوف الأسية الأعظمي للتصوير $\lambda_1 = -0.8725$ و التي تم حسابها بالطريقة الاعتيادية المعروفة.

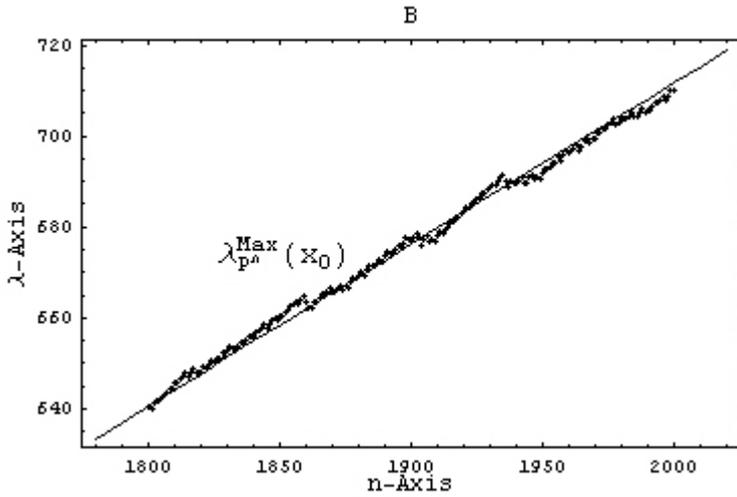
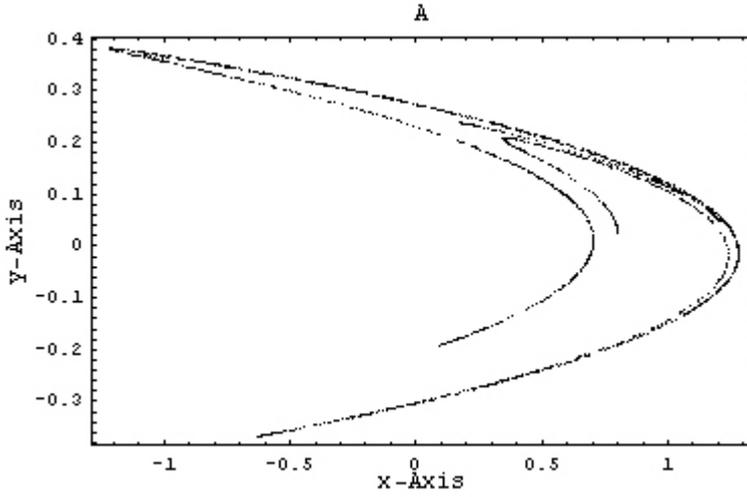
2. تصوير هينون: وضع النموذج الرياضي لهذا التصوير عالم الفلك الفرنسي [11]،

حيث يعطى هذا التصوير بمعادلتى الفروق التاليتين

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= 1 - \alpha x_i^2 + y_i \\ y_{i+1} &= \beta x_i\end{aligned}$$

عندما تكون $|\beta| < 1$ فإن التصوير يقلص و يمتد و يطوي الساحات في فضاء الموضع، حيث نسمي هذا النوع من الديناميكيات بديناميكية حدوة الحصان.

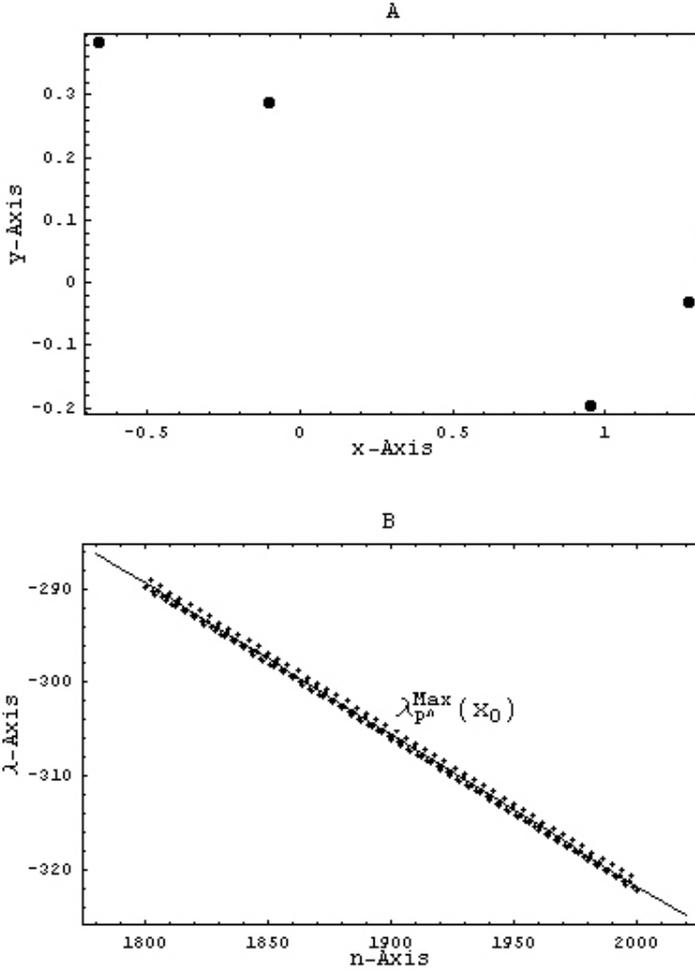
يبين الشكل (6) جاذب فوضوي نموذجي للتصوير من أجل قيم الوسيط $\alpha = 1.4$ و $\beta = 0.3$ إضافةً إلى معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية المقابلة للتصاوير المركبة P^n من أجل النقطة $x_0 = (-0.348, 0.311)$ من فضاء الحالة و من أجل $n = 1, 2, \dots, 1000$.



الشكل (6): (A) الجاذب الفوضوي لتصوير هينون من أجل $\alpha = 1.4$ و $\beta = 0.3$

(B) معاملات ليايونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتصاوير المركبة P^n من أجل

$$.n = 1, 2, \dots, 350$$



الشكل (7): (A) الجاذب الدوري لتصوير هينون من أجل $\alpha = 1$ و $\beta = 0.3$

(B) معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة P^n من أجل

$$.n = 1, 2, \dots, 350$$

لقد قمنا برسم مستقيم إضافي في المستوي $(n, \lambda_{P^n}^{Max})$ ميله $\lambda_1 = 0.35569$

يساوي قيمة معامل ليابونوف الأسية الأعظمي للتصوير في هذه الحالة و الذي تم حسابه

بالطريقة الاعتيادية، لكي نبين أن هذه النقاط تتوزع على جانبي هذا المستقيم. كما أننا قد قمنا بالشيء ذاته من أجل قيم الوسطاء $\alpha = 1$ و $\beta = 0.3$ لإظهار جاذب التصوير غير الفوضوي المستنتج في هذه الحالة، كما هو مبين في الشكل (7). و قد أظهرت الحسابات أن $\lambda_1 = -0.161132$ هي قيمة معامل ليابونوف الأسى الأعظمي للتصوير، و قد اعتمدنا في حساباتنا هذه النقطة الابتدائية $x_0 = (0.9517, -0.1969)$.

3. منظومة لورنز: يمكن الحصول على دراسة موسعة لهذه المنظومة في كتاب درازن [12]. هذه المنظومة هي منظومة مستمرة (تدفق) ثلاثية الأبعاد و تتعين بالمعادلات

التفاضلية الثلاثة التالية

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - qz \end{cases}$$

حيث أن p, q, r هي وسطاء حقيقية للمنظومة.

و بما أن تدفق يملك معامل ليابونوف واحد صفري و هو المعامل الموافق لاتجاه تدفق

المنظومة (أي الاتجاه المماسي $\vec{\tau}$) فإنه و بدون المساس بعمومية المسألة يمكن أن

نفرض أن متجه واحدة المنحى المأخوذ موجود في المستوي الناظمي لهذا التدفق في

النقطة المعطاة، و بالتالي فإن $\vec{E} = \cos(\theta) \vec{n} + \sin(\theta) \vec{b}$ حيث أن \vec{n} و \vec{b}

هما متجهي واحدة الناظم الأساسي و ثنائي الناظم في النقطة المعطاة. و بالتالي بعد

تعيين متجه واحدة المنحى E نقوم و بالطريقة المحددة سابقاً بحساب معاملات

ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة P^n في النقطة المعطاة في

فضاء الحالة.

إن سبب اختيار المتجه E بهذا الشكل هو لتخفيض عدد المعادلات المثلثية التي

سنحصل عليها بتطبيق العلاقة (5) و التي يطلب حلها للحصول على قيم معاملات

ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة P^n في النقطة المعطاة.

كما يبين الشكل (8) الجاذب الفوضوي لمنظومة لورنز من أجل قيم الوسطاء $p = 10$

و $q = 8/3$ و $r = 27$ ، إضافةً إلى معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية

للتساوير المركبة P^n ، حيث أن P هو التصوير المرتبط بهذا التدفق. و يتضح من

الشكل أن المنحني الناتج يتناهي إلى خطٍ مستقيم القيمة التقريبية لميل هذا المستقيم

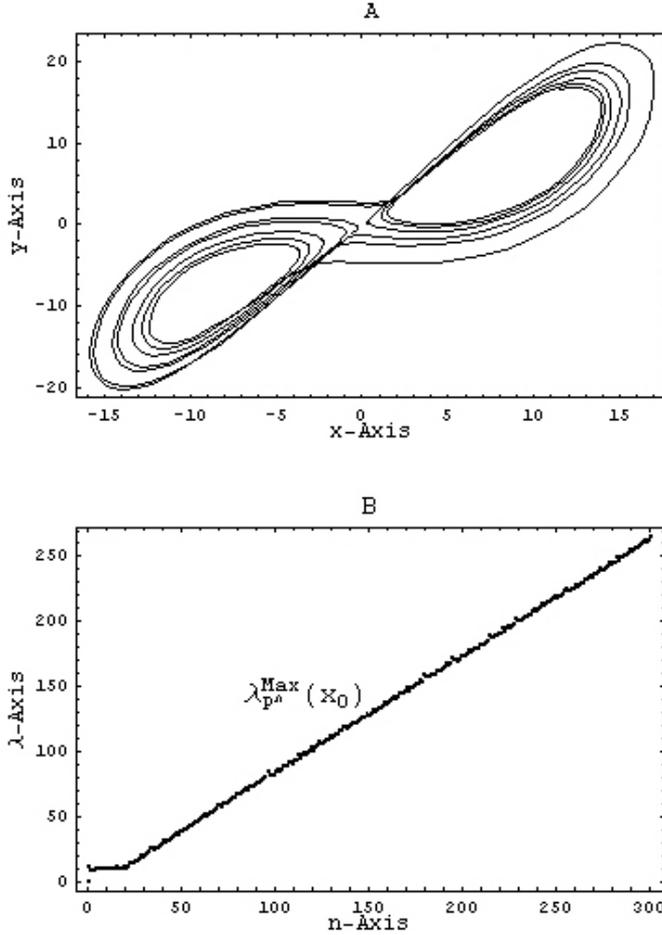
باستخدام النقطتين $(150, \lambda_{P^{150}}^{Max}(x_0))$ و $(300, \lambda_{P^{300}}^{Max}(x_0))$ لنجد أن هذه

القيمة هي $m = 0.895116$ و هي تساوي قيمة معامل ليابونوف الأسية الأعظمي

λ_1 للتصوير من أجل قيم الوسطاء المعطاة و الذي تم حسابه باستخدام ملحقات برنامج

ماثيماتكا [Sandri (1996)] حيث أننا اعتبرنا أن النقطة الابتدائية هي

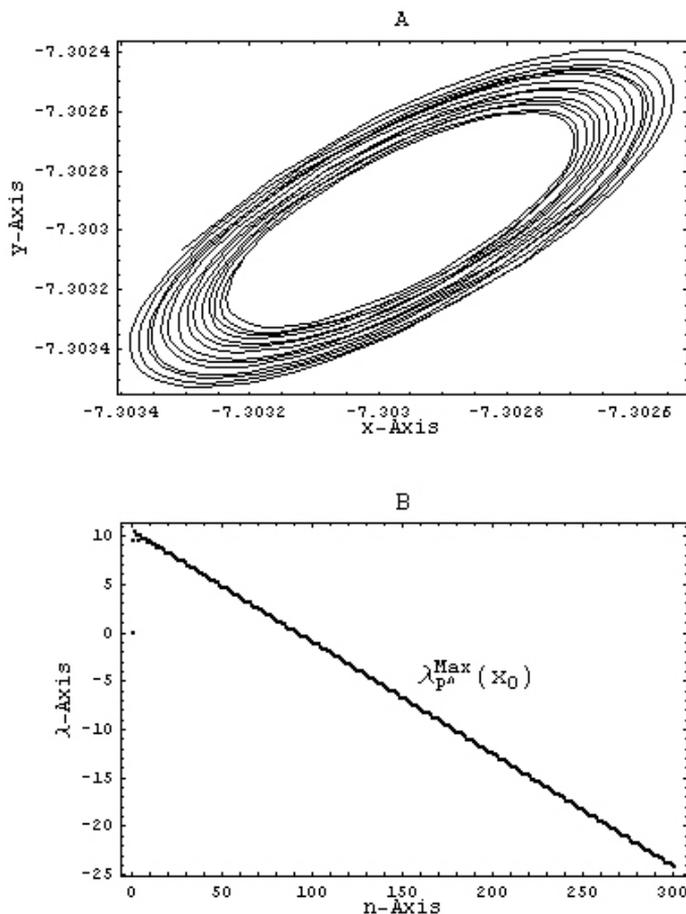
$$.x_0 = (0.0001, 0.0001, 0.0001)$$



الشكل (8): (A) الجاذب الفوضوي لمنظومة لورنز من أجل $r = 27$

(B) معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة P^n من أجل

$n = 1, 2, \dots, 300$ ، حيث أن P هو التصوير المرتبط بهذا التدفق.



الشكل (9): (A) الجاذب غير الفوضوي لمنظومة لورنز من أجل $r = 21$

(B) معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة P^n من أجل

$n = 1, 2, \dots, 300$ ، حيث أن P هو التصوير المرتبط بهذا التدفق.

كما قمنا برسم الجاذب غير الفوضوي للتصوير في الشكل (9) من أجل قيم الوسطاء

$p = 10$ و $q = 8/3$ و $r = 21$ إضافةً إلى قيم معاملات ليابونوف الأسية

الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة P^n ، حيث أن P هو التصوير المرتبط بهذا التدفق. و قد وجدنا في هذه الحالة و بنفس الأسلوب أن $\lambda_1 = -0.114787$.

لقد اعتمدنا في كلتا الحالتين السابقتين خطوة التكامل $dt = 0.0001$ ، و بالتالي قمنا بتقطيع الزمن و استنتجنا العلاقة التالية

$$\lambda_p^{Max}(x, y) = \text{Log} \sqrt{A + \sqrt{C^2 + B^2}}$$

حيث أن $(\mathfrak{I}(x_0) \cdot E)^2 = B \text{Cos}(2\theta) + C \text{Sin}(2\theta) + A$ ، و ذلك لحساب معاملات ليابونوف الأسية الموضعية الأعظمية للتساوير المركبة P^n .

5. الاستنتاجات و التوصيات:

لقد بينت النتائج التي حصلنا عليها من خلال هذا البحث، خاصةً التوطئتين (1) و (2)، أنه يمكن استخدام التعريف الموضعي لمعاملات ليابونوف الأسية لإيجاد قيمة معامل ليابونوف الأسى الأعظمي للمنظومة، و بالتالي لتوقع وجود أو عدم وجود السلوكية الفوضوية في ديناميكية المنظومة المدروسة. لذلك نوصي باستخدام الطريقة المقترحة في هذا البحث لحساب قيمة معامل ليابونوف الأسى الأعظمي لأي منظومة ديناميكية، لسهولة حساب المعاملات الموضعية في أي مكان من فضاء موضع المنظومة. كما نتمنى أن يكون هذا البحث لبنة أساسية للأبحاث العلمية المستقبلية.

المراجع:

1. Cesari L., 1971 - Asymptotic Behaviour and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, 3rd Edition, New York, Heidelberg, Berlin, 274.
2. Oseledec V. L., 1968 - A Multiplicative Ergodic Theorem: Lyapunov Characteristic Numbers for Dynamical Systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, **19** : 197-231.
3. Henon, M., and Heiles, C., 1964 - The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments. *Astron. J.*, **69** (1) : 73-79.
4. Chirikov, B. V., 1979 - A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems. *Phys. Reports*, **52** (5) : 263-379.
5. Shimada, I. and Nagashima, T., 1979 - A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems. *Prog. Theor. Phys.*, **61** (6) : 1605-1616.
6. Froeschle, C., J., 1984 - The Lyapunov Characteristic Exponents and Applications. *Mecanique Theorique et Applique*, Supplement (ISSN 0750-7240): 101-132.

7. Wolf, A., 1986 - Quantifying Chaos with Lyapunov Exponents, *In*: Holden, A. V. (Ed.), *Chaos*. Princeton University Press, Princeton, pp. 273-290.
8. Galias, Z., 1999 – Local Transversal Lyapunov Exponents for Analysis of Synchronization of Chaotic Systems. *Int. J. Circuit Theory and Applications*, **27** (6) : 589–604.
9. Chen, G. and Dong, X., 1998 – From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications. World Scientific Pub., Singapore, 776.
10. Kaplan, D. and Glass, L., 1995 – Understanding Non Linear Dynamics. Springer–Verlag, New York, 420.
11. Henon, M., 1976 – A Two–Dimensional Mapping with Strange Attractor. *Commun. Math. Phys.*, **50** (1) : 69–77.
12. Drazin, P.G., 1992 – Nonlinear Systems. Cambridge Univ. Press, Glasgow, 317.