توابع الحالة الترموديناميكية والعلاقات التأسيسية الموافقة لجسم هوك الصلب في نظام احداثي منحني كيفي

أ.د. منتجب الحسن[1] ط. غيث عزيز صالح[2]

ملخص البحث:

يتعلق البحث بالنموذج الرياضي الحاكم للحقول الترموميكانيكية، التي تصف السلوك الترموديناميكي لجسم Hooke الصلب المرن، غير المتجانس والغير متماثل المناحي، والذي يَرمز له اختصاراً بالرمز $(\mathcal{H})$، نسبة للباحث الرياضي Hooke، وهو من أسس النموذج الرياضي لهذا الجسم. في البحث، سنناقش أولاً الشكل التنسوري الناطق في نظام احداثي منحني كيفي للطاقة الحرة المتعلقة بعنصر الحجم من الجسم $(\mathcal{H})$، كتابع لمقطعي الانفعال والحرارة، ومن ثم سنستنتج العلاقات التأسيسية الموافقة لعملية إيزوتيرمية، في نظام احداثي منحني كيفي. بعدها سنناقش الطاقة الداخلية المتعلقة بعنصر الحجم المذكور، كتابع لمقطعي الانفعال والأنتروبية والعلاقات التأسيسية الموافقة لعملية آدياباتية، في نظام احداثي منحني كيفي. أخيراً سنناقش كمون Gibbs الترموديناميكي لنفس عنصر الحجم كتابع لمقطعي الإجهاد والحرارة، والعلاقات التأسيسية الموافقة لعملية إيزوتيرمية، في نظام احداثي منحني كيفي . في النهاية سننهي البحث باقتراح ثلاث مسألل للمناقشة.

---

[1] أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

[2] طالب ماجستير في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

الكلمات المفتاحية: توابع الحالة الترموديناميكية والعلاقات التأسيسية للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$ ، في نظام احداقي منحني كيفي.

The thermodynamical state functions and corresponding constitutive relations for the Hooke elastic solid in an arbitrary curvilinear coordinate system

Mountajab Al-Hasan [†] **&** **Ghaith Aziz Saleh** [‡]

Abstract

The paper concerns the mathematical model that governing the thermomechanical fields, describing the thermodynamical behavior of the Hooke nonhomogeneous and anisotropic elastic solid, shortly called $(\mathcal{H})$, mathematically discussed by Hooke. In the paper, first we discuss the free energy related to the body volume element as a function of the strain tensor field and the temperature field, and we derive the related constitutive relations corresponding to the isothermal process in a curve coordinate system. Next, we discuss the internal energy related to the same body volume element as function of the strain tensor field and the entropy field, and we derive the related constitutive relations corresponding to the adiabatic process in a curve coordinate system. Then, we discuss the Gibbs thermodynamical potential related to the same mentioned body volume element as a function of the stress tensor field and the temperature field, and we derive the related constitutive relations corresponding to the isothermal process in a curve coordinate system. Finally, we will end the paper by proposing three problems for discussing.

[†] Professor At Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.
[‡] Master Student At Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.

Key words: The thermodynamical state functions, the corresponding constitutive relations for the $(\mathcal{H})$ elastic solid in a curve coordinate system.

1. مقدمة:

قام العديد من الباحثين الرياضيين في مجال الأوساط المستمرة، بدراسة توابع الحالة الترموديناميكية لجسم Hooke الصلب المرن، في الحالة التي يخضع فيها الجسم لمؤثرات حرارية، وفي النظام الإحداثي الديكارتي. من هذه التوابع: الطاقة الحرة، والطاقة الداخلية، وكمون Gibbs الترموديناميكي، وأعطوا لأجل كلٍ من هذه التوابع، شكل جديد مختلف للعلاقات التأسيسية، كما وضعوا المعادلات الترموديناميكية للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$، إما بواسطة الانفعالات والأنتروبية، أو بواسطة الانفعالات والحرارة، وكل ذلك في النظام الإحداثي الديكارتي. من هؤلاء الباحثين:Truesdell [7]و Fung [4] و Nowacki [3,5]، وكان ذلك في الستينيات والسبعينيات والثمانينات من القرن العشرين.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى دراسة توابع: الطاقة الحرة كتابع لمركبات مقطع الانفعال والحرارة، والطاقة الداخلية كتابع لمركبات مقطع الانفعالات والأنتروبية، وكمون Gibbs الترموديناميكي كتابع لمركبات مقطع الإجهاد والحرارة، واستنتاج العلاقات التأسيسية الموافقة لكل تابع من التوابع السابقة، كل ذلك في نظام احداثي منحني كيفي، وللجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$ غير المتجانس وغير المتماثل المناحي.

3. طرق لبحث:

سندرس الطاقة الحرة للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$،كتابع لمركبات مقطع الانفعال التنسوري والحرارة، والطاقة الداخلية لهذا الجسم،كتابع لمركبات مقطع الانفعال التنسوري والأنتروبية وكذلك كمون Gibbs الترموديناميكي للجسم، كتابع لمركبات مقطع الإجهاد التنسوري والحرارة، كل ذلك في نظام احداثي منحني كيفي، متبعين في ذلك طريقة هي تعميم الطريقة المتبعة في Nowacki [3,5].

لهذا الغرض، سنرمز للطاقة الحرة لعنصر الحجم اللاغرانجي dV من الجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$ بالرمز $\mathcal{F}$ ، وسنرمز للطاقة الداخلية لنفس عنصر الحجم اللاغرانجي بالرمز $\mathcal{U}$ ، كما سنرمز لكمون Gibbs الترموديناميكي لهذا العنصر بالرمز $\mathcal{G}$.

إن العملية الترموديناميكية للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$ غير المتجانس وغير المتماثل المناحي، توصف بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية $\{\mathbf{u}\ ,\ \boldsymbol{\varepsilon}\ ,\ \boldsymbol{\sigma}\ ,\ T\ ,\ S\}$، حيث $\mathbf{u}$ مقطع متجهي، يمثل فيزيائياً حقل الإزاحات، أما $\boldsymbol{\varepsilon}$ و $\boldsymbol{\sigma}$ فهما مقطعان تنسوريان من المرتبة الثانية، ومتناظران، وفيزيائياً هما على الترتيب، مقطع الانفعالات ومقطع الإجهادات. أخيراً T و S، هما مقطعان تنسوريان من المرتبة الصفرية، يمثلان على الترتيب مقطع الحرارة المطلقة ومقطع الأنتروبية.

من أجل متطلبات البحث أيضاً، نفرض أن جميع الأدلة اللاتينية $i\ ,\ j\ ,\ k\ ,\ ....$ تأخذ القيم $1\ ,\ 2\ ,\ 3$ وسنعتمد رموز Einstein في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3، ولتكن $O\,x_1\ x_2\ x_3$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة، ومباشرة، وعطالية، قاعدتها $(\mathbf{e}_1\ ,\ \mathbf{e}_2\ ,\ \mathbf{e}_3)$. كما سنفرض وجود نظام إحداثي منحني كيفي في الحالة البدائية Ω للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$، وسطاءه η_i وقاعدته موافقة التغير هي $\mathbf{g}_i(p)=\mathbf{g}_i(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$، وقاعدته مخالفة التغير هي $\mathbf{g}^i(p)=\mathbf{g}^i(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$. عندئذٍ يمكن أن تُمثَّل مجموعة المقاطع التنسورية $\{\mathbf{u}\ ,\ \boldsymbol{\varepsilon}\ ,\ \boldsymbol{\sigma}\}$ في النظام الإحداثي المنحني η_i، على النحو الآتي:

$$\mathbf{u}=u^i\mathbf{g}_i=u_i\ \mathbf{g}^i\ , \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon^{i\,j}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}_j=\varepsilon_{i\,j}\ \mathbf{g}^i\otimes\mathbf{g}^j=\varepsilon^i_j\ \mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}^j\ , \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma^{i\,j}\mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}_j=\sigma_{i\,j}\ \mathbf{g}^i\otimes\mathbf{g}^j=\sigma^i_j\ \mathbf{g}_i\otimes\mathbf{g}^j\ , \tag{3.3}$$

حيث u_i و u^i، على الترتيب تمثل المركبات موافقة التغيير والمركبات مخالفة التغيير في النظام الإحداثي المنحني η_i لمقطع الإزاحة $\mathbf{u}$، كما أن: $\varepsilon_{i\,j}$ و $\varepsilon^{i\,j}$ و ε^i_j، هي مصفوفات متناظرة، تمثل على الترتيب المركبات موافقة التغيير والمركبات مخالفة التغيير والمركبات المختلطة في النظام الإحداثي المنحني η_i لمقطع الانفعال $\boldsymbol{\varepsilon}$، كما أن: $\sigma_{i\,j}$ و $\sigma^{i\,j}$ و σ^i_j، هي أيضاً مصفوفات متناظرة وتمثل على الترتيب المركبات موافقة التغيير والمركبات مخالفة التغيير والمركبات المختلطة في النظام الإحداثي المنحني η_i لمقطع الإجهاد $\boldsymbol{\sigma}$.

4. النتائج والمناقشة:

أولاً: *الطاقة الحرة $\mathcal{F}$، كتابع لمركبات مقطع الانفعال التنسوري والحرارة، والعلاقات التأسيسية الموافقة للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$* غير المتجانس وغير المتماثل المناحي، كل ذلك في نظام احداثي منحني كيفي η_i: تعطى الطاقة الحرة $\mathcal{F}$ بالعلاقة [3,5]:

$$\mathcal{F} = \mathcal{U} - \mathrm{S}\,\mathrm{T} \qquad (4.1)$$

ولكن يمكن أن نعتبر أن: $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\varepsilon_{ij}, \mathrm{S})$، وعندئذٍ [3]:

$$d\mathcal{U} = \sigma^{ij}\, d\,\varepsilon_{ij} + \mathrm{T}\, d\,S \qquad (4.2)$$

حيث هنا: $d\,\varepsilon_{ij} = \nabla_k \varepsilon_{ij}\, d\eta^k$ و $\eta^k = \eta_k$ والرمز $\nabla_k \varepsilon_{ij}$ يعني المشق موافق التغيير للمركبات موافقة التغيير ε_{ij} بالنسبة لـ η_k، وهو يعطى بالعلاقة [6,9]:

$$\nabla_k \varepsilon_{ij} = \partial_k \varepsilon_{ij} - \Gamma^m_{ik}\, \varepsilon_{mj} - \Gamma^m_{jk}\, \varepsilon_{im}$$

وحيث ∂_k يرمز المشتق الجزئي بالنسبة للوسيط η_k؛ $\partial_k \varepsilon_{ij} = \dfrac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \eta_k}$. الرموز Γ^k_{ij} تدل هي رموز Christoffel من النوع الثاني؛ وهي تعطى بالعلاقة: $\Gamma^k_{ij} = g^{k\ell}\, \Gamma_{ij\,\ell}$، مع العلم بأن: $\Gamma_{ij\,\ell}$ هي رموز Christoffel من النوع الأول، وهي تعطى بالعلاقة: $\Gamma_{ijk} = \partial_j \mathbf{g}_i \,.\, \mathbf{g}_k = \dfrac{1}{2}(\partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij})$، $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ و $g^{ij} = \mathbf{g}^i \,.\, \mathbf{g}^j$ على الترتيب هما الحد العام للمصفوفة المترية موافقة التغير والحد العام للمصفوفة المترية مخالفة التغير.

ينتج الآن عن (4.1) و(4.2) أن:

$$d\mathcal{F} = \sigma^{ij}\, d\,\varepsilon_{ij} - \mathrm{S}\, d\,\mathrm{T} \qquad (4.3)$$

التي منها نجد أن: $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varepsilon_{ij}, \mathrm{T})$. بالتالي:

$$d\,\mathcal{F} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{\mathrm{T}} d\,\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\boldsymbol{\varepsilon}} d\,\mathrm{T} \qquad (4.4)$$

حيث الرمز $\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{\mathrm{T}}$ تدل على اشتقاق $\mathcal{F}$ خلال ظروف إيزوتيرمية (متساوية درجة الحرارة المطلقة)، أما الرمز $\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ فيعني اشتقاق $\mathcal{F}$ خلال تشوه ثابت للجسم. من (4.4) و(4.3)، ينتج أن:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{\mathrm{T}} = \sigma^{ij} \ , \ \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\mathrm{S} \qquad (4.5)$$

بالتالي إذا عرفنا الطاقة الحرة $\mathcal{F}$، فيمكن أن نعرف المركبات مخالفة التغيير σ^{ij} لمقطع الإجهاد، بدلالة كلٍ من المركبات موافقة التغيير ε_{ij} لمقطع الانفعال والحرارة T، كما يمكن أن نعرف الأنتروبية S أيضاً بدلالة كلٍ من المركبات موافقة التغيير ε_{ij} لمقطع الانفعال والحرارة T.

بنشر الطاقة الحرة $\mathcal{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathrm{T})$ في متسلسلة تايلور في جوار الحالة الطبيعية: $(\mathbf{0}, \mathrm{T}_0)$، (حيث $\mathbf{0}$ هو المقطع التنسوري، الصفري، و T_0 هي درجة حرارة الحالة الطبيعية للجسم)، نحصل على:

$$\mathcal{F}(\varepsilon_{ij}, \mathrm{T}) = \mathcal{F}(\mathbf{0}, \mathrm{T}_0) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}}(\mathbf{0}, \mathrm{T}_0)\ \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}}(\mathbf{0}, \mathrm{T}_0)\ (\mathrm{T} - \mathrm{T}_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}\, \partial \varepsilon_{k\ell}}(\mathbf{0}, \mathrm{T}_0)\ \varepsilon_{ij}\ \varepsilon_{k\ell} + 2\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}\, \partial \mathrm{T}}(\mathbf{0}, \mathrm{T}_0)\ \varepsilon_{ij}\ (\mathrm{T} - \mathrm{T}_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}^2}(\mathbf{0}, \mathrm{T}_0)\ (\mathrm{T} - \mathrm{T}_0)^2 \right] + \cdots$$

ولكن في جوار الحالة الطبيعية للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$ ينعدم كلاً من مقطعي الانفعال والإجهاد ومقطع الانتروبية، كما تملك الطاقة الحرة عندئذٍ القيمة الثابتة $\mathcal{F}(\mathbf{0}, \mathrm{T}_0)$، والتي يمكن أن نفرضها معدومة دون المساس بعمومية المسألة. ينتج من انعدام قيمة كلاً من مقطعي الإجهاد والأنتروبية في $(\mathbf{0}, \mathrm{T}_0)$، ومن العلاقة (4.5)، أن:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_{ij}}(\mathbf{0}, \mathrm{T}_0) = \sigma^{ij}(\mathbf{0}, \mathrm{T}_0) = 0 \ , \ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}}(\mathbf{0}, \mathrm{T}_0) = -\mathrm{S}(\mathbf{0}, \mathrm{T}_0) = 0 \qquad (4.6)$$

وبذلك يصبح المنشور السابق بالشكل:

$$\mathcal{F}(\varepsilon_{ij},\mathrm{T}) = \frac{1}{2}\Bigg[\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\varepsilon_{k\ell}}(\mathbf{0},\mathrm{T}_0)\,\varepsilon_{ij}\;\varepsilon_{k\ell} + \\ + 2\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\mathrm{T}}(\mathbf{0},\mathrm{T}_0)\;\varepsilon_{ij}\;(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0) + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\mathrm{T}^2}(\mathbf{0},\mathrm{T}_0)\;(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)^2\Bigg] + \cdots \tag{4.7}$$

في العلاقة (4.7) لنهمل مجموع قوى المركبات موافقة التغيير لمقطع الانفعال: ε_{ij} والفرق الحراري $(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)$، التي هي أكبر أو تساوي الـ3، الأمر الذي يتناسب مع حالة الانفعال الصغيرة جداً، ومع حالة كون $\left|(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)/\mathrm{T}_0\right| \ll 1$ ، وبذلك تصبح العلاقة (4.7) بالشكل الآتي:

$$\mathcal{F}(\varepsilon_{ij},T) = \frac{1}{2}C_{\mathrm{T}}^{ijk\ell}\varepsilon_{ij}\;\varepsilon_{k\ell} - \beta^{ij}\;\varepsilon_{ij}\;\theta + \mathcal{F}_0(\theta) \tag{4.8}$$

علماً أن: $\theta := \mathrm{T}-\mathrm{T}_0$، و $\mathcal{F}_0(\theta)$ تابع لـ θ فقط ، كما أن:

$$C_{\mathrm{T}}^{ijk\ell} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\varepsilon_{k\ell}}(\mathbf{0},\mathrm{T}_0)\;,\quad \beta^{ij} = -\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial\varepsilon_{ij}\,\partial\mathrm{T}}(\mathbf{0},\mathrm{T}_0) \tag{4.9}$$

وللحصول، الآن على العلاقات التأسيسية، بشكلها الأول، وفي نظام احداثي منحني كيفي η_i، نستخدم العلاقتين (4.5)، فنجد:

$$\sigma^{ij} = C_{\mathrm{T}}^{ijk\ell}\;\varepsilon_{k\ell} - \beta^{ij}\;\theta \tag{4.10}$$

$$\mathrm{S} = \beta^{ij}\,\varepsilon_{ij} - \frac{\partial\mathcal{F}_0}{\partial\mathrm{T}}(\theta) \tag{4.11}$$

ندعوا العلاقتان(4.10) و(4.11) بالعلاقتين التأسيسيتين (الشكل الأول)، في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i، حيث ندعوا (4.10)، بعلاقة Duhamel – Neumann، لأجل الجسم المرن $(\mathcal{H})$، الأنيزوتروبي (غير المتماثل المناحي)، في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i. يبقى علينا الآن، تحديد قيمة الحد $-\frac{\partial\mathcal{F}_0}{\partial\mathrm{T}}(\theta)$، في الطرف الأيمن للعلاقة (4.11)، والذي يتم باتباع الآتي. بما أن $\mathrm{S} = \mathrm{S}(\varepsilon_{ij},\mathrm{T})$، فإن:

$$dS=\left(\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_T d\varepsilon_{ij}+\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\boldsymbol{\varepsilon}} dT \qquad (4.12)$$

هذا من جهة أولى، ومن جهة أخرى ينتج عن (4.11)، أن:

$$dS=\beta^{ij} d\varepsilon_{ij} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial T^2}(\theta)\, dT \qquad (4.13)$$

ينتج عن(4.12) و(4.13)، أن:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial T^2}(\theta) \qquad (4.14)$$

إن المقدار $T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ هو مقدار ثابت [3,5]، يدعى بالحرارة النوعية للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$، خلال تشوه ثابت، ونرمز لهذا المقدار الثابت بالرمز $c_{\boldsymbol{\varepsilon}}$. ينتج عن ذلك وعن (4.14)، أن:

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial T^2}(\theta) = \frac{c_{\boldsymbol{\varepsilon}}}{T} \qquad (4.15)$$

بمكاملة طرفي العلاقة (4.15) مرة واحدة على المجال $[T_0, T]$، وبملاحظة أن: $\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial T}(0)=0$، فنحصل على:

$$-\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial T}(\theta) = c_{\boldsymbol{\varepsilon}} \ln\frac{T}{T_0} = c_{\boldsymbol{\varepsilon}} \ln\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right) \qquad (4.16)$$

ينتج الآن عن (4.16) أن (4.11) تأخذ الشكل:

$$S=\beta^{ij}\varepsilon_{ij} + c_{\boldsymbol{\varepsilon}} \ln\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right) \qquad (4.17)$$

وإذا نشرنا الآن المقدار $\ln\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right)$ في متسلسلة تايلور في جوار النقطة $\theta=0$، وأخذنا بعين الاعتبار فرضيات الجسم ($|\theta/T_0| \ll 1$)، يمكننا الاكتفاء بالحد الأول فقط من هذا المنشور، فنحصل على: $\ln\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right) \cong \frac{\theta}{T_0}$. ينتج عن ذلك وعن (4.16) وعن

كون $\mathcal{F}_0(0)=0$ ، أن: $\mathcal{F}_0(\theta)=-\frac{c_{\boldsymbol{\varepsilon}}}{2\,\mathrm{T}_0}\,\theta^2$. ومما تقدم ينتج أن الطاقة الحرة $\mathcal{F}$ والأنتروبية S تصبحان بالشكل التالي:

$$\mathcal{F}(\varepsilon_{ij},\mathrm{T})=\frac{1}{2}C_{\mathrm{T}}^{ijk\ell}\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{k\ell}-\beta^{ij}\,\varepsilon_{ij}\,\theta\;-\frac{c_{\boldsymbol{\varepsilon}}}{2\,\mathrm{T}_0}\,\theta^2 \qquad (4.18)$$

$$\mathrm{S}=\beta^{ij}\,\varepsilon_{ij}\;+\;c_{\boldsymbol{\varepsilon}}\frac{\theta}{\mathrm{T}_0} \qquad (4.19)$$

إن الحد الأول في الطرف الأيمن للعلاقة (4.18) له صفة الانفعال فقط، والحد الثالث له طابع حراري فقط، بينما الحد الثاني له طابع مزيج لهذين الطابعين السابقين، وهو يعبر عن التأثير المتبادل بين مقطع الانفعال ومقطع الحرارة. وفي(4.18)، أيضاً، تمثل المقادير $C_{\mathrm{T}}^{ijk\ell}$ المعاملات الميكانيكية للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$، بينما ترتبط المقادير β^{ij} بالمؤثرات الميكانيكية وكذلك بالمؤثرات الحرارية لهذا الجسم، لذلك تدعى بالمعاملات الترموميكانيكية للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$. ينتج عن (4.9)، وعن تناظر مقطع الانفعال أن المعاملات $C_{\mathrm{T}}^{ijk\ell}$ والمعاملات β^{ij} تحقق الخواص التناظرية التالية:

$$C_{\mathrm{T}}^{ijk\ell}=C_{\mathrm{T}}^{jik\ell}\;,\;C_{\mathrm{T}}^{ijk\ell}=C_{\mathrm{T}}^{ij\ell k}\;,\;C_{\mathrm{T}}^{ijk\ell}=C_{\mathrm{T}}^{k\ell ij}$$
$$\beta^{ij}=\beta^{ji} \qquad (4.20)$$

ثانياً: *الطاقة الداخلية $\mathcal{U}$ كتابع للمركبات موافقة التغيير لمقطع الانفعال وللأنتروبية، والعلاقات التأسيسية الموافقة في الجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$*غير المتجانس وغير المتماثل المناحي، *كل ذلك في نظام احداثي منحني كيفي η_i:* سنعتبر هنا أن الطاقة الداخلية $\mathcal{U}$ المتعلقة بعنصر الحجم اللاغرانجي dV المأخوذ من الجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$، تمثل تابع حالة ترموديناميكية: $\mathcal{U}=\mathcal{U}(\varepsilon_{ij},\mathrm{S})$. بنشر الطاقة الداخلية $\mathcal{U}$ في متسلسلة تايلور في جوار الحالة الطبيعية للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$ (هي الحالة التي ينعدم فيها كلاً من مقطع الأنتروبية S ومقطع الانفعال $\boldsymbol{\varepsilon}$، ومقطع الإجهاد $\boldsymbol{\sigma}$، بينما يكون فيها مقطع الحرارة المطلقة T مساوياً لدرجة حرارة الحالة الطبيعية T_0، وأما قيمة الطاقة الداخلية لأجل الحالة الطبيعية فهي مقدار ثابت، يمكن أن نفرضه معدوماً دون المساس بالعمومية)، فنجد:

$$\mathcal{U}(\varepsilon_{ij},\mathrm{S}) = \mathcal{U}(\mathbf{0},0) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}}(\mathbf{0},0)\ \varepsilon_{ij} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathrm{S}}(\mathbf{0},0)\ \mathrm{S} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{k\ell}}(\mathbf{0},0)\ \varepsilon_{ij}\ \varepsilon_{k\ell} + 2\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \mathrm{S}}(\mathbf{0},0)\ \varepsilon_{ij}\ \mathrm{S} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \mathrm{S}^2}(\mathbf{0},0)\ \mathrm{S}^2\right] + \cdots$$

وبما أنه في الحالة الطبيعية، ينعدم مقطع الانتروبية ومقطعا الانفعال والإجهاد، وكذلك مقطع الطاقة الداخلية، وفي الحالة الطبيعية أيضاً [3,5]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}(\mathbf{0},0) = 0\ ,\quad \mathrm{T}_0 = \frac{\partial U}{\partial \mathrm{S}}(\mathbf{0},0)$$

فينتج عن ذلك أن المنشور السابق يأخذ الشكل الآتي:

$$\mathcal{U}(\varepsilon_{ij},\mathrm{S}) = \mathrm{T}_0\ \mathrm{S} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{k\ell}}(\mathbf{0},0)\ \varepsilon_{ij}\ \varepsilon_{k\ell} + 2\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \mathrm{S}}(\mathbf{0},0)\ \varepsilon_{ij}\ \mathrm{S} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \mathrm{S}^2}(\mathbf{0},0)\ \mathrm{S}^2\right] + \cdots \qquad (4.21)$$

في (4.21)، إذا اكتفينا بقوى المركبات موافقة التغيير ε_{ij} والانتروبية S، التي مجموعها لا يزيد عن الـ 2 (الأمر الذي يتوافق مع الجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$، ومع حالة كون $|(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)/\mathrm{T}_0| \ll 1$)، عندئذٍ تصبح (4.21) بالشكل:

$$\mathcal{U}(\varepsilon_{ij},\mathrm{S}) = \frac{1}{2}C_{\mathrm{S}}^{ijk\ell}\ \varepsilon_{ij}\ \varepsilon_{k\ell} - \vartheta^{ij}\ \varepsilon_{ij}\ \mathrm{S} + \mathcal{U}_0(\mathrm{S}) \qquad (4.22)$$

حيث: $\mathcal{U}_0(\mathrm{S})$ تابع فقط لـ S، و:

$$C_{\mathrm{S}}^{ijk\ell} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \varepsilon_{k\ell}}(\mathbf{0},0)\ ,\quad \vartheta^{ij} = -\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}\,\partial \mathrm{S}}(\mathbf{0},0) \qquad (4.23)$$

وبما أن[4]:

$$d\,\mathcal{U} = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{\mathrm{S}} d\,\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathrm{S}}\right)_{\boldsymbol{\varepsilon}} d\,\mathrm{S} = \sigma^{ij}\,d\,\varepsilon_{ij} + \mathrm{T}\,d\,\mathrm{S} \qquad (4.24)$$

حيث الرمز $\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{\mathrm{S}}$ يعني اشتقاق $\mathcal{U}$ في ظروف آدياباتية (أي عندما يكون مقطع الأنتروبية S ثابت) ، والرمز $\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathrm{S}}\right)_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ يعني اشتقاق $\mathcal{U}$ خلال تشوه ثابت، فينتج عن (4.22) و (4.24) أنّ:

$$\sigma^{ij} = C_{\mathrm{S}}^{ijk\ell}\,\varepsilon_{k\ell} - \vartheta^{ij}\,\mathrm{S} = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{\mathrm{S}} \qquad (4.25)$$

$$\mathrm{T} = -\vartheta^{ij}\,\varepsilon_{ij} + \frac{\partial \mathcal{U}_0}{\partial \mathrm{S}}(\mathrm{S}) = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathrm{S}}\right)_{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (4.26)$$

وينتج، الآن عن (4.23) وعن كون أن مقطع الانفعال $\boldsymbol{\varepsilon}$ متناظر، أن المعاملات $C_{\mathrm{S}}^{ijk\ell}$ والمعاملات ϑ^{ij} تحقق الخواص التناظرية التالية:

$$C_{\mathrm{S}}^{ijk\ell} = C_{\mathrm{S}}^{jik\ell}\ ,\ C_{\mathrm{S}}^{ijk\ell} = C_{\mathrm{S}}^{ij\ell k}\ ,\ C_{\mathrm{S}}^{ijk\ell} = C_{\mathrm{S}}^{k\ell ij} \qquad \vartheta^{ij} = \vartheta^{ji} \qquad (4.27)$$

ندعوا العلاقات (4.25) و (4.26) بالعلاقات التأسيسية للجسم الصلب المرن ،الأنيزوتروبي $(\mathcal{H})$، (بشكلها الثالث).

ولنوجد الآن العلاقات التي تربط المعاملات $C_{\mathrm{T}}^{ijk\ell}$ و β^{ij} بالمعاملات $C_{\mathrm{S}}^{ijk\ell}$ و ϑ^{ij} ، آخذين بعين الاعتبار فرضيات الجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$، التي تتمثل بكون تشوهاته المرنة صغيرة جداً، وبكون $|\theta / \mathrm{T}_0| \ll 1$. بحل العلاقة (4.19) بالنسبة لـ θ نجد:

$$\theta = \frac{\mathrm{T}_0}{c_{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathrm{S} - \beta^{ij}\,\varepsilon_{ij}) \qquad (4.28)$$

بتعويض ذلك في علاقات Duhamel–Neumann (4.10)، نحصل على:

$$\sigma^{ij} = (C_{\mathrm{T}}^{ijk\ell} + \frac{\mathrm{T}_0}{c_{\boldsymbol{\varepsilon}}}\beta^{ij}\,\beta^{k\ell})\,\varepsilon_{k\ell} - \frac{\mathrm{T}_0}{c_{\boldsymbol{\varepsilon}}}\beta^{ij}\,\mathrm{S} \qquad (4.29)$$

وبمقارنة (4.25) مع (4.29)، نجد أن:

$$C_{\mathrm{S}}^{ijk\ell} = C_{\mathrm{T}}^{ijk\ell} + \frac{\mathrm{T}_0}{c_{\boldsymbol{\varepsilon}}}\beta^{ij}\,\beta^{k\ell},\quad \vartheta^{ij} = \frac{\mathrm{T}_0}{c_{\boldsymbol{\varepsilon}}}\beta^{ij} \qquad (4.30)$$

ثالثاً: *كمون Gibbs الترموديناميكي $\mathcal{G}$، كتابع لكلٍ من المركبات مخالفة التغيير لمقطع الإجهاد وللحرارة، والعلاقات التأسيسية الموافقة في الجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$* غير المتجانس وغير المتماثل المناحي، *كل ذلك في نظام احداثي منحني كيفي η_i:*

في الترموديناميك، يلعب كمون Gibbs الترموديناميكي $\mathcal{G}$ دوراً هاماً، وهو يعطى بالعلاقة التالية في أي نظام احداقي منحني η_i:

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} - \sigma^{ij}\,\varepsilon_{ij} \tag{4.31}$$

والتي ينتج عنها أن:

$$d\mathcal{G} = d\mathcal{F} - \sigma^{ij}\,d\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}\,d\sigma^{ij} \tag{4.32}$$

حيث: $d\sigma^{ij} = \nabla_k \sigma^{ij}\, d\eta^k$ والرمز $\nabla_k \sigma^{ij}$ يعني المشق موافق التغيير للمركبات مخلفة التغيير σ^{ij} بالنسبة لـ η_k، وهو يعطى بالعلاقة [6,8,9]:

$$\nabla_k \sigma^{ij} = \partial_k \sigma^{ij} + \Gamma^i_{km}\,\sigma^{mj} + \Gamma^j_{km}\,\sigma^{im}$$

ينتج عن (4.32) وعن العلاقة (4.3)، أن:

$$d\mathcal{G} = -\varepsilon_{ij}\,d\sigma^{ij} - \mathrm{S}\,d\mathrm{T} \tag{4.33}$$

بما أن العلاقة السابقة تعطي التفاضل التام للتابع $\mathcal{G}(\sigma^{ij},\mathrm{T})$، ولدينا:

$$d\mathcal{G} = \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma^{ij}}\right)_{\mathrm{T}} d\sigma^{ij} + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\boldsymbol{\sigma}} d\mathrm{T} \tag{4.34}$$

فينتج عن(4.33) و(4.34) أن:

$$\varepsilon_{ij} = -\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma^{ij}}\right)_{\mathrm{T}}, \quad \mathrm{S} = -\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\boldsymbol{\sigma}} \tag{4.35}$$

لننشر، الآن كمون Gibbs: $\mathcal{G}(\sigma^{ij},\mathrm{T})$ في متسلسلة تايلور في جوار الحالة الطبيعية $(\mathbf{0},\mathrm{T}_0)$ للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$. باتباع طريقة مشابهة لما فعلناه في الفقرتين السابقتين من أجل كل حالتي الطاقة الحرة $\mathcal{F}$ والطاقة الداخلية $\mathcal{U}$، نحصل على:

$$-\mathcal{G}(\sigma^{ij},\mathrm{T}) = \frac{1}{2} S^{\mathrm{T}}_{ijk\ell}\,\sigma^{ij}\,\sigma^{k\ell} + \alpha_{ij}\,\sigma^{ij}\,\theta + \mathcal{G}_0(\theta) \tag{4.36}$$

حيث: $\mathcal{G}_0(\theta)$ تابع فقط لـ θ، كما أن:

$$S^{\mathrm{T}}_{ijk\ell} = -\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial\sigma^{ij}\,\partial\sigma^{k\ell}}(\mathbf{0},\mathrm{T}_0)\ ,\quad \alpha_{ij} = -\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial\sigma^{ij}\,\partial\,\mathrm{T}}(\mathbf{0},\mathrm{T}_0) \qquad (4.37)$$

وهنا أيضاً أخذنا بعين الاعتبار فرضيات الجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$، المتمثلة بكون تشوهاته المرنة صغيرة جداً، وبكون $|\theta/\mathrm{T}_0| \ll 1$.

نحصل، الآن على العلاقات التأسيسية، بشكلها الثاني، في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i باستخدام العلاقتين(4.35)، فنجد:

$$\varepsilon_{ij} = S^{T}_{ijk\ell}\,\sigma^{k\ell} + \alpha_{ij}\,\theta \qquad (4.38)$$

$$\mathrm{S} = \alpha_{ij}\,\sigma^{ij} + \frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial \mathrm{T}}(\theta) \qquad (4.39)$$

ندعوا العلاقتان(4.38) و(4.39) بالعلاقتين التأسيسيتين (الشكل الثاني)، للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$، غير المتجانس والأنيزوتروبي، في النظام الاحداثي المنحني الكيفي η_i.

يبقى علينا الآن، تحديد قيمة الحد $\frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial \mathrm{T}}(\theta)$، في الطرف الأيمن للعلاقة(4.39)، والذي يتم باتباع الآتي. بما أن $\mathrm{S} = \mathrm{S}(\sigma^{ij}, \mathrm{T})$، فإن:

$$d\,\mathrm{S} = \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \sigma^{ij}}\right)_{\mathrm{T}} d\,\sigma^{ij} + \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\boldsymbol{\sigma}} d\,\mathrm{T} \qquad (4.40)$$

هذا من جهة أولى، ومن جهة أخرى من(4.39)، ينتج أن:

$$d\,\mathrm{S} = \alpha_{ij}\,d\sigma^{ij} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0}{\partial \mathrm{T}^2}(\theta)\ d\,\mathrm{T} \qquad (4.41)$$

وينتج عن(4.40) و(4.41)، أن:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0}{\partial \mathrm{T}^2}(\theta) \qquad (4.42)$$

إن المقدار $\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{T}$ هو مقدار ثابت [3,5]، يسمى بالحرارة النوعية للجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$، خلال مقطع إجهاد ثابت، ونرمز لهذا المقدار الثابت بالرمز $c_{\boldsymbol{\sigma}}$. وينتج عن ذلك وعن (4.42)،أن:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}_0}{\partial T^2}(\theta) = \frac{c_\sigma}{T} \qquad (4.43)$$

بمكاملة طرفي العلاقة السابقة مرة واحدة على المجال $[T_0, T]$، وملاحظة أن: $\frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial T}(0) = 0$، نحصل على:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial T}(\theta) = c_\sigma \ln \frac{T}{T_0} = c_\sigma \ln (1+\frac{\theta}{T_0}) \qquad (4.44)$$

وينتج عن(4.44) أن(4.39) تصبح بالشكل:

$$S = \alpha_{ij}\, \sigma^{ij} + c_\sigma \ln (1+\frac{\theta}{T_0}) \qquad (4.45)$$

ولكن بالأخذ بعين الاعتبار فرضيات الجسم ($|\theta / T_0| \ll 1$)، فيمكننا اعتبار أن: $\ln (1+\frac{\theta}{T_0}) \cong \frac{\theta}{T_0}$. فينتج عن ذلك وعن (4.44) وعن كون $\mathcal{G}_0(0) = 0$، أن: $\mathcal{G}_0(\theta) = \frac{c_\sigma}{2T_0}\theta^2$. ومما تقدم يصبح كمون Gibbs الترموديناميكي $\mathcal{G}$ والأنتروبية S بالشكل:

$$-\mathcal{G}(\sigma^{ij}, T) = \frac{1}{2} S^T_{ijk\ell}\, \sigma^{ij}\, \sigma^{k\ell} + \alpha_{ij}\, \sigma^{ij}\, \theta + \frac{c_\sigma}{2T_0}\theta^2 \qquad (4.46)$$

$$S = \alpha_{ij}\, \sigma^{ij} + c_\sigma \frac{\theta}{T_0} \qquad (4.47)$$

ولنوجد، الآن العلاقة التي تربط مابين c_σ و c_ε. لهذا الغرض نعوض(4.38) في (4.11)، فنجد:

$$S = S^T_{ijk\ell}\, \beta^{ij}\, \sigma^{k\ell} + \alpha_{ij}\, \beta^{ij}\, \theta - \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial T}(\theta) \qquad (4.48)$$

ينتج عن ذلك وعن تعريف c_σ، أن:

$$c_\sigma := T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\sigma = T\left[\alpha_{ij}\, \beta^{ij} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial T^2}(\theta)\right] \qquad (4.49)$$

ينتج، الآن عن ذلك وعن (4.15)، أن:

$$c_\sigma - c_\varepsilon = T\, \alpha_{ij}\, \beta^{ij} \qquad (4.50)$$

وبنفس الطريقة المتبعة في الفقرتين السابقتين، نجد أن المعاملات $S^{T}_{ijk\ell}$ والمعاملات α_{ij} تحقق الخواص التناظرية الآتية:

$$S^{\mathrm{T}}_{ijk\ell} = S^{\mathrm{T}}_{jik\ell}\ ,\ S^{\mathrm{T}}_{ijk\ell} = S^{\mathrm{T}}_{ij\ell k}\ ,\ S^{\mathrm{T}}_{ijk\ell} = S^{\mathrm{T}}_{k\ell ij} \qquad (4.51)$$
$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

كما أنه بنفس الطريقة المتبعة في الفقرة السابقة، يمكن إيجاد العلاقات التي تربط مابين المعاملات $S^{\mathrm{T}}_{ijk\ell}$ و α_{ij} والمعاملات $C^{ijk\ell}_{\mathrm{T}}$ و β^{ij}، بالأخذ بعين الاعتبار فرضيات الجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$، المتمثلة بكون تشوهاته المرنة صغيرة جداً، وبكون $|\theta / \mathrm{T}_0| \ll 1$.

تعريف الجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$، المتماثل المناحي: نقول أن الجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$ متماثل المناحي إذا وفقط إذا تحقق أحد البنود التالية:

$$C^{ijk\ell}_{\mathrm{T}} = \lambda_{\mathrm{T}}\, g^{ij} g^{k\ell} + \mu_{\mathrm{T}}\,(g^{i\ell} g^{jk} + g^{j\ell} g^{ik}),\ \beta^{ij} = \beta g^{ij} \qquad (4.52)$$

حيث: λ_{T} و μ_{T} هي معاملات Lame الأولى، المقاسة في ظروف إيزوتيرمية (متساوية درجة الحرارة المطلقة)، أما β فهو معامل حراري،

$$C^{ijk\ell}_{\mathrm{S}} = \lambda_{\mathrm{S}}\, g^{ij} g^{k\ell} + \mu_{\mathrm{S}}\,(g^{i\ell} g^{jk} + g^{j\ell} g^{ik}),\ \vartheta^{ij} = \vartheta g^{ij} \qquad (4.53)$$

حيث: λ_{S} و μ_{S} هي معاملات Lame الأولى،المقاسة في ظروف آدياباتية (متساوية الأنتروبية)، أما ϑ فهو معامل حراري آخر،

$$S^{T}_{ijk\ell} = \lambda^{\mathrm{T}} g_{ij}\, g_{k\ell} + \mu^{\mathrm{T}}\,(g_{i\ell}\, g_{jk} + g_{j\ell}\, g_{ik}),\ \alpha_{ij} = \alpha\, g_{ij} \qquad (4.54)$$

حيث: λ^{T} و μ^{T} هي معاملات Lame الثانية المقاسة في ظروف إيزوتيرمية، أما α فهو ثابت حراري آخر جديد مختلف.

حالات خاصة:

1) إذا كان الجسم الصلب المرن $(\mathcal{H})$ متماثل المناحي بالشكل (4.52)، فتأخذ عندئذٍ كلاً من الطاقة الحرة والعلاقات التأسيسية الموافقة لها، الشكل الآتي:

$$\mathcal{F}(\varepsilon_{ij}, \mathrm{T}) = \frac{1}{2}\Big[\lambda_{\mathrm{T}}\, g^{ij} g^{k\ell} + \mu_{\mathrm{T}}\,(g^{i\ell} g^{jk} + g^{j\ell} g^{ik})\Big]\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{k\ell} \qquad (4.55)$$
$$- \beta g^{ij}\,\varepsilon_{ij}\,\theta\ - \frac{c_{\boldsymbol{\varepsilon}}}{2\,\mathrm{T}_0}\,\theta^2\ ,$$

$$\sigma^{ij} = \Big[\lambda_{\mathrm{T}} g^{ij} g^{k\ell} + \mu_{\mathrm{T}}(g^{i\ell} g^{jk} + g^{j\ell} g^{ik})\Big]\,\varepsilon_{k\ell} - \beta g^{ij}\,\theta\ , \qquad (4.56)$$

$$S = \beta g^{ij}\varepsilon_{ij} + c_{\varepsilon}\frac{\theta}{T_0} \tag{4.57}$$

أو:

$$\mathcal{F}(\varepsilon_{ij},T) = \frac{1}{2}\lambda_T \varepsilon_i^i \varepsilon_j^j + \mu_T \varepsilon_{ij}\varepsilon^{ij} - \beta\varepsilon_j^j\theta - \frac{c_{\varepsilon}}{2T_0}\theta^2, \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}\sigma^{ij} &= \lambda_T g^{ij}\varepsilon_k^k + 2\mu_T\varepsilon^{ij} - \beta g^{ij}\theta = \\ &= 2\mu_T\varepsilon^{ij} + g^{ij}(\lambda_T\varepsilon_k^k - \beta\theta),\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$S = \beta\varepsilon_k^k + c_{\varepsilon}\frac{\theta}{T_0} \tag{4.59}$$

2) إذا كان الجسم الصلب المرن ($\mathcal{H}$) متماثل المناحي بالشكل (4.53)، فتأخذ عندئذٍ كلاً من الطاقة الداخلية والعلاقات التأسيسية الموافقة لها، الشكل الآتي:

$$\mathcal{U}(\varepsilon_{ij},S) = \frac{1}{2}\left[\lambda_S g^{ij}g^{k\ell} + \mu_S(g^{i\ell}g^{jk} + g^{j\ell}g^{ik})\right]\varepsilon_{ij}\varepsilon_{k\ell} - \vartheta g^{ij}\varepsilon_{ij}S + \mathcal{U}_0(S), \tag{4.60}$$

$$\sigma^{ij} = \left[\lambda_S g^{ij}g^{k\ell} + \mu_S(g^{i\ell}g^{jk} + g^{j\ell}g^{ik})\right]\varepsilon_{k\ell} - \vartheta g^{ij}S, \tag{4.61}$$

$$T = -\vartheta g^{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\partial\mathcal{U}_0}{\partial S}(S) \tag{4.62}$$

أو:

$$\mathcal{U}(\varepsilon_{ij},S) = \frac{1}{2}\lambda_S\varepsilon_i^i\varepsilon_j^j + \mu_S\varepsilon_{ij}\varepsilon^{ij} - \vartheta\varepsilon_j^j S + \mathcal{U}_0(S), \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}\sigma^{ij} &= \lambda_S g^{ij}\varepsilon_k^k + 2\mu_S\varepsilon^{ij} - \vartheta g^{ij}S = \\ &= 2\mu_S\varepsilon^{ij} + g^{ij}(\lambda_S\varepsilon_k^k - \vartheta S),\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$T = -\vartheta\varepsilon_k^k + \frac{\partial\mathcal{U}_0}{\partial S}(S) \tag{4.65}$$

3) أخيراً إذا كان الجسم الصلب المرن ($\mathcal{H}$) متماثل المناحي بالشكل (4.54)، فيأخذ عندئذٍ كلاً من كمون Gibbs *الترموديناميكي والعلاقات التأسيسية الموافقة له، الشكل الآتي:*

$$-\mathcal{G}(\sigma^{ij},T) = \frac{1}{2}\left[\lambda^T g_{ij}g_{k\ell} + \mu^T(g_{i\ell}g_{jk} + g_{j\ell}g_{ik})\right]\sigma^{ij}\sigma^{k\ell} + \alpha g_{ij}\sigma^{ij}\theta + \frac{c_{\sigma}}{2T_0}\theta^2 \tag{4.66}$$

$$\varepsilon_{ij} = \left[\lambda^{\mathrm{T}} g_{ij}\, g_{k\ell} + \mu^{\mathrm{T}} (g_{i\ell}\, g_{jk} + g_{j\ell}\, g_{ik})\right] \sigma^{k\ell} + \alpha\, g_{ij}\, \theta\ , \quad (4.67)$$

$$\mathrm{S} = \alpha\, g_{ij}\, \sigma^{ij} + c_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{\theta}{\mathrm{T}_0} \quad (4.68)$$

أو:

$$-\mathcal{G}(\sigma^{ij}, \mathrm{T}) = \frac{1}{2} \lambda^{\mathrm{T}}\, \sigma_i^i\, \sigma_j^j + \mu^{\mathrm{T}}\, \sigma_{ij}\, \sigma^{ij} + \\ + \alpha\, \sigma_j^j\, \theta + \frac{c_{\boldsymbol{\sigma}}}{2\,\mathrm{T}_0}\, \theta^2, \quad (4.69)$$

$$\varepsilon_{ij} = \lambda^{\mathrm{T}} g_{ij}\, \sigma_k^k + 2\mu^{\mathrm{T}}\, \sigma_{ij} + \alpha\, g_{ij}\, \theta = \\ = 2\mu^{\mathrm{T}} \sigma_{ij} + g_{ij} (\lambda^{\mathrm{T}} \sigma_k^k + \alpha\, \theta)\ , \quad (4.70)$$

$$\mathrm{S} = \alpha\, \sigma_k^k + c_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{\theta}{\mathrm{T}_0} \quad (4.71)$$

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولاً) الاستنتاجات: ناقشنا ثلاثة توابع للحالة الترموديناميكية للجسم *الصلب المرن (H)* غير المتجانس وغير المتماثل المناحي، كما ناقشنا العلاقات التأسيسية المتعلقة بها، كل ذلك في نظام احداثي منحني كيفي؛ التابع الأول هو الطاقة الحرة كتابع لمقطعي الانفعال والحرارة المطلقة، والتابع الثاني هو الطاقة الداخلية كتابع لمقطعي الانفعال والأنتروبية، أما التابع الأخير هو كمون Gibbs الترموديناميكي كتابع لمقطعي الإجهاد والحرارة المطلقة. وتكمن أهمية ذلك بأنه يمكن أن نختار الإحداثيات المنحنية الملائمة التي تسهل حل المسألة.

ثانياً) المقترحات: يمكن أن نختتم هذا البحث بثلاث مسائل للمناقشة، هي الآتية:

مسألة1: إعادة نفس الدراسة لأجل الجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب.

مسألة2: مناقشة قانون Fourier في التوصيل الحراري ومعادلة انتشار الأنتروبية، كل ذلك في نظام احداثي منحني كيفي.

مسألة2: إعادة المسألة2 السابقة لأجل حالة الجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب.

المراجع

[1]-Kupradse V. D., Gegelya T. G., Bashelishili M. O., Burchuladse T. V., Three – Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity. Nauka, Moscow, 1968 and 1976 (In Russian).
[2] Gurtin M. E., 1972, *The Linear Theory of Elasticity*,[in:] Encyclopedia of Physics, vol. AIa / 2, Springer – Verlag, Berlin.
[3]- W. Nowocki , Theory of Elasticity , PWN Warsaw 1970.
[4]- Fung, Y.C, 1966 Foundations of Solid Body Mechanics, Warsaw, (in Polish).
[5]- Nowacki, W. , 1962, Thermoelasticity, Oxford – Warsaw, Pergamon Press , PWN.
[6]-*Heinbockel ,J.H, 1996*- Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics, Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University.
[7]- *Truesdell C.***:** Mechanics of Solids, Volume II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1984.
[8]- *Hung Nguyen-Schåfer*, Tensor Analysis and Elementary Differential Geometry for Physicists and Engineers, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2017.
[9]- *Rebecca M. Brannon*, Curvilinear Analysis in a Euclidean Space, Second Edition, University of New Mexico, 2004.