استخدام طريقة العناصر المنتهية في إيجاد سلوك ستاتيكي لصفيحة مستطيلة تشكل جزء من آلة عشارية

طالبة الدكتوراه : بشرى عزيز الحبيب
قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث
اشراف الدكتور: مصطفى حسن

ملخص البحث

الطرائق الهامة في تحديد معادلات بترامي – ميشيل هي المعادلات الي تصف ميكانيك بشكل عام وميكانيك المرونة بشكل خاص ومقاومة المواد بشكل أخص، من إحدى الأوساط المستمرة الإجهادات مباشرة" الأمر البالغ الأهمية في الصناعة .

هذه الطريقة تمكننا من حساب الإجهادات ولكن تملك السلبية التالية : في معظم الأحيان الحل التحليلي يكون معقد الأمر الذي يجبرنا للذهاب باتجاه الطرق العددية.

في البحث سنقوم أولا" بعرض معادلات بترامي –ميشيل السكونية لأجل صفيحة مستطيلة تشكل أحد أجزاء آلة عشارية مزودة بشروط حدية وبدئية بعدها سنقوم باستخدام طريقة العناصر المنتهية، ثم تقطيع المعادلات اللازمة .

الكلمات المفتاحية :

معادلات بترامي – ميشيل للحالة السكونية المستوية الأولى ،آلة عشارية ، طريقة العناصر المتناهية .

Using the FEM method in finding the static behavior of a rectangular plate which is part of Ten-Bar Mechanism

Abstract

The Btrami-Michell equations in the mechanics of continuous media in general, the mechanics of elasticity and the resistance of materials in particular, they are considered one of the important methods for determining stresses directly, which is extremely important in industry.

This method enables us to calculate stresses, but it has the following drawback: Most of the time the analytical solution is complex, which forces us to go towards numerical methods.

In the research, we will, firstly, present the Btrami-Michell static equations for a rectangular plate that forms one of the parts of a decagon machine provided with boundary with initial conditions. Then we will use the finite element method to discretize the necessary equations

Key words: Btrami-Michell equations for the first plane static state, Ten - Bar mechanism, Finite element method.

مقدمة :

يعتبر سانت فينانت(١٨٩٠) [3]أول من وضع صياغة ناقصة لمعادلات الإجهادات من خلال معادلات الاستمرار بالانفعالات يكمن هذا النقص أن عدد المعادلات أقل ب ثلاث من عدد المجاهيل (في الحالة الفراغية للانفعالات) ، مع بداية (١٩١٠) [٣] أتى العالمان الفرنسيان بترامي – ميشيل لسد هذا النقص من خلال إضافة معادلات نافيير إلى معادلات سانت فينانت ،وقد أطلقوا على المعادلات الجديدة بمعادلات بترامي – ميشيل وبعد مضي فترة للأسف ظهرت مشكلة جديدة تكمن بالآتي : صحيح أن عدد المعادلات الجديدة يساوي عدد المجاهيل لكن عندما تكون الشروط الحدية ليست شروط الجر فيكون حل هذه المعادلات ليس وحيد.

هدف البحث:

يهدف البحث إلى مناقشة صياغة بترامي – ميشيل لصفيحة مستطيلة تشكل جزء من الآلة العشارية المبينة في الشكل b. حيث أن الحل التحليلي لهذه المسألة معقد مما يجبرنا على تقطيع هذه المسألة (كتابتها بالشكل الضعيف وتحويلها إلى معادلات فرقية) مستخدمين في ذلك طريقة العناصر المنتهية من أجل متطلبات البحث يلزمنا فيما يلي عرض صياغة بترامي – ميشيل لصفيحة مستطيلة وتشكل جزء من آلتنا.

طرق ونتائج البحث

الآلة العشارية: جملة مكونة من عشرة أجسام مرتبطة فيما بينها باثني عشر

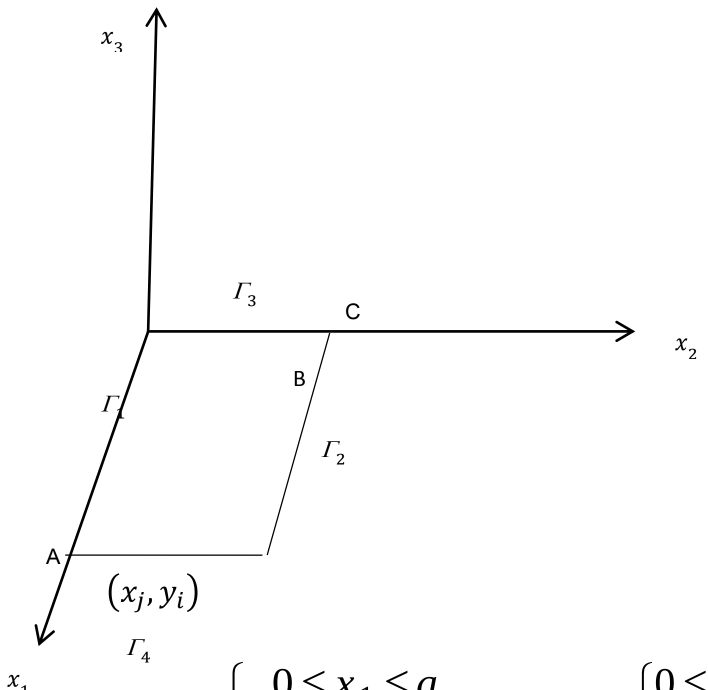
مفصلاً دوارنياً [1]الشكل [b] [2]

مسألة بترامي _ **ميشيل :[3]**

ليكن لدينا صفيحة مستطيلة $OABC$ متوازنة ولا تخضع إلى قوى حجمية ومتجانسة ومتماثلة المناحي ولنرمز بالرمز Ω للمنطقة الدّاخلية في الصفيحة ولحدود المنطقة بالرّمز $\partial\Omega$ ولطول ضلع الصّفيحة بالرّمز a ولعرضها b حيث:

$$\partial\Omega = \underset{\Gamma_1}{[OA]} + \underset{\Gamma_4}{[AB]} + \underset{\Gamma_2}{[BC]} + \underset{\Gamma_3}{[OC]}$$

ويمكن توضيح الصّفيحة كما في الشّكل المجاور (١,٢)



حيث يكون لدينا:

$$\Gamma_1 : \begin{cases} 0 \le x_1 \le a \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \Gamma_2 : \begin{cases} 0 \le x_1 \le a \\ x_2 = b \end{cases}$$

$$\Gamma_3 : \begin{cases} 0 \le x_2 \le b \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad \Gamma_4 : \begin{cases} 0 \le x_2 \le b \\ x_1 = a \end{cases}$$

ويكون نموذج هوك كما يلي:

١) معادلات التّوازن المحققة في Ω:

$$\sigma_{\beta\alpha,\beta} = 0 \qquad \alpha = 1,2$$

أي:(1)

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} = 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0 \end{cases}$$

٢) العلاقات الهندسية المحققة في Ω:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(u_{1,1} + u_{1,1}) = u_{1,1} \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(u_{2,2} + u_{2,2}) = u_{2,2} \end{cases} \qquad (2)$$

٣) العلاقات التّأسيسية المحققة في Ω:

$$\sigma_{\alpha\beta} = 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta} + \lambda\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} \qquad \alpha,\beta = 1,2 \qquad (3)$$

حيث: $\varepsilon_{\gamma\gamma} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$ فيما يلي سنستنتج معادلات بترامي _ ميشيل بتقليص العلاقات نجد:

$$\sigma_{\gamma\gamma} = 2\mu\varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\lambda\varepsilon_{\gamma\gamma} = 2(\mu + \lambda)\varepsilon_{\gamma\gamma} \Rightarrow \varepsilon_{\gamma\gamma} = \frac{\sigma_{\gamma\gamma}}{2(\mu + \lambda)}$$

وبالتّالي:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu}[\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]$$

$$;\sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{11} + \sigma_{22}; \alpha, \beta = 1,2 \qquad (4)$$

وبالتّالي نجد:

(5)

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{2\mu}[(1-\dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)})\sigma_{11} - \dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}\sigma_{22}] \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{2\mu}[(1-\dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)})\sigma_{22} - \dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}\sigma_{11}] \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2\mu}\sigma_{12} = \varepsilon_{21} \end{cases}$$

نعلم أنّ معادلة توافق الانفعالات هي: (6) $\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}$.

بتعويض(4)في (6) نجد:

$$\frac{1}{2\mu}[\sigma_{11,22} + \sigma_{22,11} - \frac{1}{2(\mu+\lambda)}\nabla_1^2\sigma_{\gamma\gamma}] = \frac{1}{\mu}\sigma_{12,12} \quad (7)$$

حيث: $\nabla_1^2\sigma_{\gamma\gamma} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}\sigma_{\gamma\gamma} + \dfrac{\partial}{\partial x_2{}^2}\sigma_{\gamma\gamma}$ وبالتالي فأنّ المعادلة (٧)

تأخذ الشّكل:

$$\sigma_{11,22} + \sigma_{22,11} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \nabla_1^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 2\sigma_{12,12} \qquad (8)$$

وبالتالي اصبح لدينا جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل هي: σ_{11} و σ_{22} و σ_{12}.

نضيف للمعادلات السّابقة **الشّروط الحدية** التّالية:

على Γ_1 و Γ_2:

$$\sigma_{2\alpha} = 0 \qquad ;\alpha = 1,2$$

أي: (9)

$$\begin{cases} \sigma_{21} = 0 \\ \sigma_{22} = 0 \end{cases}$$

على Γ_3 :(10):

$$\begin{cases} \sigma_{11} = f \\ \sigma_{12} = 0 \end{cases}$$

على Γ_4:(11):

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -f \\ \sigma_{12} = 0 \end{cases}$$

سنكتفي في العرض الّسابق لمسألة بيلترامي _ ميشيل دون التّطرق إلى حلها.

صياغة عددية لمعادلة بيلترامي ميشيل باستخدام الفروق المنتهية:[4]

إنّ فكرة إيجاد الحل العددي للمسألة:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} &= 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} &= 0 \end{aligned} \qquad (١٢)$$

$$\sigma_{11,22}+\sigma_{22,11}-\frac{\lambda}{2\left(\lambda+\mu\right)}\nabla_1^2\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)=2\sigma_{12,21}$$

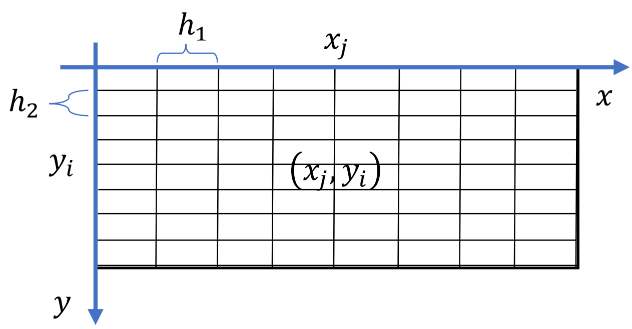
$$\nabla_1^2\sigma_{\gamma\gamma}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{\gamma\gamma}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sigma_{\gamma\gamma}$$

تتلخص في إيجاد قيم تقريبية عددية $\overset{-ij}{\sigma}_{\alpha\beta}\approx\sigma_{\alpha\beta}\left(x_j,y_i\right)$ لهذا الحل عند نقاط متقطعة $\left(x_j,y_i\right)$. من أجل ذلك علينا تقطيع منطقة العمل ثنائية البعد وبناءً على ذلك نقسم منطقة العمل إلى مجموعة من النقاط بحيث تكون المسافة بينها ثابتة سواءً أكانت على المحور الأفقي أم الشاقولي وذلك بالشكل:

$$\Omega_{h_1,h_2}=\left\{\left(x_j,y_i\right)=\left(a+\left(j-1\right)h_1,c+(i-1)h_2\right),1\le j\le M_1+1,\quad 1\le i\le M_2+1\right\}$$

حيث $M_1,M_2>2$ ثابتين صحيحين و $h_1=\frac{b-a}{M_1}>0\,,h_2=\frac{c-d}{M_2}>0$ تمثلان الخطوة المكانية، عندئذ نحصل على نقاط شبكة التقطيع وعددها

$$(M_2-1)\times\left(M_1-1\right)$$



الشكل 1: الشبكة المكانية

الآن لتسهيل بناء التقريب سوف نكتب المعادلات (١٢) بالشكل الصريح:[5]

$$\begin{pmatrix} \partial_1\sigma_{11}+\partial_2\sigma_{21} \\ \partial_1\sigma_{12}+\partial_2\sigma_{22} \\ \partial_{22}\sigma_{11}+\partial_{11}\sigma_{22}-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\left(\partial_{11}\sigma_{11}+\partial_{22}\sigma_{11}+\partial_{11}\sigma_{22}+\partial_{22}\sigma_{22}\right)-2\partial_{12}\sigma_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad (1.1)$$

عندئذٍ لإيجاد الحل التقريبي ينبغي إيجاد صياغة متقطعة للمعادلة (١,١) تكون محققة على نقاط الشبكة. نبدأ باستبدال المؤثرات التفاضلية بتقريباتها الملائمة من مؤثرات الفروق المنتهية:

$$\partial_{11}\sigma_{\alpha\beta}\left(x_j,y_i\right)\approx\frac{\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,i(j+1)}-2\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,ij}+\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,i(j-1)}}{h_1^2}$$

$$\partial_{22}\sigma_{\alpha\beta}\left(x_j,y_i\right)\approx\frac{\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,(i+1)j}-2\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,ij}+\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,(i-1)j}}{h_2^2}$$

$$\partial_{12}\sigma_{\alpha\beta}\left(x_j,y_i\right)\approx\frac{\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,(i+1)(j+1)}-\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,(i+1)(j)}-\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,(i)(j+1)}+\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,(i)(j)}}{h_1h_2}$$

$$\partial_{1}\sigma_{\alpha\beta}\left(x_j,y_i\right)\approx\frac{\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,i(j+1)}-\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,i(j)}}{h_1}$$

$$\partial_{2}\sigma_{\alpha\beta}\left(x_j,y_i\right)\approx\frac{\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,(i+1)j}-\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\,(i)j}}{h_2}$$

مؤثرات الفروق السابقة معرفة من أجل:

$$2 \le j \le M_1, \qquad 2 \le i \le M_2,$$

إنّ إزالـة $i = 1, M_1 + 1$ هـو لأن المعـادلات أعـلاه غيـر معرّفـة عند الحـدود التـي تخضع للشروط الحدية وفق:

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{ijk} = \sigma_{\alpha\beta}\left(x_j, y_i\right) = p_{\alpha\beta}\left(x_j, y_i\right), \left(x_j, y_i\right) \in \Omega\partial$$

$$\Omega\partial = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

وبالتالي تنتج الصيغة المتقطعة الآتية:

$$\frac{\bar{\sigma}_{11}^{i(j+1)} - \bar{\sigma}_{11}^{i(j)}}{h_1} + \frac{\bar{\sigma}_{12}^{(i+1)j} - \bar{\sigma}_{12}^{(i)j}}{h_2} = 0$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{12}^{i(j+1)} - \bar{\sigma}_{12}^{i(j)}}{h_1} + \frac{\bar{\sigma}_{22}^{(i+1)j} - \bar{\sigma}_{22}^{(i)j}}{h_2} = 0$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{11}^{(i+1)j}-2\bar{\sigma}_{11}^{ij}+\bar{\sigma}_{11}^{(i-1)j}}{h_2^2}+\frac{\bar{\sigma}_{22}^{i(j+1)}-2\bar{\sigma}_{22}^{ij}+\bar{\sigma}_{22}^{i(j-1)}}{h_1^2}$$
$$-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{\bar{\sigma}_{11}^{i(j+1)}-2\bar{\sigma}_{11}^{ij}+\bar{\sigma}_{11}^{i(j-1)}}{h_1^2}\right.$$
$$+\frac{\bar{\sigma}_{11}^{(i+1)j}-2\bar{\sigma}_{11}^{ij}+\bar{\sigma}_{11}^{(i-1)j}}{h_2^2}+\frac{\bar{\sigma}_{22}^{i(j+1)}-2\bar{\sigma}_{22}^{ij}+\bar{\sigma}_{22}^{i(j-1)}}{h_1^2}$$
$$\left.+\frac{\bar{\sigma}_{22}^{(i+1)j}-2\bar{\sigma}_{22}^{ij}+\bar{\sigma}_{22}^{(i-1)j}}{h_2^2}\right)$$
$$-2\frac{\bar{\sigma}_{12}^{(i+1)(j+1)}-\bar{\sigma}_{12}^{(i+1)(j)}-\bar{\sigma}_{12}^{(i)(j+1)}+\bar{\sigma}_{12}^{(i)(j)}}{h_1h_2}=0$$

إن هذا الصيغة المتقطعة محققة من أجل كل نقطة من نقاط الشبكة الداخلية Ω_{h_1,h_2} ماعدا تلك النقاط الواقعة على حدود منطقة التعريف.الصياغة السابقة تكتب بالشكل:

$S\mathcal{M} = B$حيث

$$S=\left(S_1^{11},\dots,S_N^{11},S_1^{12},\dots,S_N^{12},S_1^{22},\dots,S_N^{22}\right)^T,$$
$$N=(M_1+1)(M_2+1)$$

$$S_I^{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{ij} \qquad , I = (i-1)\left(M_1 + 1\right) + j$$

صفريا إلا إذا أضفنا شروط باستخدام الدليل I قمنا بتحويل قيم التنسور $\sigma_{\alpha\beta}$ في كل نقطة (x_j, y_i) إلى شعاع سطري S.

إن جملة المعادلات الجبرية الممثلة للصياغة المتقطعة السابقة تملك حلا حدية غير صفرية، من أجل ذلك سنأخذ ممثلاً للشروط الحدية على النقاط الحدودية:

$$\bar{\sigma}_{11}^{ijk} = \sigma_{11}\left(x_j, y_i\right) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}, \quad \bar{\sigma}_{12}^{ijk} = \bar{\sigma}_{22}^{ijk} = 0 \qquad \left(x_j, y_i\right) \in \Gamma_4$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0 \ , \qquad \left(x_j, y_i\right) \notin \Gamma_4$$

يمكن وضع هذه الشروط الحدية في الحد الثابت $B_I = p_{\alpha\beta}\left(x_j, y_i\right)$ باستخدام الدليل I نفسه.بقي تحديد قيمة مدخلات المصفوفة $\mathcal{M}$.

سنقوم في كل معادلة متقطعة ببناء مصفوفة جزئية مربعة M^r تتعلق بالمتحول $S_{\alpha\beta}$ والمعادلة.والتي تملك قيمة واحدية $M_{II}^r = 1, r = 1,2, \dots 7$

عندما تكون I محسوبة من (x_j, y_i) حدودية، أي عندما $i = 1, M_1 + 1$ أو $j = 1, M_2 + 1$.

وأما في النقاط الداخلية فنملك ثلاث معادلات ونقوم من أجل كل i, j بإدخال قيم المصفوفة $\mathcal{M}$:**[6]**

من أجل المعادلة الاولى:

$$\frac{\overset{-}{\sigma}_{11}^{i(j+1)} - \overset{-}{\sigma}_{11}^{i(j)}}{h_1} + \frac{\overset{-}{\sigma}_{12}^{(i+1)j} - \overset{-}{\sigma}_{12}^{(i)j}}{h_2} = 0$$

$$for\ \sigma_{11} \to M^1_{(I)(I)} = -\frac{1}{h_1}\ , M^1_{(I)(I+1)} = \frac{1}{h_1},$$

$$for\ \sigma_{12} \to M^2_{(I)(I)} = -\frac{1}{h_2}, M^2_{I(I+M_1+1)} = \frac{1}{h_2}$$

١– من أجل المعادلة الثانية:

$$\frac{\overset{-}{\sigma}_{12}^{i(j+1)} - \overset{-}{\sigma}_{12}^{i(j)}}{h_1} + \frac{\overset{-}{\sigma}_{22}^{(i+1)j} - \overset{-}{\sigma}_{22}^{(i)j}}{h_2} = 0$$

$$for\ \sigma_{12} \to \quad M^3_{(I)(I)} = -\frac{1}{h_1}\ , M^3_{(I)(I+1)} = \frac{1}{h_1},$$

$$for\ \sigma_{22} \to M^4_{(I)(I)} = -\frac{1}{h_2}, M^4_{I(I+M_1+1)} = \frac{1}{h_2}$$

من أجل المعادلة الثالثة:

$$\frac{\bar{\sigma}_{11}^{(i+1)j}-2\bar{\sigma}_{11}^{ij}+\bar{\sigma}_{11}^{(i-1)j}}{h_2^2}+\frac{\bar{\sigma}_{22}^{i(j+1)}-2\bar{\sigma}_{22}^{ij}+\bar{\sigma}_{22}^{i(j-1)}}{h_1^2}$$

$$-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\left(\frac{\bar{\sigma}_{11}^{i(j+1)}-2\bar{\sigma}_{11}^{ij}+\bar{\sigma}_{11}^{i(j-1)}}{h_1^2}\right.$$

$$+\frac{\bar{\sigma}_{11}^{(i+1)j}-2\bar{\sigma}_{11}^{ij}+\bar{\sigma}_{11}^{(i-1)j}}{h_2^2}$$

$$+\frac{\bar{\sigma}_{22}^{i(j+1)}-2\bar{\sigma}_{22}^{ij}+\bar{\sigma}_{22}^{i(j-1)}}{h_1^2}$$

$$\left.+\frac{\bar{\sigma}_{22}^{(i+1)j}-2\bar{\sigma}_{22}^{ij}+\bar{\sigma}_{22}^{(i-1)j}}{h_2^2}\right)$$

$$-2\frac{\bar{\sigma}_{12}^{(i+1)(j+1)}-\bar{\sigma}_{12}^{(i+1)(j)}-\bar{\sigma}_{12}^{(i)(j+1)}+\bar{\sigma}_{12}^{(i)(j)}}{h_1h_2}$$

$$=0$$

$$for\ \sigma_{11}\rightarrow \mathrm{M}_{(I)(I)}^{5}$$

$$=-\frac{2}{h_2^2}\left(1-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right)-\frac{2}{h_1^2}\left(-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right)$$

$$\mathrm{M}_{(I)(I+M_1+1)}^{5}=\frac{1}{h_2^2}\left(1-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right)$$

$$\mathrm{M}^{5}_{(I)(I-M_1-1)}=\frac{1}{h_2^2}\left(1-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right)$$

$$\mathrm{M}^{5}_{(I)(I-1)}=\mathrm{M}^{5}_{(I)(I+1)}=-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)h_1^2}$$

$$\mathrm{M}^{6}_{(I)(I+1)}=\frac{1}{h_1^2}\left(1-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right)$$

$$\mathrm{M}^{6}_{(I)(I-1)}=\frac{1}{h_1^2}\left(1-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right)$$

$$\mathrm{M}^{6}_{(I)(I)}=\frac{-2}{h_1^2}\left(1-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right)-\frac{2}{h_2^2}\left(-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right)$$

$$\mathrm{M}^{6}_{(I)(I-M_1-1)}=\mathrm{M}^{6}_{(I)(I+M_1+1)}=-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)h_2^2}$$

$$\mathrm{M}^{7}_{(I)(I-M_1-2)}=\mathrm{M}^{7}_{(I)(I+M_1+2)}=-\frac{2}{h4_1h_2}$$

$$\mathrm{M}^{7}_{(I)(I+M_1+1-1)}=\mathrm{M}^{7}_{(I)(I-M_1-1+1)}=\frac{2}{h4_1h_2}$$

ولتحديد قيمة مدخلات المصفوفة $\mathcal{M}$:**[7]**

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M^1 & \mathbf{0}_{NN} & \mathbf{0}_{NN} \\ \mathbf{0}_{NN} & M^2 & \mathbf{0}_{NN} \\ \mathbf{0}_{NN} & M^3 & \mathbf{0}_{NN} \\ \mathbf{0}_{NN} & \mathbf{0}_{NN} & M^4 \\ M^5 & \mathbf{0}_{NN} & \mathbf{0}_{NN} \\ \mathbf{0}_{NN} & M^7 & \mathbf{0}_{NN} \\ \mathbf{0}_{NN} & \mathbf{0}_{NN} & M^6 \end{pmatrix},$$

$$S = \left(S_1^{11}, \dots, S_N^{11}, S_1^{12}, \dots, S_N^{12}, S_1^{22}, \dots, S_N^{22}\right)^T$$

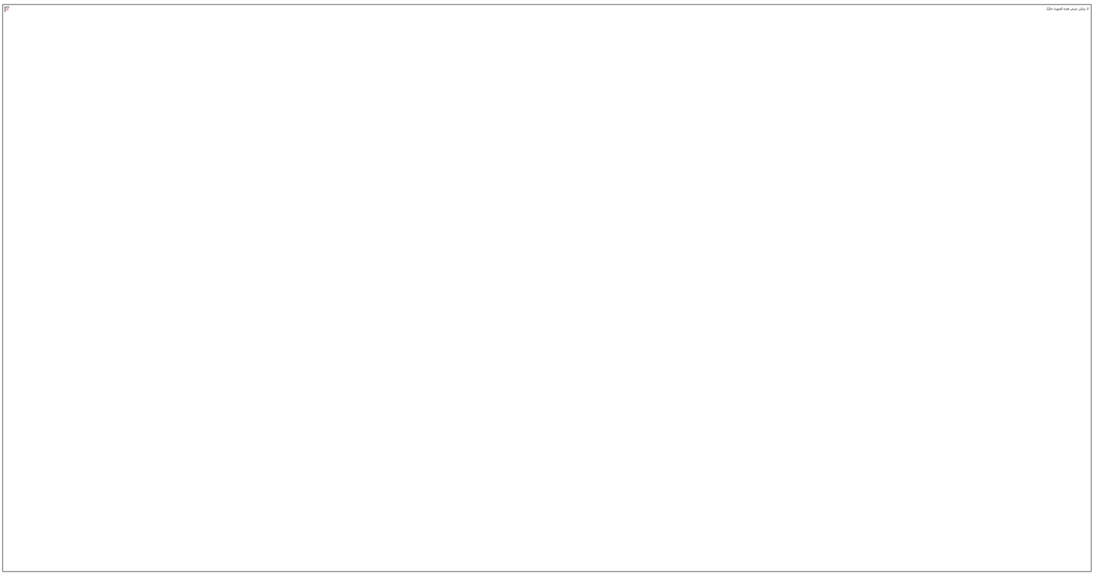
$$B = \begin{pmatrix} B^{11} \\ B^{12} \\ B^{22} \\ B^{11} \\ B^{12} \\ B^{12} \\ B^{22} \end{pmatrix}$$ جملة المعادلات فوق المحددّة

$S\mathcal{M} = B$ تحل كمسألة أمثليات عددية[8] . تم تنفيذهذه الصياغة العددية باستخدام البرامج الحاسوبية المناسبة عن طريق لغة البرمجة(ماثماتيكا).

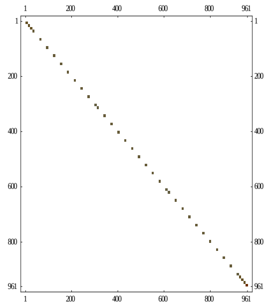
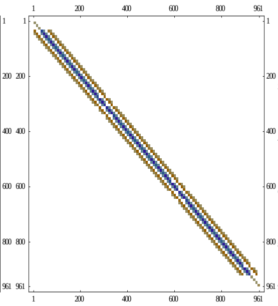
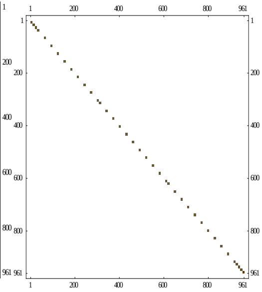
وبوضع قيم الثوابت

$$\lambda = 4\ , \mu = 3\ , a = 0\ , b = 4, c = 0, d = 4, M_1 = M_2 = 30,$$

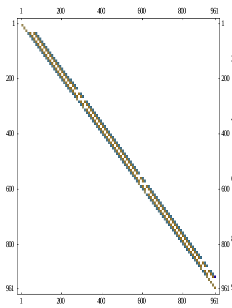
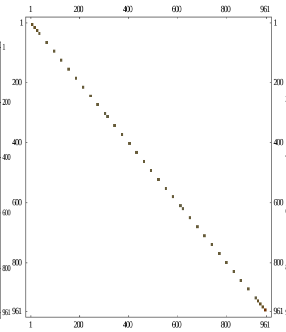
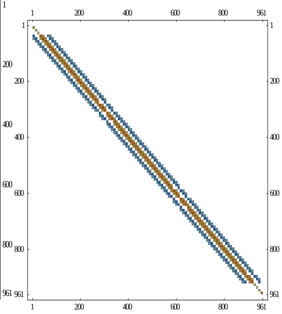
نحصل على الحل العددي الموضح بالشكل:



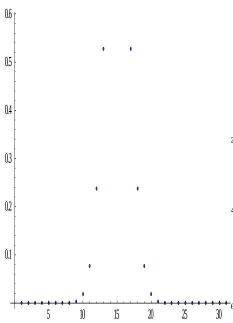
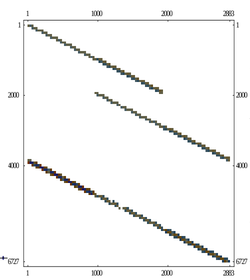
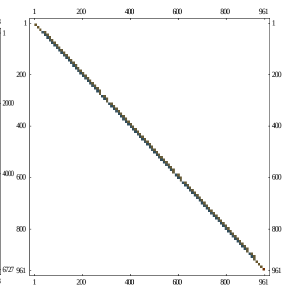
الشكل يبين تعرض صفيحة مستطيلة لحمل غوصي متمركز في منتصف الضلع السفلي اتجاه تزايد المتحول x نحو اليمين مع تزايد الدليل j الموافق لأعمدة المصفوفة اتجاه تزايد المتحول y نحو الأعلى مع تزايد الدليل i الموافق لأسطر الملحق: برنامج أعدّ لتنفيذ ماسبق بالترتيب من اليمين يوضح الخط البياني لل إيجاد باستخدام ماث ماتيكا٩ و يوضح الحمل الغوصي المتمركز في منتصف الضلع الرابع

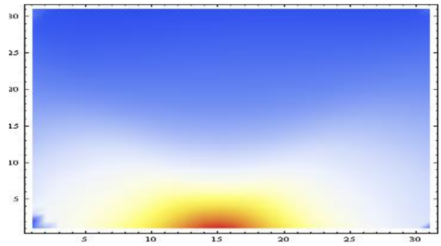
٣ ٢ ١

٦ ٥ ٤

٩ ٨ ٧



١٠

نتائج البحث

تم اختيار صفيحة مستطيلة من الآلة ثم تقطيع معادلات الصفيحة باستخدام معادلات بترامي – ميشيل بطريقة الشبكات المتداخلة .(صياغة عددية لمعادلة بيلترامي ميشيل باستخدام الفروق المنتهية) وبذلك نكون قد حولنا الحل التحليلي إلى حل عددي بخطأ مقبول وأصبحت المسألة أقل تعقيدا".

مسائل للمناقشة:

١) تهجين صياغة معادلات بترامي – ميشيل بطريقتي العناصر المنتهية والشبكات المتداخلة لصفيحة مثلثية الشكل.

٢) دراسة السلوك الستاتيكي لصفيحة مستطيلة ضمن منظومة مكونه من آلتين رباعية وعشارية مع مرونة عالية، بوساطة وصلة صلبة ومفاصل دوارنية وهنا نميز ثلاث حالات للوصل:

١-الوصلة ثابت الطرفين .

٢- الوصلة ذات مفصل واحد.

٣- الوصلة متحركة الطرفين.

المراجع العلمية

[1] د. مصطفى حسن. التحليل الدقيق لمجموعة مستوية مع مرونة، أطروحة دكتورا ، جامعة صوفيا ٢٠٠٦

[2]Dado, M.H., Variable Parametric Pseudo-Rigid-Body Model for Large Deflection Beams with End Loads, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 36 (2001), 1123-1133.

[٣] - Truesdell C., (1984) , Mechanics of Solids, Volume II, Springer - Verlag Berlin Heidelberg GmbH.

[4]- Hetnarski, R.B., and Ignaczak, J., (2011), The Mathematical Theory of Elasticity , Second Edition , CRC Press,Taylor & Francis Group,6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300,Boca Raton, FL 33487-2742.

[5]- Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Eslami, M.R., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y., (2013), Theory of Elasticity and Thermal Stresses, Springer Science+Business Media Dordrecht.

[6]−Richard S.Falk: Finite Element Methods for Linear Elasticity, 2008, Lectures Notes in Mathematics−Springer−Verlag.

[٧]− Susanne C. Brenner &Li−Yeng Sung: Linear Finite Element Methods for Planar Linear Elasticity, 1992, Mathematics of Computation, Vol.59,Nr,200, Pages 321−338.

[٨]–Bastien Durand, Franck Delvare and Patrice Baillyity: Numerical Solution of Cauchy Problems in Linear Elasticity in Axisymmetric Situations, 2011,International Journal of Solids and Structures 48(2011) 3041−3053.