مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية للجسم الدقيق $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ بلغتي $\{\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \vartheta\}$ و $\{\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \hat{q}_i\}$ بالشكل التنسوري الناطق

غيث صالح[١] د. منتجب الحسن[٢]

ملخص البحث:

وضوع البحث هو النموذج الرياضي لجسم مرن غير متماثل المناحي (Anisotropic) ومتجانس (Homogeneous)، ومعتبر البنية الجزيئية ويعاني من انفعالات قوة مرنة وانفعالات عزم مرنة، صغيرتين، في إطار المرونة الخطية، التحريكية، الدقيقة، مركزية التناظر، المترابطة مع الحرارة المعممة، حيث الفرق بين درجة الحرارة المطلقة والطبيعية صغير، وقانون التوصيل الحراري السائد هو قانون Maxwell (1867)، عوضاً من قانون Fourier في التوصيل الحراري، وهذا ما يقود إلى توصل حراري زائدي بسرعة موجية منتهية وزمن استرخاء واحد [3=1]. هذا السلوك الترموديناميكي المعمم تمت دراسته بالمعنى التقليدي من قِبل الباحثين Lord و Shulman (1967) [3]، حيث يُرمز للجسم بالرمز (L–S). أما بالمعنى الدقيق فقد تمت مناقشته في [1,2] (1992–1986) من قِبل الباحثين Kaliski و Nowacki من أجل الجسم الدقيق مركزي التناظر، والمتجانس ومتماثل المناحي. في [10]، تم استنتاج الشكل التنسوري الناطق والصامد للأسس الترموديناميكية المعممة ولعملية Lam الترموديناميكية المعممة للجسم الدقيق $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ (اختصار :-Nowacki Kaliski) المتجانس وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط B محدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3. في البحث، أولاً سنعرض بشكل مختصر ما يلزمنا من نتائج البحث [10]. بعدها سنستنتج معادلات الإجهادات والتدفق الحراري، من ثم سنوجد الشكلين التنسوريين الناطقين في النظام الاحداثي الديكارتي لمبدأ انحفاظ الطاقة الكلية للجسم الدقيق الترموديناميكي المعمم المعتبر بلغة $\{\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \vartheta\}$ وبلغة $\{\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \hat{q}_i\}$. أخيراً سننهي البحث باقتراح عدد من المسائل للمناقشة.

---

[١] طالب دكتوراه في الرياضيات التطبيقية – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

[٢] أستاذ في الرياضيات التطبيقية – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

الكلمات المفتاحية: المرونة الحرارية الدقيقة ومركزية التناظر، المعممة يرمن استرخاء واحد، مبدأ انحفاظ طاقة الجسم الدقيق المرن والترموديناميكي المعمم $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$، بالشكل التنسوري الناطق ديكارتياً بلغة $\{\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \vartheta\}$ وبلغة $\{\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \hat{q}_i\}$.

The Cartesian tensorial forms of the energy balance for the $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ microscopic generalized thermodynamical body in terms of $\{\hat{u}_i,\hat{\varphi}_i,\vartheta\}$ and $\{\hat{\sigma}_{ij},\hat{\mu}_{ij},\hat{q}_i\}$

Gaith Saleh † **Prof.Dr. Mountajab Al-Hasan** ‡

Abstract

This paper relates to the mathematical linear model of generalized thermoelastic, homogeneous and anisotropic body, with microscopic structure and small elastic force and couple strains,subjected to generalized temperature field, within the linear generalized coupled micropolar and centro-symmetric thermoelasticity, in which the difference between the absolute and natural temperatures is small and the Maxwell heat conduction law (1867) is valid instead of the classical Fourier one, that leads to hyperbolic heat conduction equation with finite wave speed and one relax time [1-3]. In the classical sense ،such a generalized thermodynamical behavior was proposed firstly by Lord and Shulman (1967) [3], for which the body shortly called $(\mathcal{L}\text{-}\mathcal{S})$. The homogeneous and isotropic case of the micropolar and centro-symmetric generalized thermoelasticity, was proposed by Kaliski and Nowacki [1986-1992] [1,2]. In [10], for the cartesian coordinate system ،and in the invariance form, authors derive the tensorial mathematical traditional and Lame models of the general case of the micropolar centro-symmetric generalized thermoelastic $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ body, which in special case was discussed by Kaliski and Nowacki [1,2].

In paper, firs, we shortly introduce the necessary results of [10]. Next, we derive the stress-heat flux tensorial equations for the considerable microscopic $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ body in the cartesian coordinate

† PhD. Student at Department of Mathematics-Faculty of Science-Al-Baath University.
‡ Professor in Applied Mathematics at Department of Mathematics-Faculty of Science-Al-Baath University.

Key Word: The Generalized Micropolar and Centrosymmetric Thermoelasticity with one Relaxion Time, The Energy Balance Lows for the Generalized $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ Micropolar Body in the Cartesian Tensorial Forms in Terms of $\{\hat{u}_i,\hat{\varphi}_i,\vartheta\}$ and $\{\hat{\sigma}_{ij},\hat{\mu}_{ij},\hat{q}_i\}$.

system. Then, for the considerable microscopic $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ body, we derive the Cartesian tensorial forms of the energy balance low in terms of $\{\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \vartheta\}$ and $\{\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \hat{q}_i\}$.Finally, we end the paper by proposing some problems for discussing.

1. مقدمة:

تعنبر النظرية التقليدية (الخطية) للمرونة الحرارية (Carlson,1972) نقطة الانطلاق لنظريات أخرى معممة، تشمل: المرونة اللزجة الحرارية، والمرونة الحرارية مع انتشار، والمرونة الكهرطيسية الحرارية، والمرونة الحرارية بسرعات موجية منتهية. ظهرت نظرية المرونة المعممة بزمن استرخاء واحد بنتيجة إجراء تعديل على معادلة التوصيل الحراري، الكلاسيكية، حيث اقترح Maxwell (1867) هذا التعديل في إطار نظرية الغازات، من ثم Cattaneo (1948) في إطار التوصيل الحراري في الجسم القاسي، من ثم العديد من الباحثين، أبرزهم Lord و Shulman (1967) [3] في إطار الجسم القابل للتشوه.

في [3] تمت مناقشة الأسس والنموذج الرياضي للجسم الترموديناميكي المعمم $(\mathcal{L}\text{-}S)$ بزمن استرخاء واجد، ذلك في النظام الاحداثي الديكارتي. في [1,2] (1992–1986)، تمت مناقشة الأسس وبعض معادلات النموذج الرياضي الترودينا ميكي المعمم ودقيق الاستقطاب ومركزي التناظر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$، ذلك في الحالة الخاصة التي يكون فيها الجسم متجانس ومتماثل المناحي. في [10] ، تم استنتاج الشكلين التنسوريين الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي والصامد للأسس الترموديناميكية المعممة ولعملية Lam الترموديناميكية المعممة للجسم الدقيق $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ المتجانس وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط B محدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3.

2. هدف وأهمية البحث:

أولاً: يهدف البحث إلى إيجاد الشكلين التنسوريين الناطقين في النظام الاحداثي الديكارتي لمبدأ انحفاظ الطاقة للجسم الدقيق الترموديناميكي المعمم المعتبر بلغة $\{\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \vartheta\}$ وبلغة $\{\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \hat{q}_i\}$.

ثانياً: أما أهمية البحث فتكمن بالآتي. إن مبدأي انحفاظ الطاقة للجسم الدقيق الترموديناميكي المعمم المعتبر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ بزمن استرخاء واحد، بشكلهما التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي يمكن أن يسمحا بكتابة الحل التحليلي لمسألة الجسم المعتبر على شكل صيغة Green.

3. طرق لبحث:

سنعتمد تعميم الطريقة المستخدمة في [3] ، في إيجاد الشكلين التنسوريين الناطقين في النظام الاحداثي الديكارتي بلغة $\{\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \hat{q}_i\}$ وبلغة $\{\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \vartheta\}$، لمبدأي انحفاظ الطاقة للجسم الترموديناميكي المعمم الدقيق المعتبر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ بزمن استرخاء واحد، حيث الجسم متجانس، وغير متماثل المناحي، ويشغل في لحظة البدء، منطقة B بسيطة الترابط ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3. لهذا الغرض نعرض فيمايلي نتائج البحث [10] ، المتمثلة بالشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي للأسس الترموديناميكية المعممة ولعملية Lam الترموديناميكية المعممة للجسم الدقيق $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ المتجانس وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط B محدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3.

الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي للأسس الترموديناميكية المعممة ولعملية Lam الترموديناميكية المعممة للجسم الدقيق $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ المتجانس وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط B محدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3:

توطئة: نفترض أن جميع الأدلة اللاتينية $i, j, k, \ldots$ تأخذ القيم $1, 2, 3$ ، وسنعتمد رموز Einstein في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3، ولتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة، ومباشرة، وعطالية، وقاعدتها هي $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. إن العملية الترموديناميكية المعممة الدقيقة المرنة، ومركزية التناظر للجسم $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$، توصف من خلال مجموعة المقاطع التنسورية $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \vartheta, \eta, \mathbf{q}\}$، حيث $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}$ مقطعان متجهيان، مستقلان يمثلان فيزيائياً، على الترتيب، حقل الإزاحات، وحقل التوجهات، أيضاً: $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}$ مقطعان تنسوريان من المرتبة الثانية، وغير متناظران، وهماعلى الترتيب،

حقل الانفعالات وحقل الانفعالات الدقيقة، و $\boldsymbol{\mu}\,,\boldsymbol{\sigma}$ مقطعان تنسوريان من المرتبة الثانية، وغير متناظران، وهماعلى الترتيب، حقل الاجهادات وحقل الاجهادات الدقيقة، كما أن: $\vartheta=\theta-\theta_0$، حيث θ مقطع الحرارة المطلقة في الجسم وهو مقطع سلمي، و θ_0 درجة حرارة الحالة الطبيعية للجسم[٣]، (مقدار قابت موجب)، أخيراً $\eta\,,\mathbf{q}$ ، على الترتيب هما مقطع الأنتروبية في الجسم وهو مقطع سلمي، ومقطع التدفق الحراري وهو مقطع متجهي. فإذا رمزنا بـ $A:=[\,0\,,\infty\,[$ و بـ $A^{+}:=]\,0\,,\infty\,[$ ، فيمكن أن تمثل الحقول السابقة في $A\times B$، في النظام الإحداثي الديكارتي $\mathbf{e}_i$، بالشكل التالي:

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}=\hat{u}_i\,\mathbf{e}_i\ ,\ \boldsymbol{\varphi}=\hat{\varphi}_i\,\mathbf{e}_i\ ,\ \mathbf{q}=\hat{q}_i\,\mathbf{e}_i\ ,\\&\boldsymbol{\gamma}=\hat{\gamma}_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ ,\ \boldsymbol{\kappa}=\hat{\kappa}_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ ,\\&\boldsymbol{\sigma}=\hat{\sigma}_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ ,\ \boldsymbol{\mu}=\hat{\mu}_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\ ,\end{aligned}\qquad(3.1)$$

حيث المصفوفات: $\hat{u}_i\,,\hat{\varphi}_i\,,\hat{q}_i$ في الطرف الأيمن للعلاقة الأولى والثانية في (3.1) ،على الترتيب تمثل مصفوفتي المركبات في القاعدة الديكارتية $\mathbf{e}_i$ ، لكل من مقطع الإزاحات $\mathbf{u}$ ومقطع التوجهات $\boldsymbol{\varphi}$ ومقطع التدفق الحراري $\mathbf{q}$ ، المصفوفاتان $\hat{\gamma}_{ij}\,,\hat{\kappa}_{ij}$ الموجودتان في الطرف الأيمن للعلاقتين الرابعة والخامسة في (3.1) غير متناظرتان، وتمثلان، على الترتيب، مصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\boldsymbol{\gamma}$ ، ومصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\boldsymbol{\kappa}$ ، أخيراً المصفوفتان $\hat{\sigma}_{ij}\,,\hat{\mu}_{ij}$ الظاهرتان في الطرف الأيمن للعلاقتين السادسة والسابعة في (3.1) غير متناظرتان، وتمثلان، على الترتيب، مصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\boldsymbol{\sigma}$ ومصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\boldsymbol{\mu}$. إن مجموعة المقاطع التنسورية السابقة مجهولة، ويقابها المقاطع التنسورية، المعلومة التالية في $A\times B$ ؛ وهي: مقطعا القوة الحجمية والعزم الحجمي، المتجهيين:

$$\mathbf{X}=\hat{X}_i\,\mathbf{e}_i\ ,\ \mathbf{Y}=\hat{Y}_i\,\mathbf{e}_i\qquad(3.2)$$

ومقطع كمية الحرارة في الجسم والمتشكلة في وحدة الحجم ووحدة الزمن: r وهو مقطع سلمي.

---

[٣] الحالة الطبيعية للجسم الترموديناميكي المعمم الدقيق ($\mathcal{K}$-$\mathcal{N}$)، هي الحالة التي ينعدم فيها كلاً من مقطع الأنتروبية η والمقاطع التنسورية: $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\kappa}$ و $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu}$ والمقطع المتجهي $\mathbf{q}$.

تعريف1.(السلوك الترموديناميكي المعمم بزمن استرخاء واحد $t_0 > 0$ للجسم الدقيق-$\mathcal{K}$) $(\mathcal{N})$:

ندعو مجموعة المقاطع التنسورية المجهولة $\{\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \vartheta, \eta, \hat{q}_i\}$، والتي تحقق في $A \times B$، العلاقات:

$$\hat{\gamma}_{ji} = \hat{u}_{i,j} - \epsilon_{kji}\,\hat{\varphi}_k \quad , \quad \hat{\kappa}_{ji} = \hat{\varphi}_{i,j} \quad , \tag{3.3}$$

$$\hat{\sigma}_{ji,j} + \hat{X}_i = \rho\ddot{\hat{u}}_i \quad , \quad \epsilon_{ijk}\,\hat{\sigma}_{jk} + \hat{\mu}_{ji,j} + \hat{Y}_i = J\ddot{\hat{\varphi}}_i \quad , \tag{3.4}$$

$$\theta\dot{\eta} = -\hat{q}_{i,i} + r - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\hat{q}_i}\right)_{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}}\dot{\hat{q}}_i \quad , \tag{3.5}$$

$$\hat{\sigma}_{ji} = \hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell}\,\hat{\gamma}_{k\ell} - \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji}\,\vartheta \ , \ \hat{\mu}_{ji} = \hat{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}_{jik\ell}\,\hat{\kappa}_{k\ell} \ , \tag{3.6}$$

$$\eta = \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji}\,\hat{\gamma}_{ji} + \frac{c_{\boldsymbol{\gamma}}}{\theta_0}\vartheta \quad , \tag{3.7}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\hat{q}_i}\right)_{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}}\dot{\hat{q}}_i + \frac{\hat{q}_i\theta_{,i}}{\theta} \le 0 \quad , \tag{3.8}$$

$$\hat{d}^{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}}_{ji} = \frac{t_0}{\theta_0}\,\hat{\lambda}_{ji} \, , \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\psi(\hat{\gamma}_{ji}, \hat{\kappa}_{ji}, \theta, \hat{q}_i) = {} & \frac{1}{2}\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell}\,\hat{\gamma}_{ji}\,\hat{\gamma}_{k\ell} + \frac{1}{2}\hat{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}_{jik\ell}\,\hat{\kappa}_{ji}\,\hat{\kappa}_{k\ell} \\ & - \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji}\,\hat{\gamma}_{ji}\vartheta + \frac{t_0}{2\theta_0}\,\hat{\lambda}_{ji}\hat{q}_j\,\hat{q}_i - \frac{c_{\boldsymbol{\gamma}}}{2\,\theta_0}\,\vartheta^2 \, ,\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$L\hat{q}_i = -\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j} \quad , \tag{3.11}$$

ندعوها بالسلوك الترموديناميكي المعمم بزمن استرخاء واحد للجسم الدقيق $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$، والمتوافقة الحمل الترموديناميكي الحجمي المعمم (المعطى) $\{\hat{X}_i, \hat{Y}_i, r\}$.

في العلاقات (3.11)–(3.3)، الرمز L هو مؤثر اشتقاقي معطى بالعلاقة:

$$L := 1 + t_0\,\partial/\partial t \ ; \ t_0 > 0 \tag{3.13}$$

وهنا الثابت الموجب t_0 يدعى بزمن الاسترخاء، وفي العلاقات (3.13)–(3.3)، رمز الفاصلة الدليلية يدل على المشتق الجزئي بالنسبة لمتحولات الموضع؛

$f_{,i} \equiv \partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial X_i}$ ، رمز النقطة يدل على المشتق الجزئي الزمني؛ $\dot{f} \equiv \partial_t f = \dfrac{\partial f}{\partial t}$ ، الرمزان J , ρ ، على الترتيب يدلان على مقطع الكثافة الحجمية للجسم ومقطع العطالة الدورانية للجسم المعتبر، وهما مقداران ثابتان نظراً لأن الجسم متجانس ، $\in_{ijk}$ هو تنسور Levi–Chivit النسبي من المرتبة الثالثة، بالوزن $w=\dfrac{1}{2}$ [6,7]، كما أن المعاملات:

$$\begin{aligned}
\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell} &= \frac{\partial^2\psi}{\partial\hat{\gamma}_{ji}\partial\hat{\gamma}_{k\ell}}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0}) \ , \ \hat{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}_{jik\ell} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\hat{\kappa}_{ji}\partial\hat{\kappa}_{k\ell}}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0}) \ , \\
\hat{d}^{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}}_{ji} &= \frac{\partial^2\psi}{\partial\hat{q}_j\partial\hat{q}_i}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0}) \ , \ \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial\hat{\gamma}_{ji}\partial\theta}(\mathbf{0},\mathbf{0},\theta_0,\mathbf{0}) \ ,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

حيث المعاملات $\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell}$ محسوبة في ظروف إيزوتيرمية[٤]، ثابتة الانفعال الدقيق $\boldsymbol{\kappa}$ ، وثابتة التدفق الحراري $\mathbf{q}$ ، المعاملات $\hat{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}_{jik\ell}$ محسوبة في ظروف إيزوتيرمية، ثابتة الانفعال $\boldsymbol{\gamma}$ ، وثابتة التدفق الحراري $\mathbf{q}$ ، كذلك المعاملات $\hat{d}^{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}}_{ji}$ محسونة في ظروف إيزوتيرمية، ثابتة الانفعال $\boldsymbol{\gamma}$ وثابتة الانفعال الدقيق $\boldsymbol{\kappa}$ ، المعاملات $\hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji}$ محسوبة في ظروف ثابتة التدفق $\mathbf{q}$ وثابتة الانفعال الدقيق $\boldsymbol{\kappa}$ ، وعلى مرحلتين؛ الأولى ثابتة الانفعال $\boldsymbol{\gamma}$ والثانية إيزوتيرمية، وهنا تمثل المعاملات $\hat{d}^{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}}_{ji}$, $\hat{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}_{jik\ell}$, $\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell}$ ،على الترتيب، المركبات الديكارتية لمقطع تنسوري من المرتبة الرابعة، والتي أيضاً تليها المركبات الديكارتية لمقطع تنسوري من المرتبة الرابعة، أما الأخيرة فهي المركبات الديكارتية لمقطع تنسوري من المرتبة الثانية، وتحقق هذه المركبات الخواص التناظرية التالية:

$$\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell} = \hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{k\ell ji} \quad , \quad \hat{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}_{jik\ell} = \hat{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}_{k\ell ji} \quad , \quad \hat{d}^{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}}_{ji} = \hat{d}^{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}}_{ij} , \tag{3.15}$$

الكميات $\hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji}$ تمثل مصفوفة المركبات الديكارتية لمقطع تنسوري من المرتبة الثانية، غير متناظر. في العلاقتين (3.8)–(3.5)، الرمز $\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\hat{q}_i}\right)_{\boldsymbol{\gamma\kappa\theta}}$، أن المقدار $\dfrac{\partial\psi}{\partial\hat{q}_i}$ محسوب في ظروف إيزوتيرمية، ثابتة الانفعال $\boldsymbol{\gamma}$ وثابتة الانفعال الدقيق $\boldsymbol{\kappa}$. في (3.9)، الرموز $\hat{\lambda}_{ji}$ تمثل

[٤] العملية الإيزوتيرمية (Isothermal Process) هي العملية التي تكون فيها: $\vartheta = 0$.

مصفوفة المركبات الديكارتية لمقطع تنسوري من الدرجة الثانية، متناظر؛ وهو يدعى مقطع المقاومة الحرارية بزمن استرخاء واحد t_0 للجسم المرن الدقيق ومركزي التناظر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$، وهي تحقق أيضاً العلاقة:

$$\hat{\lambda}_{ji} = (\hat{k}_{ji})^{-1}, \quad \hat{\lambda}_{ij}\, \hat{q}_i \hat{q}_j > 0\ , \tag{3.16}$$

حيث الرموز $\hat{k}_{ij}$ الظاهرة في (3.11) و(3.16) تدل عل المركبات الديكارتية لمقطع التوصيل الحراري **k**، وهي تحقق:

$$\hat{k}_{ij} = \hat{k}_{ji}\ , \quad \hat{k}_{ij}\ \vartheta_{,i}\ \vartheta_{,j} > 0, \tag{3.17}$$

أخيراً، في العلاقتين: (3.7) و (3.10)، الرمز $c_{\boldsymbol{\gamma}}$ هو مقدار ثابت موجب، يمثل الحرارة النوعية للجسم المرن الدقيق ومركزي التناظر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$، خلال تشوه ثابت **γ**.

ملاحظة 1. [10]: واضح أن النظام (3.17)–(3.3) الذي يصف السلوك الترموديناميكي المعمم للجسم الدقيق $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$، المتوافق في $A \times B$ مع الحمول الترموديناميكية المعلومة $\{\hat{X}_i, \hat{Y}_i\ ,\ r\}$، هو نظام معقد، فعادةً ما نقوم باختصار هذا النظام إلى نظام يحتوي أقل عدد ممكن من المقاطع التنسورية المجهولة. فعلى سبيل المثال، بحذف مقطع الأنتروبية η من هذا النظام، نجد أن السلوك الترموديناميكي المعمم يوصف من خلال مجموعة المقاطع التنسورية $\{\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \vartheta, \hat{q}_i\}$، والمحكومة بدورها في $A \times B$ بواسطة نظام المعادلات:

$$\hat{\gamma}_{ji} = \hat{u}_{i,j} - \in_{kji}\ \hat{\varphi}_k\ , \quad \hat{\kappa}_{ji} = \hat{\varphi}_{i,j}\ , \tag{3.18}$$

$$\hat{\sigma}_{ji,j} + \hat{X}_i = \rho \ddot{\hat{u}}_i\ , \quad \in_{ijk} \hat{\sigma}_{jk} + \hat{\mu}_{ji,j} + \hat{Y}_i = J \ddot{\hat{\varphi}}_i\ , \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} \psi(\hat{\gamma}_{ji}, \hat{\kappa}_{ji}, \theta, \hat{q}_i) = {} & \frac{1}{2} \hat{a}^{\boldsymbol{\kappa}\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\ \hat{\gamma}_{ji}\, \hat{\gamma}_{k\ell} + \frac{1}{2} \hat{c}^{\boldsymbol{\gamma}\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\ \hat{\kappa}_{ji}\, \hat{\kappa}_{k\ell} \\ & - \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}_{ji}\ \hat{\gamma}_{ji}\, \vartheta + \frac{1}{2} \hat{d}^{\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\kappa}\theta}_{ji}\, \hat{q}_j\, \hat{q}_i - \frac{c_{\boldsymbol{\gamma}}}{2\,\theta_0}\, \vartheta^2\ , \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$-\hat{q}_{i,i} + r - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \hat{q}_i}\right)_{\boldsymbol{\gamma}\,\boldsymbol{\kappa}\theta} \dot{\hat{q}}_i = \theta_0\, \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}_{ji}\ \dot{\hat{\gamma}}_{ji} + c_{\boldsymbol{\gamma}} \dot{\vartheta}\ , \tag{3.21}$$

$$\hat{\sigma}_{ji} = \hat{a}^{\boldsymbol{\kappa}\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\ \hat{\gamma}_{k\ell} - \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}_{ji}\ \vartheta\ , \quad \hat{\mu}_{ji} = \hat{c}^{\boldsymbol{\gamma}\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\ \hat{\kappa}_{k\ell}\ , \tag{3.22}$$

$$L\,\hat{q}_i = -\hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,j}\ , \qquad (3.23)$$

ملاحظة2. [10]: أيضاً النظام (٣٢٣,)-(3.18) الذي يصف السلوك الترموديناميكي المعمم للجسم الدقيق $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$، المتوافق في $A \times B$ مع الحمول الترموديناميكية المعلومة $\{\hat{X}_i, \hat{Y}_i\ ,\ r\}$، هو نظام معقد، ويمكن تبسيطه بالشكل التالي. باهمال الحد الثالث في الطرف الأيسر للمعادلة (3.21) (وهذا ممكن بسبب صغره)، عندئذ لايوجد داعي للعلاقة (3.20)، وعندئذ يوصف السلوك السلوك الترموديناميكي المعمم للجسم المرن الدقيق $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ من خلال مجموعة المقاطع التسورية $\{\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \vartheta, \hat{q}_i\}$، والمحكومة بدورها في $A \times B$ بواسطة نظام المعادلات:

$$\hat{\gamma}_{ji} = \hat{u}_{i,j} - \epsilon_{kji}\,\hat{\varphi}_k\ \ ,\ \ \hat{\kappa}_{ji} = \hat{\varphi}_{i,j}\ , \qquad (3.24)$$

$$\hat{\sigma}_{ji,j} + \hat{X}_i = \rho\,\ddot{\hat{u}}_i\ \ ,\ \ \epsilon_{ijk}\,\hat{\sigma}_{jk} + \hat{\mu}_{ji,j} + \hat{Y}_i = J\,\ddot{\hat{\varphi}}_i\ , \qquad (3.25)$$

$$-\hat{q}_{i,i} + r = \theta_0\,\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,\dot{\hat{\gamma}}_{ji} + c_{\boldsymbol{\gamma}}\dot{\vartheta}\ , \qquad (3.26)$$

$$\hat{\sigma}_{ji} = \hat{a}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}\,\hat{\gamma}_{k\ell} - \hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,\vartheta\ ,\ \ \hat{\mu}_{ji} = \hat{c}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}\,\hat{\kappa}_{k\ell}\ , \qquad (3.27)$$

$$L\,\hat{q}_i = -\hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,j}\ , \qquad (3.28)$$

معادلة التوصيل الحراري الزائدية، المعممة بزمن استرخاء واحد للجسم الدقيق المدروس $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ [10]: نحصل عليها من العلاقتين (3.26) و(3.28) (بعد تطبيق المؤثر L على طرفي (3.26))، حيث نحصل على المعادلة التالية المحققة في $A \times B$:

$$c_{\boldsymbol{\gamma}}\,L\,\dot{\vartheta} + \theta_0\,\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,L\,\dot{\hat{\gamma}}_{ji} = (\hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,j})_{,i} + L\,r$$

أو:

$$(\hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,j})_{,i} - c_{\boldsymbol{\gamma}}\,L\,\dot{\vartheta} - \theta_0\,\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,L\,\dot{\hat{\gamma}}_{ji} = -\,L\,r \qquad (3.29)$$

أو:

$$(\hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,j})_{,i} - c_{\boldsymbol{\gamma}}\,(\dot{\vartheta} + t_0\,\ddot{\vartheta}) - \theta_0\,\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,L\,\dot{\hat{\gamma}}_{ji} = -\,L\,r \qquad (3.30)$$

تمثل (3.29) أو (3.30) معادلة التوصيل الحراري الزائدية المعممة بزمن استرخاء واحد للجسم الدقيق المعتبر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$.

نموذج Lame الرياضي المعمم بزمن استرخاء واحد للجسم الدقيق المدروس (K-N) [10]: نحصل على هذا النموذج الرياضي من خلال حذف مجموعة الحقول $\{\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \hat{q}_i\}$ من العلاقات (3.28)−(3.24)، حيث نحصل على المعادلات التالية المحققة في $B \times A^+$:

$$\begin{aligned}
&[\,\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell}\,(\hat{u}_{\ell,k} - \epsilon_{nk\ell}\,\hat{\varphi}_n) - \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji}\,\vartheta\,]_{,j} - \rho\,\ddot{\hat{u}}_i = -\hat{X}_i\ ,\\
&\epsilon_{ijk}\,[\,\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jkm\ell}\,(\hat{u}_{\ell,m} - \epsilon_{nm\ell}\,\hat{\varphi}_n) - \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{jk}\,\vartheta\,] + \\
&+\,(\hat{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}_{jik\ell}\ \hat{\varphi}_{\ell,k})_{,j} - J\,\ddot{\hat{\varphi}}_i = -\hat{Y}_i\ ,\\
&(\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j})_{,i} - c_{\boldsymbol{\gamma}}\,L\,\dot{\vartheta} - \theta_0\,\hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji}\,L\,(\dot{\hat{u}}_{i,j} - \epsilon_{kji}\,\dot{\hat{\varphi}}_k) = -L\,r\ ,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

يُضاف إلى ذلك الشروط الحدية والابتدائية التالية.

الشروط الابتدائية في B :

$$\hat{u}_i(.,0) = \hat{u}_{i0}\ ,\ \ \dot{\hat{u}}_i(.,0) = \dot{\hat{u}}_{i0} \quad \text{in } B\ , \tag{3.34}$$

$$\hat{\varphi}_i(.,0) = \hat{\varphi}_{i0}\ ,\ \ \dot{\hat{\varphi}}_i(.,0) = \dot{\hat{\varphi}}_{i0} \quad \text{in } B\ , \tag{3.35}$$

$$\vartheta(.,0) = \vartheta_0\ ,\ \ \dot{\vartheta}(.,0) = \dot{\vartheta}_0 \quad \text{in } B\ , \tag{3.36}$$

حيث المقاطع التنسورية الناطقة: $\{\hat{u}_{i0}, \dot{\hat{u}}_{i0}, \hat{\varphi}_{i0}, \dot{\hat{\varphi}}_{i0}, \vartheta_0, \dot{\vartheta}_0\}$ مفروضة في B،

الشروط الحدية على $\partial B \times A$:

$$\hat{u}_i = \hat{u}'_i\ ,\ \ \hat{\varphi}_i = \hat{\varphi}'_i \quad \text{on } \partial B_1 \times A\ , \tag{3.37}$$

$$\left.\begin{aligned}
&[\,\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell}\,(\hat{u}_{\ell,k} - \epsilon_{nk\ell}\,\hat{\varphi}_n) - \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji}\,\vartheta\,]\,\hat{n}_j = \hat{p}'_i\ ,\\
&\hat{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}_{jik\ell}\ \hat{\varphi}_{\ell,k}\,\hat{n}_j = \hat{m}'_i\ ,
\end{aligned}\right\} \text{on } \partial B_2 \times A\ , \tag{3.38}$$

$$\vartheta = \vartheta' \quad \text{on } \partial B_3 \times A\ , \tag{3.39}$$

$$-\hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,j}\,\hat{n}_i = q' \quad \text{on } \partial B_4 \times A\ , \tag{3.40}$$

حيث:

$$\partial B = \partial B_1 \cup \partial B_2 = \partial B_3 \cup \partial B_4\ , \tag{3.41}$$

$$\partial B_1 \cap \partial B_2 = \partial B_3 \cap \partial B_4 = \Phi\ , \tag{3.42}$$

والمقاطع التنسورية الناطقة $\{\hat{u}_i', \hat{\varphi}_i', \hat{p}_i', \hat{m}_i', \vartheta', q'\}$ مفروضة، و $\hat{n}_i$ المركبات الديكارتية لمقطع الواحدة المتجهي **n** على السطح ∂B، والموجه نحو خارج ∂B.

تعريف: ندعو المقاطع التنسورية الناطقة: $\{\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \vartheta\}$ (النتائج)، المحققة للمعادلات الترموديناميكية المعممة (3.31)، وللشروط الابتدائية (3.36)−(3.34) والشروط الحدية (3.42)−(3.37)، ندعوها بسلوك Lame الترموديناميكي المعمم في $B\times A$ للجسم الدقيق مركزي التناظر (k−N)، والمتوافق مع الحمول الترموديناميكية المفروضة (المسببات):

$$\{\hat{X}_i, \hat{Y}_i, r, \hat{u}_{i0}, \dot{\hat{u}}_{i0}, \hat{\varphi}_{i0}, \dot{\hat{\varphi}}_{i0}, \vartheta_0, \dot{\vartheta}_0, \hat{u}_i', \hat{\varphi}_i', \hat{p}_i', \hat{m}_i', \vartheta', q'\} \quad (3.43)$$

4. النتائج والمناقشة:

ملاحظة١. في التعريف ١.، باهمال الحد الثالث في الطرف الأيمن للمعادلة (3.5) (وهذا ممكن بسبب صغره)، ومن باستخدام العلاقة $\theta \cong \theta_0$ في الطرف الأيسر لنفس العلاقة، عندئذ يبقى التعريف صحيح في حالة عدم ذكر (٣١٠,)−(3.8)، وعندها يوصف السلوك الترموديناميكي المعمم للجسم المرن الدقيق $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ من خلال مجموعة المقاطع التنسورية المجهولة $\{\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \vartheta, \eta, \hat{q}_i\}$، والمحكومة بدورها في $B \times A$ بواسطة نظام المعادلات:

$$\hat{\gamma}_{ji} = \hat{u}_{i,j} - \epsilon_{kji}\,\hat{\varphi}_k \quad , \quad \hat{\kappa}_{ji} = \hat{\varphi}_{i,j} \quad , \qquad (4.1)$$

$$\hat{\sigma}_{ji,j} + \hat{X}_i = \rho\,\ddot{\hat{u}}_i \quad , \quad \epsilon_{ijk}\,\hat{\sigma}_{jk} + \hat{\mu}_{ji,j} + \hat{Y}_i = J\,\ddot{\hat{\varphi}}_i \quad , \qquad (4.2)$$

$$\theta_0\,\dot{\eta} = -\,\hat{q}_{i,i} + r \quad , \qquad (4.3)$$

$$\hat{\sigma}_{ji} = \hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell}\,\hat{\gamma}_{k\ell} - \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji}\,\vartheta \;,\; \hat{\mu}_{ji} = \hat{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}_{jik\ell}\,\hat{\kappa}_{k\ell} \;, \qquad (4.4)$$

$$\eta = \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji}\,\hat{\gamma}_{ji} + \frac{c_{\boldsymbol{\gamma}}}{\theta_0}\vartheta \quad , \qquad (4.5)$$

$$L\,\hat{q}_i = -\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j} \quad , \qquad (4.6)$$

إذا فرضنا، الآن أن كلٍ من $\hat{c}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}_{jik\ell}$ و $\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell}$ من قابل للقلب، وأن:

$$\begin{aligned} &\hat{A}_{jik\ell} = (\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell})^{-1} \quad , \quad \hat{C}_{jik\ell} = (\hat{c}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}_{jik\ell})^{-1} \,, \\ &\hat{\alpha}_{ji} = \hat{A}_{jik\ell}\,\hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{k\ell} \quad , \quad c_{\boldsymbol{\sigma}} = c_{\boldsymbol{\gamma}} + \theta_0\,\hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}_{ji}\,\hat{\alpha}_{ji} \end{aligned} \qquad (4.7)$$

فينتج عن ذلك وعن العلاقة الأولى في (3.16)، أن (4.6)−(4.1) تأخذ الشكل المكافئ التالي في $B \times A$:

$$\hat{\gamma}_{ji} = \hat{u}_{i,j} - \epsilon_{kji}\, \hat{\varphi}_k \quad , \quad \hat{\kappa}_{ji} = \hat{\varphi}_{i,j} \ , \tag{4٨,}$$

$$\hat{\sigma}_{ji,j} + \hat{X}_i = \rho \ddot{\hat{u}}_i \quad , \quad \epsilon_{ijk}\, \hat{\sigma}_{jk} + \hat{\mu}_{ji,j} + \hat{Y}_i = J \ddot{\hat{\varphi}}_i \ , \tag{4.9}$$

$$\theta_0\, \dot{\eta} = -\hat{q}_{i,i} + r \ , \tag{4.10}$$

$$\hat{\gamma}_{ji} = \hat{A}_{jik\ell}\, \hat{\sigma}_{k\ell} + \hat{\alpha}_{ji}\, \vartheta \ , \ \hat{\kappa}_{ji} = \hat{C}_{jik\ell}\, \hat{\mu}_{k\ell} \ , \tag{4.11}$$

$$\eta = \hat{\alpha}_{ji}\, \hat{\sigma}_{ji} + \frac{c_{\boldsymbol{\sigma}}}{\theta_0} \vartheta \ , \tag{4.12}$$

$$\vartheta_{,i} = -\hat{\lambda}_{ij}\, L\, \hat{q}_j \ , \tag{4.13}$$

في (4.7) تمثل $\hat{A}_{jik\ell}$ جدول المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري من المرتبة الرابعة **A** الذي يسمى بمقطع المطاوعة للجسم المعتبر، $\hat{C}_{jik\ell}$ تمثل جدول المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري من المرتبة الرابعة **B** والذي يسمى بمقطع المطاوعة الدقيقة للجسم المعتبر، $\hat{\alpha}_{ji}$ تمثل مصفوفة المركبات الديكارتية لمقطع تنسوري من المرتبة الثانية غير متناظر في الحالة العامة، يدعى بمقطع التمدد الحراري للجسم المعتبر.الرمز $c_{\boldsymbol{\sigma}}$ يدعى بالحرارة النوعية للجسم المرن الدقيق ومركزي التناظر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$، خلال مقطع إجهاد ثابت $\boldsymbol{\sigma}$.

أما المعادلات (3.28)−(3.24)، فتأخذ الشكل المكافئ التالي في $B \times A$:

$$\hat{\gamma}_{ji} = \hat{u}_{i,j} - \epsilon_{kji}\, \hat{\varphi}_k \quad , \quad \hat{\kappa}_{ji} = \hat{\varphi}_{i,j} \ , \tag{4.14}$$

$$\hat{\sigma}_{ji,j} + \hat{X}_i = \rho \ddot{\hat{u}}_i \quad , \quad \epsilon_{ijk}\, \hat{\sigma}_{jk} + \hat{\mu}_{ji,j} + \hat{Y}_i = J \ddot{\hat{\varphi}}_i \ , \tag{4.15}$$

$$-\hat{q}_{i,i} + r = \theta_0\, \hat{\alpha}_{ji}\, \dot{\hat{\sigma}}_{ji} + c_{\boldsymbol{\sigma}}\, \dot{\vartheta} \ , \tag{4.16}$$

$$\hat{\gamma}_{ji} = \hat{A}_{jik\ell}\, \hat{\sigma}_{k\ell} + \hat{\alpha}_{ji}\, \vartheta \ , \ \hat{\kappa}_{ji} = \hat{C}_{jik\ell}\, \hat{\mu}_{k\ell} \ , \tag{4.17}$$

$$\vartheta_{,i} = -\hat{\lambda}_{ij}\, L\, \hat{q}_j \ , \tag{4.18}$$

من أجل استنتاج الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي، لمبدأ انحفاظ طاقة الجسم المعتبر، يلزمنا فيمايلي استنتاج الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي، لمعادلات الاجهادات والتدفق الحراري لهذا الجسم المدروس.

1.4 معادلات الاجهادات والتدفق الحراري للجسم المعتبر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$، بالشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي:

للحصول على هذه المعادلات نحذف المقاطع التنسورية $\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \hat{\gamma}_{ij}, \hat{\kappa}_{ij}, \vartheta$ من المعادلات (4.14)−(4.18)، فنحصل بعد عدة عمليات على المعادلات التالية في $A^+ \times B$:

$$\begin{aligned}
&(\rho^{-1}\hat{\mathcal{R}}_i)_{,j} - \epsilon_{kji}\, J^{-1}\hat{\mathcal{M}}_k - \hat{\mathcal{A}}_{jikl}\,\ddot{\sigma}_{kl} + c_{\sigma}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\,\dot{\hat{q}}_{k,k} = c_{\sigma}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\,\dot{r}\,,\\
&(J^{-1}\hat{\mathcal{M}}_i)_{,j} - \hat{C}_{jikl}\;\ddot{\mu}_{kl} = 0\,,\\
&(c_{\sigma}^{-1}\,\hat{q}_{k,k})_{,i} - \hat{\lambda}_{ij}\,L\,\dot{\hat{q}}_j + (c_{\sigma}^{-1}\theta_0\,\hat{\alpha}_{kl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{kl})_{,i} = (c_{\sigma}^{-1}\,r)_{,i}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

أو:

$$\begin{aligned}
&(\rho^{-1}\hat{R}_i)_{,j} - \epsilon_{kji}\, J^{-1}\hat{M}_k - \hat{\mathcal{A}}_{jikl}\,\ddot{\sigma}_{kl} + c_{\sigma}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\,\dot{\hat{q}}_{k,k} =\\
&= -(\rho^{-1}\hat{X}_i)_{,j} + \epsilon_{kji}\, J^{-1}\hat{Y}_k + c_{\sigma}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\,\dot{r}\,,\\
&(J^{-1}\hat{M}_i)_{,j} - \hat{C}_{jikl}\;\ddot{\mu}_{kl} = -(J^{-1}\hat{Y}_i)_{,j}\,,\\
&(c_{\sigma}^{-1}\,\hat{q}_{k,k})_{,i} - \hat{\lambda}_{ij}\,L\,\dot{\hat{q}}_j + (c_{\sigma}^{-1}\theta_0\,\hat{\alpha}_{kl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{kl})_{,i} = (c_{\sigma}^{-1}\,r)_{,i}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

حيث:

$$\hat{\mathcal{R}}_i = \hat{R}_i + \hat{X}_i\,,\ \hat{\mathcal{M}}_i = \hat{M}_i + \hat{Y}_i\ ,\ \hat{R}_i = \hat{\sigma}_{ji,j}\ ,\ \hat{M}_i = \epsilon_{ijk}\,\hat{\sigma}_{jk} + \hat{\mu}_{ji,j}\,,$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{jikl} = \hat{A}_{jikl} - c_{\sigma}^{-1}\theta_0\,\hat{\alpha}_{ji}\,\hat{\alpha}_{kl}$$

وبما أن:

$$\epsilon_{kji}\,\epsilon_{kmn} = \delta_{jm}\,\delta_{in} - \delta_{jn}\,\delta_{im} \tag{4.21}$$

فتأخذ المعادلات (4.20) الشكل التالي في $A^+ \times B$:

$$
\begin{aligned}
&(\rho^{-1}\hat{R}_i)_{,j} - J^{-1}(2\,\hat{\sigma}_{[ji]} + \epsilon_{kji}\,\hat{\mu}_{mk,m}) - \hat{\mathcal{A}}_{jikl}\,\ddot{\hat{\sigma}}_{kl} + \\
&+ c_{\sigma}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\,\dot{\hat{q}}_{k,k} = -(\rho^{-1}\hat{X}_i)_{,j} + \epsilon_{kji}\,J^{-1}\hat{Y}_k + c_{\sigma}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\,\dot{r}\,, \\
&(J^{-1}\hat{M}_i)_{,j} - \hat{C}_{jikl}\,\ddot{\hat{\mu}}_{kl} = -(J^{-1}\hat{Y}_i)_{,j}\,, \\
&(c_{\sigma}^{-1}\,\hat{q}_{k,k})_{,i} - \hat{\lambda}_{ij}\,L\,\dot{\hat{q}}_j + (c_{\sigma}^{-1}\theta_0\,\hat{\alpha}_{kl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{kl})_{,i} = (c_{\sigma}^{-1}\,r)_{,i}
\end{aligned}
\qquad (4.22)
$$

ندعو المعادلات (4.19) أو المعادلات (4.20) أو المعادلات (4.22) ندعوها بالشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي لمعادلات الاجهادات والتدفق الحراري للجسم الدقيق المعتبر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$.

2.4 الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي لمبدأ انحفاظ طاقة الجسم الدقيق المعتبر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ بلغة $\{\hat{u}_i,\hat{\varphi}_i,\vartheta\}$:

لأجل أيجاد هذا الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي، ننطلق من مجموعة المعادلات (3.28)−(3.24)، بعد تطبيق المؤثر L ،على المعادلات (3.27)−(3.24)، أي ننطلق من مجموعة المعادلات:

$$\breve{\gamma}_{ji} = \breve{u}_{i,j} - \epsilon_{kji}\,\breve{\varphi}_k \quad , \quad \breve{\kappa}_{ji} = \breve{\varphi}_{i,j}\,, \qquad (4.23)$$

$$\breve{\sigma}_{ji,j} + \breve{X}_i = \rho\,\ddot{\breve{u}}_i \quad , \quad \epsilon_{ijk}\,\breve{\sigma}_{jk} + \breve{\mu}_{ji,j} + \breve{Y}_i = J\,\ddot{\breve{\varphi}}_i\,, \qquad (4.24)$$

$$-\breve{q}_{i,i} + \breve{r} = \theta_0\,\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,\dot{\breve{\gamma}}_{ji} + c_{\boldsymbol{\gamma}}\,\dot{\breve{\vartheta}}\,, \qquad (4.25)$$

$$\breve{\sigma}_{ji} = \hat{a}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\kappa\theta q}}\,\breve{\gamma}_{k\ell} - \hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma\theta:\kappa q}}\,\breve{\vartheta}\,, \quad \breve{\mu}_{ji} = \hat{c}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma\theta q}}\,\breve{\kappa}_{k\ell}\,, \qquad (4.26)$$

$$\breve{q}_i = -\hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,j}\,, \qquad (4.27)$$

حيث الرمز $\breve{f} = L\,f$ ،

وذلك باتباع مايلي:

بضرب طرفي المعادلة الأولى في (4.24) بـ $\dot{\breve{u}}_i$ والمعادلة الثانية في (4.24) بـ $\dot{\breve{\varphi}}_i$ من ثم بالاستفادة من خواص الاشتقاق الجزئي نجد:

$$
\begin{aligned}
&(\dot{\breve{\hat{u}}}_i \dot{\breve{\hat{\sigma}}}_{ji})_{,j} - \dot{\breve{\hat{u}}}_{i,j} \dot{\breve{\hat{\sigma}}}_{ji} + \dot{\breve{\hat{u}}}_i \breve{\hat{X}}_i = \frac{1}{2}\rho \frac{\partial}{\partial t} \dot{\breve{\hat{u}}}_i \dot{\breve{\hat{u}}}_i \,, \\
&\dot{\breve{\hat{\sigma}}}_{ji} \in_{kji} \dot{\breve{\hat{\phi}}}_k + (\dot{\breve{\hat{\phi}}}_i \dot{\breve{\hat{\mu}}}_{ji})_{,j} - \dot{\breve{\hat{\phi}}}_{i,j} \dot{\breve{\hat{\mu}}}_{ji} + \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i \breve{\hat{Y}}_i = \frac{1}{2} J \frac{\partial}{\partial t} \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i,
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

بجمع العلاقتين السابقتين، من ثم بالاستفادة من العلاقات (4.23)، نحصل على العلاقة التالية:

$$
\begin{aligned}
&(\dot{\breve{\hat{u}}}_i \dot{\breve{\hat{\sigma}}}_{ji})_{,j} + (\dot{\breve{\hat{\phi}}}_i \dot{\breve{\hat{\mu}}}_{ji})_{,j} - \dot{\breve{\hat{\gamma}}}_{ji} \dot{\breve{\hat{\sigma}}}_{ji} - \dot{\breve{\hat{\kappa}}}_{ji} \dot{\breve{\hat{\mu}}}_{ji} + \\
&+ \dot{\breve{\hat{u}}}_i \breve{\hat{X}}_i + \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i \breve{\hat{Y}}_i = \frac{1}{2}\rho \frac{\partial}{\partial t} \dot{\breve{\hat{u}}}_i \dot{\breve{\hat{u}}}_i + \frac{1}{2} J \frac{\partial}{\partial t} \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

بمكاملة طرفي العلاقة السابقة تكاملاً حجمياً في B ، من ثم باستخدام مبرهنة التفرق [6]، نحصل على العلاقة التالية:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial B} \dot{\breve{\hat{u}}}_i \dot{\breve{\hat{\sigma}}}_{ji} \hat{n}_j \,\mathrm{d}a + \int_{\partial B} \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i \dot{\breve{\hat{\mu}}}_{ji} \hat{n}_j \,da + \int_B (\dot{\breve{\hat{u}}}_i \breve{\hat{X}}_i + \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i \breve{\hat{Y}}_i)\,\mathrm{d}v = \\
&\int_B (\dot{\breve{\hat{\gamma}}}_{ji} \dot{\breve{\hat{\sigma}}}_{ji} + \dot{\breve{\hat{\kappa}}}_{ji} \dot{\breve{\hat{\mu}}}_{ji})\,\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B (\rho \dot{\breve{\hat{u}}}_i \dot{\breve{\hat{u}}}_i + J \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i)\,\mathrm{d}v
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

لكن ينتج عن (4.26) وعن العلاقتين الأولى والثانية من العلاقات التناظرية أن (3.15):

$$
\begin{aligned}
\dot{\breve{\hat{\gamma}}}_{ji} \dot{\breve{\hat{\sigma}}}_{ji} + \dot{\breve{\hat{\kappa}}}_{ji} \dot{\breve{\hat{\mu}}}_{ji} = &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa}\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\ \dot{\breve{\hat{\gamma}}}_{ji} \dot{\breve{\hat{\gamma}}}_{k\ell} + \hat{c}^{\boldsymbol{\gamma}\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\ \dot{\breve{\hat{\kappa}}}_{ji} \dot{\breve{\hat{\kappa}}}_{k\ell}) \\
&- \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}_{ji}\ \dot{\breve{\hat{\gamma}}}_{ji}\, \breve{\vartheta}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

فبتعويض (4.31) في (4.30)، نحصل على العلاقة التالية:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial B} \dot{\breve{\hat{u}}}_i \dot{\breve{\hat{\sigma}}}_{ji} \hat{n}_j \,\mathrm{d}a + \int_{\partial B} \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i \dot{\breve{\hat{\mu}}}_{ji} \hat{n}_j \,da + \int_B (\dot{\breve{\hat{u}}}_i \breve{\hat{X}}_i + \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i \breve{\hat{Y}}_i)\,\mathrm{d}v = \\
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B (\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa}\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\ \dot{\breve{\hat{\gamma}}}_{ji} \dot{\breve{\hat{\gamma}}}_{k\ell} + \hat{c}^{\boldsymbol{\gamma}\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\ \dot{\breve{\hat{\kappa}}}_{ji} \dot{\breve{\hat{\kappa}}}_{k\ell} + \rho \dot{\breve{\hat{u}}}_i \dot{\breve{\hat{u}}}_i + J \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i \dot{\breve{\hat{\phi}}}_i)\,\mathrm{d}v \\
&- \int_B \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}_{ji}\ \dot{\breve{\hat{\gamma}}}_{ji}\, \breve{\vartheta}\,\mathrm{d}v
\end{aligned}
\tag{4٣٢,}
$$

ولكن بتعويض (4.27) في (4.25)، نجد:

$$
(\hat{k}_{ij} \vartheta_{,j})_{,i} + \breve{r} = \theta_0 \hat{\eta}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}_{ji}\ \dot{\breve{\hat{\gamma}}}_{ji} + c_{\boldsymbol{\gamma}} \dot{\breve{\vartheta}} \tag{4.33}
$$

أو:

$$\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}\ \dot{\breve{\gamma}}_{ji} = -\frac{1}{\theta_0}[\ c_{\boldsymbol{\gamma}}\,\dot{\breve{\vartheta}} - (\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j})_{,i} - \breve{r}\ ] \tag{4.34}$$

بالتالي:

$$\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}\ \dot{\breve{\gamma}}_{ji}\,\breve{\vartheta} = -\frac{1}{\theta_0}[\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}c_{\boldsymbol{\gamma}}\,\breve{\vartheta}^2 - (\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\,\breve{\vartheta})_{,i} + \hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\breve{\vartheta}_{,i} - \breve{r}\ \breve{\vartheta}] \tag{4.35}$$

ينتج الآن (4.35) وعن تعريف المؤثر L وعن تناظر $\hat{k}_{ij}$ أن:

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}\ \dot{\breve{\gamma}}_{ji}\,\breve{\vartheta} = -\frac{1}{\theta_0}[\ &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}c_{\boldsymbol{\gamma}}\,\breve{\vartheta}^2 + \hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\vartheta_{,i} + \frac{t_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\vartheta_{,i})\\ &- \breve{r}\ \breve{\vartheta} - (\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\breve{\vartheta})_{,i}]\end{aligned} \tag{4.36}$$

بمكاملة طرفي العلاقة السابقة (4.36) ، تكاملاً حجمياً في B ، من ثم باستخدام مبرهنة التفرق، نحصل على العلاقة التالية:

$$\begin{aligned}\int_B \hat{\eta}_{ji}^{\boldsymbol{\gamma}\theta:\boldsymbol{\kappa}\mathbf{q}}\ \dot{\breve{\gamma}}_{ji}\,\breve{\vartheta}\ \mathrm{d}v = -\frac{1}{\theta_0}[\ &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B c_{\boldsymbol{\gamma}}\,\breve{\vartheta}^2\,\mathrm{d}v + \frac{t_0}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B \hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\vartheta_{,i}\,\mathrm{d}v +\\ &+\int_B \hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\vartheta_{,i}\,\mathrm{d}v - \int_{\partial B}\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\,\breve{\vartheta}\,\hat{n}_i\,\mathrm{d}a - \int_B \breve{r}\ \breve{\vartheta}\,\mathrm{d}v]\end{aligned} \tag{4.37}$$

أخيراً، بتعويض (4.37) في (٤٣٢,)، نجد:

$$\begin{aligned}&\int_{\partial B}\dot{\breve{\hat{u}}}_i\,\breve{\hat{\sigma}}_{ji}\,\hat{n}_j\,\mathrm{d}a + \int_{\partial B}\dot{\breve{\hat{\varphi}}}_i\,\breve{\hat{\mu}}_{ji}\,\hat{n}_j\,da + \int_B(\dot{\breve{\hat{u}}}_i\,\breve{\hat{X}}_i + \dot{\breve{\hat{\varphi}}}_i\,\breve{\hat{Y}}_i)\,\mathrm{d}v =\\ &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B(\hat{a}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\kappa}\theta\mathbf{q}}\ \breve{\hat{\gamma}}_{ji}\breve{\hat{\gamma}}_{k\ell} + \hat{c}_{jik\ell}^{\boldsymbol{\gamma}\theta\mathbf{q}}\ \breve{\hat{\kappa}}_{ji}\breve{\hat{\kappa}}_{k\ell} + \rho\,\dot{\breve{\hat{u}}}_i\dot{\breve{\hat{u}}}_i + J\,\dot{\breve{\hat{\varphi}}}_i\,\dot{\breve{\hat{\varphi}}}_i)\,\mathrm{d}v\\ &+\frac{1}{\theta_0}[\ \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B c_{\boldsymbol{\gamma}}\,\breve{\vartheta}^2\,\mathrm{d}v + \frac{t_0}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B \hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\vartheta_{,i}\,\mathrm{d}v +\\ &+\int_B \hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\vartheta_{,i}\,\mathrm{d}v - \int_{\partial B}\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\,\breve{\vartheta}\,\hat{n}_i\,\mathrm{d}a - \int_B \breve{r}\ \breve{\vartheta}\,\mathrm{d}v]\end{aligned} \tag{4.38}$$

أو:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\frac{1}{2}\int_B(\rho\,\dot{\breve{\hat{u}}}_i\,\dot{\breve{\hat{u}}}_i+J\,\dot{\breve{\hat{\varphi}}}_i\,\dot{\breve{\hat{\varphi}}}_i+\hat{a}^{\boldsymbol{\kappa}\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\;\breve{\bar{\gamma}}_{ji}\breve{\bar{\gamma}}_{k\ell}+\hat{c}^{\boldsymbol{\gamma}\theta\mathbf{q}}_{jik\ell}\;\breve{\bar{\kappa}}_{ji}\breve{\bar{\kappa}}_{k\ell})\,\mathrm{d}v+\\
&+\frac{1}{2\theta_0}\int_B c_{\boldsymbol{\gamma}}\,\breve{\vartheta}^2\,\mathrm{d}v+\frac{t_0}{2\theta_0}\int_B\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\vartheta_{,i}\,\mathrm{d}v\,]+\frac{1}{\theta_0}\int_B\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\vartheta_{,i}\,\mathrm{d}v=\\
&\int_{\partial B}\dot{\breve{\hat{u}}}_i\,\breve{\bar{\sigma}}_{ji}\,\hat{n}_j\,\mathrm{d}a+\int_{\partial B}\dot{\breve{\hat{\varphi}}}_i\,\breve{\bar{\mu}}_{ji}\hat{n}_j\,da+\int_B(\dot{\breve{\hat{u}}}_i\,\breve{\bar{X}}_i+\dot{\breve{\hat{\varphi}}}_i\,\breve{\bar{Y}}_i)\,\mathrm{d}v+\\
&+\frac{1}{\theta_0}\int_{\partial B}\breve{\vartheta}\,\hat{k}_{ij}\vartheta_{,j}\,\hat{n}_i\,\mathrm{d}a+\frac{1}{\theta_0}\int_B\breve{r}\;\breve{\vartheta}\,\mathrm{d}v
\end{aligned}\tag{4.38}$$

تمثل (4.38) الشكل التنسوري الناطق في النظام الإحداثي الديكارتي لمبدأ انحفاظ طاقة الجسم الدقيق المعتبر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ بلغة $\{\hat{u}_i,\hat{\varphi}_i,\vartheta\}$.

1.4 الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي لمبدأ انحفاظ طاقة الجسم الدقيق المعتبر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ بلغة $\{\hat{\sigma}_{ij},\hat{\mu}_{ij},\hat{q}_i\}$: لأجل أيجاد هذا الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي، ننطلق من جملة المعادلات (4.20)، باتباع مايلي.

بضرب طرفي المعادلة الأولى في (4.20) بـ $\dot{\hat{\sigma}}_{ji}$ والمعادلة الثانية في (4.20) بـ $\dot{\hat{\mu}}_{ji}$ والمعادلة الثالثة في (4.20) بـ $\dot{\hat{q}}_i$، نحصل على:

$$\begin{aligned}
&(\rho^{-1}\hat{R}_i)_{,j}\dot{\hat{\sigma}}_{ji}-\in_{kji}J^{-1}\hat{M}_k\dot{\hat{\sigma}}_{ji}-\hat{\mathcal{A}}_{jikl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\ddot{\hat{\sigma}}_{kl}+\\
&+c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\dot{\hat{q}}_{k,k}=-(\rho^{-1}\hat{X}_i)_{,j}\dot{\hat{\sigma}}_{ji}+\in_{kji}J^{-1}\hat{Y}_k\dot{\hat{\sigma}}_{ji}+\\
&+c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\dot{r},\\
&(J^{-1}\hat{M}_i)_{,j}\dot{\hat{\mu}}_{ji}-\hat{C}_{jikl}\,\dot{\hat{\mu}}_{ji}\ddot{\hat{\mu}}_{kl}=-(J^{-1}\hat{Y}_i)_{,j}\dot{\hat{\mu}}_{ji},\\
&(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{q}_{k,k})_{,i}\,\dot{\hat{q}}_i-\hat{\lambda}_{ij}\dot{\hat{q}}_i\,L\,\dot{\hat{q}}_j+(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\theta_0\hat{\alpha}_{kl}\dot{\hat{\sigma}}_{kl})_{,i}\,\dot{\hat{q}}_i=(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}r)_{,i}\dot{\hat{q}}_i
\end{aligned}\tag{4.39}$$

بجمع المعادلتين الأولى والثانية في (4.39)، وإعادة كتابة المعادلة الثالثة، نجد:

$$\begin{aligned}
&(\rho^{-1}\hat{R}_i)_{,j}\dot{\hat{\sigma}}_{ji}-\in_{kji}J^{-1}\hat{M}_k\dot{\hat{\sigma}}_{ji}+(J^{-1}\hat{M}_i)_{,j}\dot{\hat{\mu}}_{ji}\\
&-\hat{\mathcal{A}}_{jikl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\ddot{\hat{\sigma}}_{kl}-\hat{C}_{jikl}\,\dot{\hat{\mu}}_{ji}\ddot{\hat{\mu}}_{kl}+c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\dot{\hat{q}}_{k,k}=\\
&-(\rho^{-1}\hat{X}_i)_{,j}\dot{\hat{\sigma}}_{ji}+\in_{kji}J^{-1}\hat{Y}_k\dot{\hat{\sigma}}_{ji}-(J^{-1}\hat{Y}_i)_{,j}\dot{\hat{\mu}}_{ji}+c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\dot{r},\\
&(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{q}_{k,k})_{,i}\,\dot{\hat{q}}_i-\hat{\lambda}_{ij}\dot{\hat{q}}_i\,L\,\dot{\hat{q}}_j+(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\theta_0\hat{\alpha}_{kl}\dot{\hat{\sigma}}_{kl})_{,i}\,\dot{\hat{q}}_i=(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}r)_{,i}\dot{\hat{q}}_i
\end{aligned}\tag{4.40}$$

وبما أن:

$$(\rho^{-1}\hat{R}_i)_{,j}\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji} = (\rho^{-1}\hat{R}_i\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji})_{,j} - \rho^{-1}\hat{R}_i\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji,j} = (\rho^{-1}\hat{R}_i\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji})_{,j} - \rho^{-1}\hat{R}_i\,\dot{\hat{R}}_i = (\rho^{-1}\hat{R}_i\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji})_{,j} - \frac{1}{2}\rho^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\hat{R}_i\hat{R}_i\,, \tag{4.41}$$

$$\in_{kji} J^{-1}\hat{M}_k\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji} = J^{-1}\hat{M}_k(\in_{kji}\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji} + \dot{\hat{\mu}}_{nk,n}) - J^{-1}\hat{M}_k\,\dot{\hat{\mu}}_{nk,n} = J^{-1}\hat{M}_k\dot{\hat{M}}_k - J^{-1}\hat{M}_k\,\dot{\hat{\mu}}_{nk,n} = \frac{1}{2}J^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\hat{M}_k\hat{M}_k - J^{-1}\hat{M}_k\,\dot{\hat{\mu}}_{nk,n}\,, \tag{4.42}$$

$$(J^{-1}\hat{M}_i)_{,j}\,\dot{\hat{\mu}}_{ji} = (J^{-1}\hat{M}_i\,\dot{\hat{\mu}}_{ji})_{,j} - J^{-1}\hat{M}_i\,\dot{\hat{\mu}}_{ji,j}\,, \tag{4.43}$$

$$(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{q}_{k,k})_{,i}\,\dot{\hat{q}}_i = (c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{q}_{k,k}\,\dot{\hat{q}}_i)_{,i} - c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{q}_{k,k}\,\dot{\hat{q}}_{i,i} = (c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{q}_{k,k}\,\dot{\hat{q}}_i)_{,i} - \frac{1}{2}c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\frac{\partial}{\partial t}(\hat{q}_{k,k})^2\,, \tag{4.44}$$

$$(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\theta_0\,\hat{\alpha}_{kl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{kl})_{,i}\,\dot{\hat{q}}_i = (c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\theta_0\,\hat{\alpha}_{kl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{kl}\,\dot{\hat{q}}_i)_{,i} - c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\theta_0\,\hat{\alpha}_{kl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{kl}\,\dot{\hat{q}}_{i,i} \tag{4.45}$$

بتعويض (4.45)−(4.41) في(4.40)، وبالاستفادة من الخاصتين التناظريتين:

$$\hat{\mathcal{A}}_{jikl} = \hat{\mathcal{A}}_{kl ji}\,,\ \hat{C}_{jikl} = \hat{C}_{kl ji} \tag{4.46}$$

نحصل بعد الاختصار على:

$$(\rho^{-1}\hat{R}_i\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji})_{,j} - \frac{1}{2}\rho^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\hat{R}_i\hat{R}_i - \frac{1}{2}J^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\hat{M}_k\hat{M}_k + (J^{-1}\hat{M}_i\,\dot{\hat{\mu}}_{ji})_{,j} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\mathcal{A}}_{jikl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\dot{\hat{\sigma}}_{kl} + \hat{C}_{jikl}\,\dot{\hat{\mu}}_{ji}\dot{\hat{\mu}}_{kl}) + c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\,\dot{\hat{q}}_{k,k} = -[\,(\rho^{-1}\hat{X}_i)_{,j} - \in_{kji} J^{-1}\hat{Y}_k\,]\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji} - (J^{-1}\hat{Y}_i)_{,j}\,\dot{\hat{\mu}}_{ji} + c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\dot{r}\,, \tag{4.47}$$

$$(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{q}_{k,k}\,\dot{\hat{q}}_i)_{,i} - \frac{1}{2}c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\frac{\partial}{\partial t}(\hat{q}_{k,k})^2 - \hat{\lambda}_{ij}\,\dot{\hat{q}}_i\,\dot{\hat{q}}_j - \frac{t_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\lambda}_{ij}\,\dot{\hat{q}}_i\,\dot{\hat{q}}_j + (c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\theta_0\,\hat{\alpha}_{kl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{kl}\,\dot{\hat{q}}_i)_{,i} - c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\theta_0\,\hat{\alpha}_{kl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{kl}\,\dot{\hat{q}}_{i,i} = (c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}r)_{,i}\,\dot{\hat{q}}_i$$

أو:

$$(\rho^{-1}\hat{R}_i\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji})_{,\,j}+(J^{-1}\hat{M}_i\,\dot{\hat{\mu}}_{ji})_{,\,j}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho^{-1}\,\hat{R}_i\,\hat{R}_i+J^{-1}\,\hat{M}_k\hat{M}_k+$$

$$+\hat{\mathcal{A}}_{jikl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\dot{\hat{\sigma}}_{kl}+\hat{C}_{jikl}\,\dot{\hat{\mu}}_{ji}\dot{\hat{\mu}}_{kl})+c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\,\dot{\hat{q}}_{k,k}=$$

$$-[\,(\rho^{-1}\hat{X}_i)_{,j}-\in_{kji}J^{-1}\hat{Y}_k\,]\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}-(J^{-1}\hat{Y}_i)_{,j}\,\dot{\hat{\mu}}_{ji}+c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\dot{r}\,, \quad (4.48)$$

$$(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{q}_{k,k}\dot{\hat{q}}_i)_{,i}+(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\theta_0\hat{\alpha}_{kl}\dot{\hat{\sigma}}_{kl}\dot{\hat{q}}_i)_{,i}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[\,c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}(\hat{q}_{k,k})^2+t_0\,\hat{\lambda}_{ij}\dot{\hat{q}}_i\dot{\hat{q}}_j\,]$$

$$-\,\hat{\lambda}_{ij}\dot{\hat{q}}_i\dot{\hat{q}}_j-c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\theta_0\hat{\alpha}_{kl}\dot{\hat{\sigma}}_{kl}\,\dot{\hat{q}}_{i,i}=(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}r)_{,i}\,\dot{\hat{q}}_i$$

بمكاملة طرفي العلاقتين السابقتين (4.48)، تكاملاً حجمياً في B، ومن ثم باستخدام مبرهنة التفرق، نحصل على العلاقة التالية:

$$\int_{\partial B}\rho^{-1}\hat{R}_i\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\,\hat{n}_j\,\mathrm{d}a+\int_{\partial B}J^{-1}\hat{M}_i\,\dot{\hat{\mu}}_{ji}\,\hat{n}_j\,\mathrm{d}a-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B(\rho^{-1}\,\hat{R}_i\,\hat{R}_i+$$

$$+J^{-1}\,\hat{M}_k\hat{M}_k+\hat{\mathcal{A}}_{jikl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\,\dot{\hat{\sigma}}_{kl}+\hat{C}_{jikl}\,\dot{\hat{\mu}}_{ji}\dot{\hat{\mu}}_{kl})\,\mathrm{d}v+$$

$$+\int_B c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\,\dot{\hat{q}}_{k,k}\,\mathrm{d}v=-\int_B[\,(\rho^{-1}\hat{X}_i)_{,j}-\in_{kji}J^{-1}\hat{Y}_k\,]\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\,\mathrm{d}v$$

$$-\int_B(J^{-1}\hat{Y}_i)_{,j}\,\dot{\hat{\mu}}_{ji}\,\mathrm{d}v+\int_B c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\dot{r}\;\mathrm{d}v\,, \quad (4.49)$$

$$\int_{\partial B}c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{q}_{k,k}\,\dot{\hat{q}}_i\,\hat{n}_i\,\mathrm{d}a+\theta_0\int_{\partial B}c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{kl}\dot{\hat{\sigma}}_{kl}\dot{\hat{q}}_i\,\hat{n}_i\,\mathrm{d}a$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B[\,c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}(\hat{q}_{k,k})^2+t_0\,\hat{\lambda}_{ij}\dot{\hat{q}}_i\dot{\hat{q}}_j\,]\,\mathrm{d}v$$

$$-\int_B\hat{\lambda}_{ij}\,\dot{\hat{q}}_i\,\dot{\hat{q}}_j\,\mathrm{d}v-\theta_0\int_B c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{kl}\,\dot{\hat{\sigma}}_{kl}\,\dot{\hat{q}}_{i,i}\,\mathrm{d}v=\int_B(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}r)_{,i}\,\dot{\hat{q}}_i\,\mathrm{d}v\,,$$

بجمع العلاقتين السابقتين، بعد ضرب العلاقة الثانية فيهما بـ $\frac{1}{\theta_0}$، ومن ثم بترتيب الحدود نجد:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B (\rho^{-1}\hat{R}_i\hat{R}_i + J^{-1}\hat{M}_i\hat{M}_i)\,\mathrm{d}v +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B (\hat{\mathcal{A}}_{jikl}\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\dot{\hat{\sigma}}_{kl} + \hat{C}_{jikl}\dot{\hat{\mu}}_{ji}\dot{\hat{\mu}}_{kl})\,\mathrm{d}v +$$
$$+\frac{1}{2\theta_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}(\hat{q}_{k,k})^2\,\mathrm{d}v + \frac{t_0}{2\theta_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B \hat{\lambda}_{ij}\dot{\hat{q}}_i\dot{\hat{q}}_j\,\mathrm{d}v +$$
$$+\frac{1}{\theta_0}\int_B \hat{\lambda}_{ij}\dot{\hat{q}}_i\dot{\hat{q}}_j\,\mathrm{d}v = \qquad (4.50)$$
$$\int_B \{[\,(\rho^{-1}\hat{X}_i)_{,j} - \in_{kji} J^{-1}\hat{Y}_k\,]\,\dot{\hat{\sigma}}_{ji} + (J^{-1}\hat{Y}_i)_{,j}\,\dot{\hat{\mu}}_{ji}$$
$$- c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{ji}\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\dot{r} - \frac{1}{\theta_0}(c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}r)_{,i}\,\dot{\hat{q}}_i\}\,\mathrm{d}v$$
$$+\int_{\partial B} (\rho^{-1}\hat{R}_i\dot{\hat{\sigma}}_{ji}\hat{n}_j + J^{-1}\hat{M}_i\,\dot{\hat{\mu}}_{ji}\hat{n}_j +$$
$$+\frac{1}{\theta_0}c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{q}_{k,k}\dot{\hat{q}}_i\hat{n}_i + c_{\boldsymbol{\sigma}}^{-1}\hat{\alpha}_{kl}\dot{\hat{\sigma}}_{kl}\dot{\hat{q}}_i\hat{n}_i)\,\mathrm{d}a$$

تمثل (4.50) الشكل التنسوري الناطق في النظام الإحداثي الديكارتي لمبدأ انحفاظ طاقة الجسم الدقيق المعتبر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ بلغة $\{\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \hat{q}_i\}$.

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولا) <u>الاستنتاجات:</u> استنتجنا الشكلين التنسوريين الناطقين في النظام الاحداثي الديكارتي لمبدأ انحفاظ الطاقة الكلية للجسم الدقيق الترموديناميكي المعمم المعتبر $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ بلغة $\{\hat{u}_i, \hat{\varphi}_i, \vartheta\}$ وبلغة $\{\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}, \hat{q}_i\}$.

ثانياً) <u>المقترحات:</u> يمكن أن نختتم البحث باقتراح ثلاث مسائل للمناقشة، هي الآتية:

المسألة الأولى: مناقشة الشكل التنسوري الناطق في نظام احداثي منحني كيفي، للأسس الترموديناميكية المعممة ولعملية Lame الترموديناميكية المعممة للجسم الدقيق $(\mathcal{K}\text{-}\mathcal{N})$ المتجانس وغير متماثل المناحي.

المسألة الثانية: مناقشة مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية للجسم الدقيق *(K-N)* بلغة $\{\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\vartheta\}$ وبلغة $\{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\mathbf{q}\}$، ذلك بالشكلين التنسوريين الصامد والناطق في نظام احداثي منحني كيفي.

المسألة الثالثة: مناقشة الشكلين التنسورين الصامد والناطق في نظام إحداثي منحني كيفي لكلٍ من العملية الترموديناميكية المعممة بزمني استرخاء وسلوك Lame الترموديناميكي المعمم بزمني استرخاء [1,3]، وذلك لأجل الجسم الدقيق *(K-N)* المتجانس وغير المتماثل المناحي.

المراجع

[1]- Kaliski, S. , 1992 - Vibrations and Waves,Part B:Waves, Polish Scientific Publishers PWN Ltd.—Warszaw.
[2] –Nowacki, W , 1986 - Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.
[3]- Ignaczak, J., Starzewski, M.O., 2010 - Thermoelasticity with Finite Wave Speeds, Oxford University Press Inc., New York.
[4]- Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Eslami, M.R., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y.,2013 - Theory of Elasticity and Thermal Stresses, Springer Science+Business Media Dordrecht.
[5] – Hetnarski, R.B., and Ignaczak, J., 2011 - The Mathematical Theory of Elasticity , Second Edition , CRC Press,Taylor & Francis

Group,6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300,Boca Raton, FL 33487-2742.

[6]-*Heinbockel ,J.H, 1996*- Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics, Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University.

[7]- *Hung Nguyen-Schåfer*, 2017 - Tensor Analysis and Elementary Differential Geometry for Physicists and Engineers, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[8]- *Alaa Khallouf*, 2021-The foundations of the generalized thermoelasticity with one relax time in the invariable tensorial form,Accepted for Publication in August 2021, Journal of Tartous University.

[9] – Mountajab Al-Hasan and Rameh Rajab Deeb , **2022** – The Invariance tensorial forms of the energy balance for the (L-S) thermodynamical body of one relax time in terms of $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ and of $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$, Journal of Al-Baath University,Vol.44, Nr.1, p. 79-104.

[10] – Mountajab Al-Hasan and Gaith Saleh,**2024** - The foundations of the generalized micropolar and centro-symmetric thermoelasticcity with one relax time in the invariable tensorial form, Volume46, Nunber13, Pages115-146.2024, Journal of Al-Baath University.