خصائص تحويل هانكل في فضاء فوق التوزيعات من نوع بويرلنغ

رحيق سمير علي[1] ، أ.د. منير مخلوف[2]

[1] طالبة ماجستير في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث، سوريا

[2] قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث، سوريا

الملخص:

نقدم في هذا البحث تعريفاً لدوال الاختبار في فضاء فوق التوزيعات (فضاء بويرلنغ) وبعض خصائصها الجبرية والطوبولوجية، ثمّ نستعرض تحويل هانكل والذي يكون بدوره أوتومورفيزماً في الفضاء $D_I(A)_\mu$ على هذا الفضاء. ونبين الخصائص المتعلقة بكثافة الفضاء الجزئي $\mathcal{H}^\mu_\omega(A)$ بالإضافة إلى دراسة التقابل بين الفضاءين $[\mathcal{H}^\mu_\omega;[A,B]]$ و $[\mathcal{H}^\mu_\omega(A);B]$ وأخيراً نقدم إثبات بعض الخصائص والصيغ المتعلقة بتحويل هانكل في فضاء فوق التوزيعات $\mathcal{H}^\mu_\omega(A)$.

الكلمات المفتاحية:

فوق التوزيع، تحويل هانكل، فضاء بويرلنغ، أوتومورفيزم، فضاء باناخ.

Hankel Transformation Properties in Beurling Type Ultradistributions Space

Abstract:

In this research , we present a definition of the Banach−space−valued test functions of Beurling type ultradistribution $\mathcal{H}_{\omega}^{\mu}(A)$ and some of their algebraic and topological properties . Then we review the Hankel transformation which is an automorphism on this space and show the properties of the subspace ${}_{\mu}D_{I}(A)$ of $\mathcal{H}_{\omega}^{\mu}(A)$.

In addition to studying the bijection between $[\mathcal{H}_{\omega}^{\mu}(A);B]$ onto $[\mathcal{H}_{\omega}^{\mu};[A,B]]$ .Finally , we present a proof for some formulas relating to Hankel transformation on $\mathcal{H}_{\omega}^{\mu}(A)$.

Key words: Ultradistribution, Hankel transformation, Beurling type space, automorphism, Banach space.

مقدمة:

تعدّ التحويلات التكاملية من أهمّ الأدوات الرياضية التي تستخدم لفهم وتحليل مجموعة واسعة من الظواهر في العلوم والهندسة، وقد نال تحويل هانكل اهتماماً كبيراً من قبل الرياضيين والباحثين، وسمي تحويل هانكل نسبةً إلى العالم الألماني هيرمان هانكل.

من أبرز الباحثين الذين قدّموا نتائج مهمة بما يتعلق بتحويل هانكل للدوال المعممة أو التوزيعات الباحث زيمانيان – Zemanian ، حيث قام بدراسة نظرية دوال الاختبار ودرس تحويل هانكل للدوال المعممة على فضاءات باناخ، ومن ثم تحويل هانكل المعمم.

بالإضافة إلى تايواري – Tiwari الذي قدم صيغة عامة لتحويل هانكل في فضاءات الدوال المعممة وساهم في إثبات بعض خصائص هذا التحويل.

ومن ثم وسع باثاك – Pathak وباندي – Pandey عمل زيمانيان وتايوري حول تحويل هانكل في فضاءات الدوال المعممة إلى فضاءات فوق التوزيعات من نوع بويرلنغ – Beurling،

حيث تم تعريف ودراسة أهم خصائص هذا الفضاء من قبل باثاك وشريستا – Shrestha.

سنركز في بحثنا هذا على أهم النتائج التي تم التوصل إليها فيما يتعلق بتحويل هانكل لفوق التوزيعات على فضاءات باناخ.

هدف البحث:

نهدف في هذا البحث لدراسة تحويل هانكل لفوق التوزيعات على فضاءات باناخ، وإثبات بعض الصيغ العلمية المتعلقة بتحويل هانكل في هذا الفضاء.

أهمية البحث:

تأتي أهمية البحث من كون تحويل هانكل لفوق التوزيعات على فضاءات باناخ أساساً يُرتكز عليه في تحليل ومعالجة البيانات في مختلف العلوم كالجيولوجيا والفيزياء و والطب، ويلعب تحويل هانكل دوراً مهماً في معالجة البيانات البصرية كتحليل بيانات التلسكوبات الفلكية، وله تطبيقات أخرى في المعادلات التفاضلية الجزئية وفي المسائل المتعلقة بالمرونة والأمواج والانتشار الحراري وغيرها.

١.مفاهيم أساسية:

تعريف ١,١ : الفضاء $\boldsymbol{D^m(A)}$ $[4]$:

يعرّف الفضاء $D^m(A)$ بالعلاقة : $D^m_{K_j}(A)$ $D^m(A) = D^m_{R^n}(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} D^m_{K_j}(A)$ حيث

إن $D^m_{K_j}(A)$ هو فضاء خطي لكل الدوال الملساء ϕ من R^n إلى فضاء باناخ A بحيث يكون $\operatorname{supp}\phi \subset K_j$ و K_j هي مجموعات متراصة من الفضاء R^n و $K_j \subseteq K_{j+1}$ و $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = R^n$. والطبولوجيا مولَّدة بأنصاف النظم للفضاء $D^m_{K_j}$ المعطاة بالشكل:

$$\gamma_k(\phi) = \sup_{t \in k_j} \| D^k_t \phi(t) \|_A \ , \qquad 0 \leqslant k \leqslant m$$

تعريف ١,٢ : الفضاء $\boldsymbol{\mathcal{H}_\mu(A)}$ $[4]$:

الفضاء $\mathcal{H}_\mu(A)$ هو فضاء كل الدوال $\phi(x)$ ذات القيم العقدية ، والملساء على المجال $I = (0,\infty)$ ، وتحقق :

$$\gamma^{\mu}_{m,k}(\phi) = \sup_{x \in I} \left\| x^m \left(x^{-1} \frac{d}{dx} \right)^k x^{-\mu-(1/2)} \phi(x) \right\|_A < \infty \quad \forall m,k \in \mathbb{N}_0$$

تعريف١,٣ : تحويل هانكل على الفضاء $\boldsymbol{\mathcal{H}_\mu(A)}$ من أجل $\boldsymbol{\mu \geqslant -\frac{1}{2}}$ $[4]$:

، حيث $\phi(x) \in \mathcal{H}_{\mu}(A)$ للدالة (x) $(h_{\mu}\phi)$يعرف تحويل هانكل

بالشكل: $x \in I = (0,\infty)$

$$(h_{\mu}\phi)(x) = \int_0^{\infty} (xy)^{1/2} J_{\mu}(xy)\phi(y)dy, \quad \mu \geqslant -\frac{1}{2}$$

هي دالة بيسل من النوع الأول . J_{μ}حيث

تعريف ١,٤ : الفضاء $[\boldsymbol{A};\boldsymbol{B}]$ $[13]$:

$[A,B]$ يرمز للفضاء الخطي لكل التطبيقات الخطية المستمرة من A إلى B وذلك من أجل أي فضاءين متجهين طبولوجيين Aو. B والرمز $\langle f,\phi\rangle$ يشير إلى العنصر من B المعين بـ $f \in [A,B]$ و $\phi \in A$. ونرمز للنظيم في فضاء باناخ A بالرمز $\|.\|_A$.

تعريف ١,٥ :فضاء فوق التوزيعات من نوع بويرلنغ–Beurling $\mathcal{H}_{\omega}^{\mu}(\boldsymbol{A})$ $[11]$:

لتكن ω دالة حقيقية مستمرة على المجال $I = (0,\infty)$: وتحقق الخواص التالية

$$(i) \quad 0 \leqslant \omega(\xi+\eta) \leqslant \omega(\xi) + \omega(\eta) \qquad \forall \xi,\eta \in I$$

$$(ii) \quad \int_0^{\infty} \frac{\omega(\xi)}{(1+\xi^2)} d\xi < \infty$$

$$(iii) \quad \omega(\xi) \geqslant a + b\log(1+\xi) \quad , \ a,b>0 \ ,a,b \in \mathbb{R}$$

نرمز بـ M لمجموعة كل الدوال المستمرة ذات القيم الحقيقية والتي تحقق الشروط السابقة. من العلاقة (iii) نجد إن :

$$x \leqslant e^{-a/b} e^{\omega(x)/b}, \qquad x>0$$

نعرف الآن الفضاء $\mathcal{H}_{\omega}^{\mu}(A)$ على أنه فضاء كل الدوال العقدية ϕ والقابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات على المجال $I = (0,\infty)$ ، والتي تحقق :

$$\gamma^{\mu}_{\lambda,k}(\phi) = \sup_{x\in I} \left\| e^{\lambda\omega(x)} \left(x^{-1}\frac{d}{dx} \right)^{k} x^{-\mu-1/2}\phi(x) \right\|_{A} < \infty \ , \quad \forall \lambda, k \in \mathbb{N}_0$$

إن $\mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$ فضاء خطي وطوبولوجيا الفضاء $\mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$ مولدة بأسرة أنصاف النظم $\{\gamma^{\mu}_{\lambda,k}\}$.

تعريف ١,٦ : تحويل هانكل على الفضاء $\mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$ من أجل $\mu \geqslant -\frac{1}{2}$ [11]:

يعرف تحويل هانكل $(h_{\mu}\phi)(x)$ للدالة $\phi(x) \in \mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$ ، حيث $x \in I = (0,\infty)$ بالشكل :

$$(h_{\mu}\phi)(x) = \int_{0}^{\infty} (xy)^{1/2} J_{\mu}(xy)\phi(y)dy, \quad \mu \geqslant -\frac{1}{2}$$

تعريف ١,٧ : الفضاء $D_I(A)$ [4] :

نقول عن $\phi(x)$ إنها دالة من الفضاء $D_I(A)$ إذا وفقط إذا كانت ϕ معرفة على المجال $I = (0,\infty)$ وملساء، ويوجد $b \in I$ من أجل كل ϕ يحقق أن $\phi(x) = 0$ من أجل $x \in [b,\infty)$. و لنضع $_{\mu}D_I(A) \triangleq D_I(A) \cap \mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$.

تعريف ١,٨ : الفضاء $_{\mu}D_I \odot A$ [4] :

$_{\mu}D_I \odot A$ هو الفضاء الخطي لكل الدوال $\phi \in {}_{\mu}D_I(A)$ التي لها تمثيل من الصيغة $\phi = \sum_{k} a_k h_k$ حيث $a_k \in A$, $a_k \in {}_{\mu}D_I$ والمجموع يتكون من عدد منته من الحدود .

ملاحظة:

1. $$S_{\mu} = S_{\mu,x} = M_{\mu}N_{\mu} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1-4\mu^2}{4x^2}$$

2. $$N_\mu = N_{\mu,x} = x^{\mu+1/2}\frac{d}{dx}x^{-\mu-1/2}$$

3. $$M_\mu = M_{\mu,x} = x^{-\mu-1/2}\frac{d}{dx}x^{\mu+1/2}$$

4. $$N_\mu^{-1} = x^{\mu+1/2}\int_\infty^x t^{-\mu-1/2}\,dt$$

5. $$\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k(\theta\Phi)(x) = \sum_{v=0}^{k}\binom{k}{v}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^v\theta\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{k-v}\Phi$$

تعريف ١,٩ : تحويل هانكل من مرتبة μ اختيارية [11]:

ليكن k عدداً صحيحاً غير سالب يحقق $\mu + k \geqslant -1/2$. نعرف تحويل هانكل $h_{\mu,k}$ على الفضاء $\mathcal{H}_\omega^\mu(A)$ بالشكل :

$$\Psi(y) = h_{\mu,k}(\phi(x)) \triangleq (-1)^k x^{-k} h_{\mu+k} N_{\mu+k-1} \dots N_{\mu+1} N_\mu[\phi(x)]$$

وتحويل هانكل العكسي h_μ^{-1} لـ $\Psi \in \mathcal{H}_\omega^\mu(A)$ يعرف بالشكل :

$$\phi(x) = h_\mu^{-1}[\Psi(y)] \triangleq (-1)^k N_\mu^{-1} N_{\mu+1}^{-1} \dots N_{\mu+k-1}^{-1} h_{\mu+k}[y^k \Psi(y)]$$

تعريف ١,١٠: تحويل هانكل المعمم [11] :

ليكن k عدد صحيح موجب بحيث يحقق $\mu + k \geqslant -1/2$ من أجل $\mu \in \mathbb{R}$.

نعرف تحويل هانكل المعمم بالشكل : $\langle h'_\mu f, \phi\rangle = \langle f, h_{\mu,k}\phi\rangle$ من أجل كل $\phi \in \mathcal{H}_\omega^\mu(A)$ حيث: $f \in [\mathcal{H}_\omega^\mu(A)]'$.

تعريف ١,١١: دعامة (حامل) دالة [1] :

لتكن $f: \Omega \to \mathbb{C}$ حيث Ω مجموعة جزئية (مفتوحة) في $\mathbb{R}$. إن دعامة هذه الدالة هي غلاقة المجموعة $\{x \in \Omega\ ;\ f(x) \neq 0\}$ ونكتب:

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega \ ; \ f(x) \neq 0\}}$$

تعريف ١,١٢: الفضاء المحدب محلياً $[6]$:

نقول عن الفضاء المتجهي الطوبولوجي V أنه فضاء محدب محلياً إذا كان لكل نقطة من الفضاء قاعدة جوارات تتكون من مجموعات محدبة .

مبرهنة ١,١ $[11]$:

يكون الفضاء $\mathcal{H}_{\omega}^{\mu}(A)$ فضاءً جزئياً من الفضاء $\mathcal{H}_{\mu}(A)$ من أجل $\omega \in M$.

الإثبات : لتكن $\phi \in \mathcal{H}_{\omega}^{\mu}(A)$ علينا أن نبين أن : $\gamma_{\lambda,k}^{\mu}(\phi) < \infty$. لدينا:

$$\sup_{x \in I} \left\| x^m \left(x^{-1} \frac{d}{dx} \right)^k \left[x^{-\mu - (1/2)} \phi(x) \right] \right\|_A$$
$$= \sup_{x \in I} \left\| x^m e^{-\lambda\omega(x)} e^{\lambda\omega(x)} . \left(x^{-1} \frac{d}{dx} \right)^k x^{-\mu - (1/2)} \phi(x) \right\|_A$$

، و من ثمّ يكون : $x^m \leqslant e^{\lambda\omega(x)}$حيث :

$$\sup_{x \in I} \left\| x^m e^{-\lambda\omega(x)} e^{\lambda\omega(x)} \left(x^{-1} \frac{d}{dx} \right)^k x^{-\mu - (1/2)} \phi(x) \right\|_A$$
$$\leqslant \sup_{x \in I} \left\| e^{\lambda\omega(x)} \left(x^{-1} \frac{d}{dx} \right)^k x^{-\mu - (1/2)} \phi(x) \right\|_A$$

بالتالي$\gamma_{\lambda,k}^{\mu}(\phi) < \infty$: ، ومنه يكون : $\mathcal{H}_{\omega}^{\mu}(A) \subseteq \mathcal{H}_{\mu}(A)$.

مبرهنة ١,٢ $[11]$:

الفضاء الجزئي $_{\mu}D_I(A)$ كثيف في الفضاء $\mathcal{H}_{\omega}^{\mu}(A)$ من أجل كل $\mu \in R$.

الإثبات : لتكن $\theta(x) \in D_I(A)$ بحيث: $\theta(x) = 1$ من أجل $x \in]0,1]$ و $\theta(x) = 0$ من أجل $x \geqslant 2$. نأخذ $\phi(x) \in \mathcal{H}_\omega^\mu(A)$ و $\lambda, k \in \mathbb{N}_0$ ، وبالتالي:

$$e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k\left[x^{-\mu-(1/2)}\left[\theta\left(\frac{x}{\eta}\right)\phi(x)-\phi(x)\right]\right]$$
$$= xe^{\lambda\omega(x)}\sum_{v=0}^{k}\binom{k}{v}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{k-v}x^{-\mu-(1/2)}\phi(x)\frac{(x^{-1}(d/dx))^{v}[\theta(x/\eta)-1]}{x}$$

بالتالي:

$$\sup_{x\in I}\left\|e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k\left[x^{-\mu-(1/2)}\left(\theta\left(\frac{x}{\eta}\right)\phi(x)-\phi(x)\right)\right]\right\|_A$$
$$\leqslant \sum_{v=0}^{k}\binom{k}{v}\sup_{x\in I}\left\|e^{(\lambda+1)\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{k-v}x^{-\mu-(1/2)}\phi(x)\right\|_A$$
$$\times\sup_{x\geqslant\eta}\left|\frac{(x^{-1}(d/dx)^{v}[\theta(x/\eta)-1])}{x}\right|$$

ومن ثم:

$$\sup_{x\in I}\left\|e^{(\lambda+1)\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{k-v}x^{-\mu-(1/2)}\phi(x)\right\|_A < \infty \quad \forall\phi\in\mathcal{H}_\omega^\mu(A)$$

ويكون :

$$\sup_{x\geqslant\eta}\left|\frac{(x^{-1}(d/dx)^{v}[\theta(x/\eta)-1])}{x}\right| \to 0 \quad ,k = const\ ,\ 0\leqslant v\leqslant k\ .$$

ومنه نجد : $\theta\left(\frac{x}{\eta}\right)\phi(x)\to\phi(x)$ في الفضاء $\mathcal{H}_\omega^\mu(A)$.

مبرهنة ١,٣ $[11]$:

تحويل هانكل العادي هو أوتومورفيزم $(automorphism)$ على الفضاء $\mathcal{H}_{\omega}^{\mu}(A)$ من أجل $\mu \geqslant -\frac{1}{2}$.

الإثبات : لدينا :

$$\gamma_{\lambda,k}^{\mu}[(h_{\mu}\phi)(\xi)] = \sup_{\xi \in I} \left\| e^{\lambda\omega(x)} \left(\xi^{-1}\frac{d}{d\xi}\right)^{k} \xi^{-\mu-(1/2)}(h_{\mu}\phi)(\xi) \right\|_{A}$$

ومن الخاصية (ii) من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد ثابت $C(\varepsilon)$: بحيث يكون $\omega(\xi) \leqslant \varepsilon\xi + C(\varepsilon)$:وبالتالي .

$$\sup_{\xi \in I} \left\| e^{\lambda\omega(\xi)} \left(\xi^{-1}\frac{d}{d\xi}\right)^{k} \xi^{-\mu-(1/2)}(h_{\mu}\phi)(\xi) \right\|_{A}$$

$$\leqslant \sup_{\xi \in \mathrm{I}} \left\| \mathrm{e}^{\lambda(\varepsilon\xi + \mathrm{C}(\varepsilon))} \left(\xi^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{k} \xi^{-\mu-(1/2)}(h_{\mu}\phi)(\xi) \right\|_{A}$$

$$\leqslant \sup_{\xi \in \mathrm{I}} \left\| e^{\lambda C(\varepsilon)} e^{\lambda\varepsilon\xi} \left(\xi^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{k} \xi^{-\mu-(1/2)}(h_{\mu}\phi)(\xi) \right\|_{A}$$

$$\leqslant e^{\lambda C(\varepsilon)} \sup_{\xi \in I} \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\varepsilon)^{m}}{m!} \xi^{m} \left(\xi^{-1}\frac{d}{d\xi}\right)^{k} \xi^{-\mu-(1/2)}(h_{\mu}\phi)(\xi) \right\|_{A}$$

ومن ثم نحصل على:

$$\sup_{\xi \in \mathrm{I}} \left\| e^{\lambda\omega(x)} \left(\xi^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{k} \xi^{-\mu-(1/2)}(h_{\mu}\phi)(\xi) \right\|_{A}$$

$$\leqslant e^{\lambda C(\varepsilon)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\varepsilon)^{m}}{m!} \sup_{\xi \in \mathrm{I}} \left\| \xi^{\mathrm{m}} \left(\xi^{-1}\frac{d}{d\xi}\right)^{k} \xi^{-\mu-(1/2)}(h_{\mu}\phi)(\xi) \right\|_{A}$$

$$\leqslant e^{\lambda C(\varepsilon)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\varepsilon)^{m}}{m!} \sup_{\xi \in \mathrm{I}} \left\| \int_{0}^{\infty} x^{2\mu+2k+m+1} \left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{m} [x^{-\mu-(1/2)}\phi(x)] \times (x\xi)^{-\mu-k} J_{\mu+k}(x\xi)\,dx \right\|_{A}$$

$$\leqslant e^{\lambda C(\varepsilon)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\varepsilon)^{m}}{m!} \sup_{\xi \in \mathrm{I}} |(x\xi)^{-\mu-k} J_{\mu+k}(x\xi)|$$

$$\times \int_0^\infty \left\| x^{2\mu+2k+m+1}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^m x^{-\mu-(1/2)}\phi(x)\right\|_A dx.$$

الآن ، بفرض أن $N > \mu + k + 1/2$ و بالتالي: .

$$\sup_{\xi\in I}\left\| e^{\lambda\omega(\xi)}\left(\xi^{-1}\frac{d}{d\xi}\right)^k \xi^{-\mu-(1/2)}(h_\mu\phi)(\xi)\right\|_A$$

$$\leqslant e^{\lambda C(\varepsilon)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda\varepsilon)^m}{m!}A_{\mu+k}\int_0^\infty \left\|(1+x^2)^{N+1}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^m x^{-\mu-(1/2)}\phi(x)\right\|_A \frac{dx}{(1+x^2)}$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}e^{\lambda C(\varepsilon)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda\varepsilon)^m}{m!}A_{\mu+k}\sup_{x\in I}\left\|(1+x^2)^{N+1}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^m x^{-\mu-(1/2)}\phi(x)\right\|_A$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}e^{\lambda C(\varepsilon)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda\varepsilon)^m}{m!}A_{\mu+k}\sum_{l=0}^{N+1}\binom{N+1}{l}\sup_{x\in I}\left\|x^{2l}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^m x^{-\mu-(1/2)}\phi(x)\right\|_A$$

ومن الخاصية (iii) و $e^{(2l/b)\omega(x)} \geqslant e^{2al/b}x^{2l}$ نحصل على :

$$\sup_{\xi\in I}\left\| e^{\lambda\omega(x)}\left(\xi^{-1}\frac{d}{d\xi}\right)^k \left[\xi^{-\mu-(1/2)}(h_\mu\phi)(\xi)\right]\right\|_A$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}e^{\lambda C(\varepsilon)}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{N+1}\frac{(\lambda\varepsilon)}{m!}\binom{N+1}{l}e^{-2al/b}\times\sup_{x\in I}\left\|e^{\frac{2l}{b}\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^m x^{-\mu-(1/2)}\phi(x)\right\|_A$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}e^{\lambda C(\varepsilon)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda\varepsilon)^m}{m!}\binom{N+1}{l}e^{-2a(N+1)/b}\times\sup_{x\in I}\left\|e^{\frac{2(N+1)}{b}\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^m \left(x^{-\mu-(1/2)}\phi(x)\right)\right\|_A$$

$$\leqslant B_{\mu+k,N+1}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(\lambda\varepsilon)^m}{m!}\gamma^{\mu}_{(2N+1)/b,m}(\phi)\right]$$

إذا اخترنا $\varepsilon < \left(\lambda^m B_{\mu+k,N+1}\gamma^{\mu}_{(2n+1)/b,m}(\phi)\right)^{-1/m}$ نجد إن :

$$\sup_{\xi \in I} \left\| e^{\lambda\omega(x)} \left(\xi^{-1} \frac{d}{d\xi} \right)^k \left[\xi^{-\mu-(1/2)} (h_\mu \phi)(\xi) \right] \right\|_A < \infty$$

. وباستخدام الصيغة العكسية لتحويل هانكل $(h_\mu \phi) \in \mathcal{H}_\omega^\mu(A)$ومما سبق نجد إن

أوتومورفيزم . h_μ تقابل. ومنه فإن h_μ ، وبالتالي يكون h_μ نجد إن$h_\mu^{-1} = h_\mu$

من أجل $\mathcal{H}_\omega^\mu(A)$ كثيف في الفضاء $_\mu D_I \odot A$ الفضاء : $[11]$ **مبرهنة ١,٤**

. $\mu \geqslant -\dfrac{1}{2}$

الإثبات: : لتكن $\phi \in {}_\mu D_I(A)$ كما عرفناها في المبرهنة ١,٢، ولنأخذ $\theta(x)$ وعلينا أن نبين أنه من أجل $\mu \in \mathbb{R}$:

. $\mathcal{H}_\omega^\mu(A)$ $\theta\left(\dfrac{x}{\eta}\right) h_\mu(\phi) \to h_\mu(\phi)$ عندما $\eta \to \infty$ تنتمي للفضاء

لذلك:

$$\sup_{x \in I} \left\| e^{\lambda\omega(x)} \left(x^{-1} \frac{d}{dx} \right)^k x^{-\mu-(1/2)} (h_\mu \phi)(x) \left[\theta\left(\frac{x}{\eta}\right) - 1 \right] \right\|_A$$

$$\leqslant \left(\sum_{\beta=0}^{k} \binom{k}{\beta} \sup_{x \geqslant \eta} \left| \frac{(x^{-1}(d/dx))^\beta [\theta(x/\eta) - 1]}{x} \right| \right)$$

$$\times \sup_{x \in I} \left\| x e^{\lambda\omega(x)} \left(x^{-1} \frac{d}{dx} \right)^{k-\beta} x^{-\mu-(1/2)} (h_\mu \phi)(x) \right\|_A$$

عندئذ:

$$\sup_{x \geqslant \eta} \left| \frac{(x^{-1}(d/dx))^\beta [\theta(x/\eta) - 1]}{x} \right| \to 0 \ , \ \eta \to \infty \ , \ k = const \ , \ 0 \leqslant \beta \leqslant k \ .$$

ومن ثم باستخدام المبرهنة ١,٢، نحصل على:

$$\sup_{x\in I}\left\| x e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{k-\beta} x^{-\mu-(1/2)}(h_\mu\phi)(x)\right\|_A$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}e^{\lambda C(\varepsilon)}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda\varepsilon)^m}{m!}A_{\mu+k}\sum_{l=1}^{N+1}\binom{N+1}{l}\sup_{x\in I}\left\| x^{2l+1}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^m x^{-\mu-(1/2)}\phi(x)\right\|_A\right)$$

حيث $\phi\in {}_\mu D_I(A)$ ، وبالتالي يوجد $b\in I$يحقق $\phi(x)=0$ من أجل $x\in[b,\infty)$ وبالتالي:

$$\sup_{x\in I}\left\| x e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{1}\frac{d}{dx}\right)^{k-\beta} x^{-\mu-(1/2)}(h_\mu\phi)(x)\right\|_A \leqslant b\frac{\pi}{2}e^{\lambda C(\varepsilon)}$$

$$\times\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda\varepsilon)^m}{m!}A_{\mu+k}\sum_{l=1}^{N+1}\binom{N+1}{l}\sup_{x\in I}\left\| x^{2l+1}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^m x^{-\mu-(1/2)}\phi(x)\right\|_A\right)\leqslant\infty$$

وهذا يعني أن:

$$\left\| e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{k} x^{-\mu-(1/2)}h_\mu\phi(x)\left[\theta\left(\frac{x}{\eta}\right)-1\right]\right\|_A \to 0 \text{ as } \eta\to\infty$$

وبالتالي $\theta\left(\frac{x}{\eta}\right)h_\mu(\phi)\to h_\mu(\phi)$ من الفضاء $\mathcal{H}^\mu_\omega(A)$ عندما $\eta\to\infty$.

باستخدام نفس الطريقة الواردة في $[4]$ نجد أن ${}_\mu D_I\odot A$ كثيف في الفضاء $\mathcal{H}^\mu_\omega(A)$ و h_μ أوتومورفيزم في الفضاء $\mathcal{H}^\mu_\omega(A)$ ومنه يكون $h_\mu({}_\mu D_I(A))$ كثيف في ${}_\mu D_I\odot A$ وبالتالي $h_\mu({}_\mu D_I(A))$ كثيف في الفضاء$\mathcal{H}^\mu_\omega(A)$.

تمهيدية ١,١ $[13]$:

ليكن $V\,,\,W$ فضاءان محدبان محلياً ، وليكن $P\,,\,\Gamma$ تولدان أسرة من أنصاف النظم للطبولوجيا في $V\,,\,W$على الترتيب . وليكن f تطبيق خطي من V إلى W عندئذٍ القضايا الأربع الاتية متكافئة :

i. f مستمر.

ii. f مستمر في نقطة الأصل.

iii. من أجل كل نصف نظيم ρ مستمر على W يوجد نصف نظيم γ في V يحقق :

$$\rho(f(\theta)) \leqslant \gamma(\theta)$$ من أجل كل θ

iv. من أجل كل $\rho \in P$ ، يوجد ثابت $M \geqslant 0$ ، وتوجد أسرة منتهية $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_m\}$ تحقق $\rho(f(\theta)) \leqslant M \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant m} \gamma_k(\theta)$ من أجل كل $\theta \in V$.

تمهيدية 1.2 :

كل $f \in [\mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A);\ B]$ يعرِف بشكل وحيد دالة $g \in [\mathcal{H}^{\mu}_{\omega};[A;B]]$ من خلال المعادلة :

$$\langle g, \theta \rangle a \stackrel{\triangle}{=} \langle f, \theta a \rangle \quad , \quad \theta \in \mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A) \quad , \ a \in A,\ \mu \in R$$

الإثبات: ليكن $\theta \in \mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$ نعرف التطبيق j_θ من A إلى B بالشكل :

$j_\theta a = \langle f, \theta a \rangle$ من أجل كل $a \in A$. ومن السهل التحقق من كون j_θ خطي .

حسب التمهيدية ١,١ (iv)يوجد عددان صحيحان موجبان k_0 , λ_0 و ثابت $M > 0$ يحقق :

$$\| j_\theta a \|_B = \| \langle f, \theta a \rangle \|_B \leqslant M \max_{\substack{0 \leqslant k \leqslant k_0 \\ 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0}} \gamma^{\mu}_{\lambda,k}(\theta a)$$

حيث:

$$\gamma^{\mu}_{\lambda,k}(\theta a) = \sup_{x \in I} \left\| e^{\lambda \omega(x)} \left(x^{-1} \frac{d}{dx} \right)^k x^{-\mu-1/2} \theta a \right\|_A$$

$$= \| a \|_A \sup_{x \in I} \left\| e^{\lambda \omega(x)} \left(x^{-1} \frac{d}{dx} \right)^k x^{-\mu-1/2} \theta \right\|_A$$

وبالتالي:

$$\| j_\theta a \|_B \leqslant M \| a \|_A \max_{\substack{0 \leqslant k \leqslant k_0 \\ 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0}} \gamma^{\mu}_{\lambda,k}(\theta)$$

ويكون:

$$\| j_\theta \|_{[A;B]} \leqslant M \max_{\substack{0 \leqslant k \leqslant k_0 \\ 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0}} \gamma^{\mu}_{\lambda,k}(\theta)$$

وهذه العلاقة تبين أن g مستمر .

ثم نضع : $j_\theta \triangleq \langle g, \theta \rangle$. وهذا يعرف بشكل وحيد g كتطبيق من $\mathcal{H}^{\mu}_{\omega}$ إلى $[A;B]$.

g خطي لأنه من أجل أي $a \in A$ ، $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ، و $\theta, \psi \in \mathcal{H}^{\mu}_{\omega}$ يكون :

$$\begin{aligned} \langle g, \alpha\theta + \beta\psi \rangle &= \langle f, \alpha\theta a + \beta\psi a \rangle \\ &= \alpha \langle f, \theta a \rangle + \beta \langle f, \psi a \rangle \\ &= (\alpha \langle g, \theta \rangle + \beta \langle g, \psi \rangle) a \end{aligned}$$

مبرهنة ١,٥:

يوجد تقابل من $[\mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A);B]$ إلى $[\mathcal{H}^{\mu}_{\omega};[A;B]]$، ويعرف بالشكل :

$$\langle g, \theta \rangle a \triangleq \langle f, \theta a \rangle$$

حيث :

$$a \in A \ , \ g \in [\mathcal{H}_\omega^\mu ; [A;B]] \ \ , \ f \in [\mathcal{H}_\omega^\mu (A);B] \ , \ \theta \in \mathcal{H}_\omega^\mu \ , \mu \geqslant -\frac{1}{2}$$

الإثبات: من التمهيدية 1.2، كل $f \in [\mathcal{H}_\omega^\mu (A);B]$ يعرف بشكل وحيد دالة $g \in [\mathcal{H}_\omega^\mu ; [A;B]]$ من خلال المعادلة :

$$\langle g, \theta \rangle a = \langle f, \theta a \rangle$$

من أجل كل $\mu \in R$. من أجل كل $\varphi \in {}_\mu D_I (A)$ نعرف :

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum \langle g, \theta_k \rangle a_k$$

من أجل $\varphi = \sum \theta_k a_k$. ينتج من التعريف أن f خطي على ${}_\mu D_I \odot A$ ونسعى لنبين أن f مستمر . بالفعل من أجل $\varepsilon > 0$ اختياري ، وحيث إن $\theta a (\theta \in {}_\mu D_I \ , \ a \in A)$ تنتمي إلى المجموعة :

$\{\varphi : \gamma_{\lambda,k}^\mu (\varphi) < \varepsilon / M \ , \ \lambda = 0, 1, \dots, \lambda_0 \ , k = 0, 1, \dots, k_0\}$. و M, λ_0, k_0 معرفة كما سنرى . نستنتج أن :

$$\| \langle f \ , \ \theta a \rangle \|_B = \| \langle g, \ \theta \rangle a \|_B \leqslant \| a \|_A . \| \langle g, \ \theta \rangle \|_{[A;B]}$$

من التمهيدية 1, (iv) ، يوجد $M > 0$ وعددان صحيحان موجبان λ_0, k_0 يحققان:

$$\| \langle f, \ \theta a \rangle \|_B \leqslant \| a \|_A . M \max_{\substack{0 \leqslant k \leqslant k_0 \\ 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0}} \gamma_{\lambda,k}^\mu (\theta) < M \ . \ \varepsilon / M = \varepsilon$$

وبالتالي f مستمر في نقطة الأصل . من التمهيدية 1,1 ، f مستمر على ${}_{\mu}D_I \odot A$

من المبرهنة ١,٤، ${}_{\mu}D_I \odot A$ كثيف في $\mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$ من أجل كل $\mu \geqslant \frac{-1}{2}$. وبذلك يتم المطلوب.

٢. تحويل هانكل h_μ من مرتبة اختيارية μ:

مبرهنة ٢,١

N_μ تطبيق خطي مستمر من $\mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$ إلى $\mathcal{H}^{\mu+1}_{\omega}(A)$.

الإثبات: من أجل كل $\varphi \in \mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$ وكل λ , k يكون :

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu+1}_{\lambda,k}(N_\mu\varphi) &= \sup\left\| e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k x^{-\mu-\frac{3}{2}} N_\mu\varphi\right\|_A \\ &= \sup\left\| e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k x^{-\mu-\frac{3}{2}} x^{\mu+\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}x^{-\mu-\frac{1}{2}}\varphi\right\|_A \\ &= \sup\left\| e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k \left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right) x^{-\mu-\frac{1}{2}}\varphi\right\|_A \\ &= \sup\left\| e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{k+1} x^{-\mu-\frac{1}{2}}\varphi\right\|_A = \gamma^{\mu}_{\lambda,k+1}(\varphi)\end{aligned}$$

مبرهنة ٢,٢

N_μ^{-1} تطبيق خطي مستمر من $\mathcal{H}^{\mu+1}_{\omega}(A)$ إلى $\mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$.

الإثبات : بفرض أن $\varphi(x) \in \mathcal{H}^{\mu+1}_{\omega}(A)$ و k ثابت صحيح موجب ، عندئذ:

$$\gamma^{\mu}_{\lambda,k}(N_\mu^{-1}\varphi) = \sup_{x\in I}\left\| e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k x^{-\mu-1/2} N_\mu^{-1}\varphi\right\|_A$$

$$= \sup_{x\in I}\left\| e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k x^{-\mu-1/2}.x^{\mu+1/2}\int_{\infty}^{x} t^{-\mu-1/2}\varphi(t)\,dt\right\|_A$$

$$= \sup_{x\in I}\left\| e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{k-1}x^{-1}\left(\frac{d}{dx}\int_{\infty}^{x}t^{-\mu-1/2}\varphi(t)\,dt\right)\right\|_{A}$$

$$= \sup_{x\in I}\left\| e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{k-1}x^{-1}x^{-\mu-1/2}\varphi(x)\right\|_{A}$$

$$= \sup_{x\in I}\left\| e^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^{k-1}x^{-(\mu+1)-1/2}\varphi(x)\right\|_{A} = \gamma^{\mu+1}_{\lambda,k-1}(\varphi)$$

وذلك من أجل : $\lambda = 0,1,2,\ldots.$, $k = 1,2\ldots.$

ونحصل على نتيجة مشابهة من أجل $k = 0$ بالشكل :

$$\| e^{\lambda\omega(x)}x^{-\mu-1/2}N_{\mu}^{-1}\varphi(x)\|_{A} \leqslant e^{\lambda\omega(x)}\int_{x}^{\infty}\|t^{-\mu-1/2}\varphi(t)\|_{A}\,dt$$

$$\leqslant \int_{0}^{\infty}\| e^{\lambda\omega(t)}.t^{-\mu-1/2}\varphi(t)\|_{A}\,dt$$

$$\leqslant \int_{0}^{\infty}\left\| e^{\lambda\omega(t)}\frac{1}{1+t^{2}}(t+t^{3})t^{-(\mu+1)-1/2}\varphi(t)\right\|_{A}dt$$

بالتالي:

$$\sup_{x\in I}\| e^{\lambda\omega(x)}x^{-\mu-1/2}N_{\mu}^{-1}\varphi(x)\|_{A}$$

$$\leqslant \int_{0}^{\infty}\frac{dt}{1+t^{2}}\ \sup_{x\in I}\| e^{\lambda\omega(x)}(x+x^{3})x^{-(\mu+1)-1/2}\varphi(x)\|_{A}$$

أي:

$$\gamma^{\mu}_{\lambda,0}(N_{\mu}^{-1}\varphi) \leqslant \frac{\pi}{2}\left[\begin{array}{l}\sup\limits_{x\in I}\| e^{\lambda\omega(x)}.x.x^{-(\mu+1)-1/2}\varphi(x)\|_{A}\\ +\sup\limits_{x\in I}\| e^{\lambda\omega(x)}.x^{3}.x^{-(\mu+1)-1/2}\varphi(x)\|_{A}\end{array}\right]$$

لدينا:

$$x \leqslant \mathrm{e}^{\lambda\omega(x)} \Rightarrow x.\mathrm{e}^{\lambda\omega(x)} \leqslant \mathrm{e}^{2\lambda\omega(x)}$$

$$x^3 \leqslant \mathrm{e}^{\lambda\omega(x)} \Rightarrow x^3.\mathrm{e}^{\lambda\omega(x)} \leqslant \mathrm{e}^{2\lambda\omega(x)}$$

ومنه نجد:

$$\gamma^{\mu}_{\lambda,0}(N^{-1}_{\mu}\varphi) \leqslant \frac{\pi}{2}\left[\begin{array}{l} \sup\limits_{x\in I}\|\mathrm{e}^{2\lambda\omega(x)}.x^{-(\mu+1)-1/2}\varphi(x)\|_A \\ +\sup\limits_{x\in I}\|\mathrm{e}^{2\lambda\omega(x)}.x^{-(\mu+1)-1/2}\varphi(x)\|_A \end{array}\right]$$

أي :

$$\gamma^{\mu}_{\lambda,0}(N^{-1}_{\mu}\varphi) \leqslant \frac{\pi}{2}\left[2\sup_{x\in I}\|\mathrm{e}^{2\lambda\omega(x)}.x^{-(\mu+1)-1/2}\varphi(x)\|_A\right]$$

$$\gamma^{\mu}_{\lambda,0}(N^{-1}_{\mu}\varphi) \leqslant \frac{\pi}{2}\left[2\ \gamma^{\mu+1}_{2\lambda,0}(\varphi)\right] = \pi\gamma^{\mu+1}_{2\lambda,0}(\varphi)$$

وهو المطلوب.

مبرهنة ٢,٣

تحويل هانكل $h_{\mu,k}$ الوارد في التعريف ١,٩ هو أوتومورفيزم (automorphism) على الفضاء $\mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$. ومعكوسه أيضا أوتومورفيزم (automorphism) على الفضاء $\mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$.

الإثبات:

من المبرهنات ٢,١ و ٢,٢ ، نجد إن $\varphi \to N_{\mu}N_{\mu+1}...N_{\mu+k-1}\varphi$ هو أيزومورفيزم من $\mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$ إلى $\mathcal{H}^{\mu+k}_{\omega}(A)$. ومن المبرهنة ١,٣ نجد إن $h_{\mu+k}$ هو أوتومورفيزم على $\mathcal{H}^{\mu+k}_{\omega}(A)$ من أجل $\mu+k \geqslant -\frac{1}{2}$. وأيضاً لدينا $\varphi \to x^{-k}\varphi$ إيزومورفيزم من الفضاء $\mathcal{H}^{\mu+k}_{\omega}(A)$ إلى $\mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$ وذلك لأن :

$$\gamma^{\mu}_{\lambda,k}(x^{-k}\varphi) = \sup_{x\in I}\left\|\mathrm{e}^{\lambda\omega(x)}\left(x^{-1}\frac{d}{dx}\right)^k x^{-\mu-1/2}x^{-k}\varphi\right\|_A$$

$$= \sup_{x \in I} \left\| e^{\lambda\omega(x)} \left(x^{-1} \frac{d}{dx} \right)^k x^{-(\mu+k)-1/2} \varphi \right\|_A = \gamma_{\lambda,k}^{\mu+k}(\varphi)$$

وبالتالي تركيب التطبيقات السابقة هو أيضاً إيزومورفيزم أي أن $h_{\mu,k}$ أوتومورفيزم على الفضاء $\mathcal{H}_\omega^\mu(A)$. وبشكل مشابه نجد إن معكوس كل من التطبيقات السابقة هو إيزومورفيزم و $h_{\mu+k}^{-1} = h_{\mu+k}$ أي أن $h_{\mu+k}^{-1}$ أوتومورفيزم على $\mathcal{H}_\omega^{\mu+k}(A)$ وبالتالي تركيب التطبيقات العكسية أيضاً إيزومورفيزم ، أي أن $h_{\mu,k}^{-1}$ أوتومورفيزم على الفضاء $\mathcal{H}_\omega^\mu(A)$ وهو المطلوب .

مبرهنة ٢,٤

ليكن $\mu \in \mathbb{R}$ ، عندئذ تحويل هانكل المعمم h'_μ الوارد في التعريف ١,١٠ هو أوتومورفيزم (automorphism) على الفضاء $[\mathcal{H}_\omega^\mu(A);B]$.

الإثبات : ينتج من المبرهنة ٢,٣ ومن كون h'_μ هو المؤثر المرافق لـ $h_{\mu,k}$ على $\mathcal{H}_\omega^\mu(A)$

مبرهنة ٢,٥ $[11]$:

ليكن B , A فضاءي باناخ ، عندئذ يمكن أن نعرف تقابل من الفضاء $[\mathcal{H}_\omega^\mu(A);B]$ إلى الفضاء $[\mathcal{H}_\omega^\mu;[A,B]]$ بالشكل :

$$\langle g,h\rangle a = \langle f,ha\rangle$$

حيث $a \in A$ ، $h \in \mathcal{H}_\omega^\mu$ ، $g \in [\mathcal{H}_\omega^\mu;[A,B]]$ ، $f \in [\mathcal{H}_\omega^\mu(A);B]$ ، $\mu \in \mathbb{R}$.

الإثبات: ليكن k عدد صحيح موجب بحيث يحقق $\mu + k \geqslant -1/2$ من أجل $\mu \in \mathbb{R}$ ، ليكن المؤثر T إيزومورفيزم من الفضاء ${}_\mu D_I \odot A$ إلى الفضاء ${}_{\mu+k} D_I \odot A$ الكثيف في الفضاء $\mathcal{H}_\omega^{\mu+k}(A)$ أيضاً ، T إيزومورفيزم من $\mathcal{H}_\omega^\mu(A)$ إلى $\mathcal{H}_\omega^{\mu+k}(A)$. ولهذا السبب يكون الفضاء ${}_\mu D_I \odot A$ كثيف في $\mathcal{H}_\omega^\mu(A)$. من المبرهنة ١,٤ والمبرهنة ١,٥ يمكننا إيجاد تقابل من الفضاء $[\mathcal{H}_\omega^\mu(A);B]$ إلى الفضاء $[\mathcal{H}_\omega^\mu;[A,B]]$ ويحقق المعادلة المذكورة أعلاه .

مبرهنة ٢,٦

ليكن $\mu \in \mathbb{R}$ و k عدد صحيح موجب بحيث يحقق $\mu + k \geqslant -1/2$. عندئذٍ:

$$h_{\mu+1,k}(N_\mu \phi) = -x h_{\mu,k}(\phi) \qquad \forall \phi \in \mathcal{H}_\omega^\mu(A)$$

الإثبات: من تعريف تحويل هانكل (التعريف ١,٩) نجد إن:

$$\begin{aligned} h_{\mu+1,k}(N_\mu \varphi) &= (-1)^k x^{-k} h_{\mu+1+k} N_{\mu+k} N_{\mu+k-1} \ldots N_{\mu+1}(N_\mu \varphi) \\ &= (-x)(-1)^{k+1}(x)^{-(k+1)} h_{\mu+k+1} N_{\mu+k} \ldots . N_{\mu+1} N_\mu \varphi \\ &= -x\, h_{\mu,k+1}(\varphi) = -x\, h_{\mu,k}(\varphi) \end{aligned}$$

والخطوة الأخيرة ناتجة عن كون تحويل هانكل مستقل عن اختيار k عندما يكون $\mu + k \geqslant -1/2$.

ملاحظة ٢,١ : لدينا

$$N_{\mu+k-1} \ldots . N_{\mu+1} N_\mu \varphi(y) = y^{\mu+k+1/2} \left(y^{-1} \frac{d}{dy} \right)^k y^{-\mu-1/2} \varphi(y)$$

ملاحظة ٢,٢: لدينا صيغ اشتقاق بالشكل:

$$D_x x^{-\mu} J_\mu(xy) = -y x^{-\mu} J_{\mu+1}(xy)$$
$$D_x x^\mu J_\mu(xy) = y\, x^\mu J_{\mu-1}(xy)$$

مبرهنة ٢,٧: لتكن $\phi \in \mathcal{H}_\omega^{\mu+1}(A)$ ، عندئذ :

$$h_{\mu,k}(M_\mu \phi) = y\, h_{\mu+1,k}(\phi), \qquad \mu + k \geqslant -\frac{1}{2} \;,\; \mu \in \mathbb{R}$$

مبرهنة ٢,٨ : لتكن $\varphi \in \mathcal{H}_\omega^\mu(A)$ ، عندئذ :

$$N_\mu h_{\mu,k} \varphi = h_{\mu+1,k}(-x\varphi)$$

الإثبات: لدينا:

$$h_{\mu,k}(\varphi) = (-1)^k x^{-k} h_{\mu+k} N_{\mu+k-1} \ldots . N_{\mu+1} N_\mu \varphi$$

$$= (-1)^{k} x^{-k} \int_0^\infty \sqrt{xy}\, J_{\mu+k} y^{\mu+k+1/2} (y^{-1} D)^{k} y^{-\mu-1/2} \varphi dy$$

بالتالي يكون:

$$N_\mu h_{\mu,k}(\varphi) = (-1)^{k} \int_0^\infty N_\mu x^{-k} \sqrt{xy}\, J_{\mu+k}(xy).y^{\mu+k+1/2} (y^{-1} D)^{k} y^{-\mu-1/2} \varphi(y) dy$$

بالاستفادة من الملاحظة ٢,٢ نجد إن:

$$\begin{aligned} N_\mu x^{-k} \sqrt{xy}\, J_{\mu+k}(xy) &= x^{\mu+1/2} D\, x^{-\mu-1/2} x^{-k} (xy)^{1/2} J_{\mu+k}(xy) \\ &= x^{\mu+1/2} D\, x^{-\mu-k} J_{\mu+k}(xy)\;\; y^{1/2} \\ &= x^{\mu+1/2} (-y) x^{-\mu-k} J_{\mu+k+1}(xy)\;\; y^{1/2} \\ &= x^{-k} \sqrt{xy}\, J_{\mu+k+1}(xy)\,(-y) \end{aligned}$$

ومنه نجد:

$$N_\mu h_{\mu,k}(\varphi) = (-1)^{k} x^{-k}$$

$$\times \int_0^\infty \sqrt{xy}\, J_{\mu+k+1}(xy) y^{\mu+1+k+1/2} (y^{-1} D)^{k} y^{-(\mu+1)-1/2} (-y\varphi(y)) dy$$

$$\Rightarrow N_\mu h_{\mu,k}(\varphi) = h_{\mu+1,k}(-y\varphi)$$

نبدل كل x بـ y وكل y بـ x نحصل على المطلوب .

مبرهنة ٢,٩ : لتكن $\varphi \in \mathcal{H}^{\mu}_{\omega}(A)$ و $\mu + k \geqslant -1/2$، عندئذٍ :

$$M_\mu N_\mu h_{\mu,k} \varphi = h_{\mu,k}(-x^2 \varphi)$$

الإثبات:

لقد أثبتنا أن $N_\mu h_{\mu,k}(\varphi) = h_{\mu+1,k}(-y\varphi)$ ولنبرهن أن :

$$M_\mu N_\mu h_{\mu,k}(\varphi) = M_\mu h_{\mu+1,k}(-y\varphi) = h_{\mu,k}(-y^2 \varphi)$$

لدينا: $h_{\mu+1,k}(-y\varphi) =$

$$(-1)^{k}x^{-k}\int_{0}^{\infty}\sqrt{xy}\,J_{\mu+k+1}(xy)y^{\mu+1+k+1/2}(y^{-1}D)^{k}y^{-\mu-1-1/2}(-y\varphi)dy$$

وبالتالي يكون:

$$M_{\mu}h_{\mu+1,k}(-y\varphi)=(-1)^{k}x^{-k}.x^{-k}\int_{0}^{\infty}M_{\mu}x^{k}\sqrt{xy}\,J_{\mu+1+k}(xy)y^{\mu+1+k+1/2}(y^{-1}D)^{k}$$

$$.\ y^{-(\mu+1)-1/2}(-y\varphi)dy$$

لدينا :

$$\begin{aligned}M_{\mu}x^{k}\sqrt{xy}\,J_{\mu+k+1}(xy)&=x^{-\mu-1/2}D\,x^{\mu+1/2}x^{k}(xy)^{1/2}J_{\mu+k+1}(xy)\\&=x^{-\mu-1/2}D\,x^{\mu+1+k}J_{\mu+1+k}(xy)\,(y)^{1/2}\end{aligned}$$

حسب الملاحظة ٢,٢ يكون:

$$D\,x^{\mu+1+k}J_{\mu+1+k}(xy)=y\,x^{\mu+1+k}J_{\mu+k}(xy)$$

أي:

$$\begin{aligned}M_{\mu}x^{k}\sqrt{xy}\,J_{\mu+1+k}(xy)&=x^{-\mu-1/2}(y)\,(y)^{1/2}x^{\mu+k+1}J_{\mu+k}(xy)\\&=x^{k}\sqrt{xy}\,J_{\mu+k}(xy)\,(y)\end{aligned}$$

ومنه يكون:

$$M_{\mu}h_{\mu+1,k}(\varphi)=$$

$$(-1)^{k}x^{-k}\int_{0}^{\infty}\sqrt{xy}\,J_{\mu+k}(xy)y^{\mu+2+k+1/2}(y^{-1}D)^{k}y^{-(\mu+2)-1/2}(-y^{2}\varphi)dy$$

$$=h_{\mu,k}(-y^{2}\varphi)$$

حيث نجد من الملاحظة ٢,١ إن:

$$\begin{aligned}&y^{\mu+2+k+1/2}(y^{-1}D)^{k}y^{-(\mu+2)-1/2}\varphi\\&=N_{\mu+2+k-1}\ldots\ldots\ldots N_{\mu+2}\varphi\\&=N_{\mu+1+k-1}\ldots\ldots\ldots N_{\mu+2}N_{\mu+1}\varphi\\&=N_{\mu+k-1}\ldots\ldots\ldots N_{\mu+1}N_{\mu}\varphi\end{aligned}$$

نبدل كل x بـ y وكل y بـ x نحصل على المطلوب .

مبرهنة ٢,١٠: لتكن $\phi \in \mathcal{H}_{\omega}^{\mu+1}(A)$ و $\mu + k \geqslant -1/2$، عندئذٍ :

$$h_{\mu,k}(x\varphi) = M_{\mu} h_{\mu+1,k}(\varphi)$$

الإثبات: لدينا:

$$h_{\mu+1,k}(\varphi) = (-1)^{k} x^{-k} h_{\mu+1+k} N_{\mu+k} ......N_{\mu+1}\varphi$$

$$= (-1)^{k} x^{-k} \int_0^{\infty} \sqrt{xy}\, J_{\mu+1+k}(xy) y^{\mu+1+k+1/2} (y^{-1}D)^{k} y^{-\mu-1-1/2} \varphi(y) dy$$

وبالتالي:

$$M_{\mu} h_{\mu+1,k}(\varphi) = (-1)^{k} x^{-k} x^{-k} \int_0^{\infty} M_{\mu} x^{k} \sqrt{xy}\, J_{\mu+1+k}(xy)$$
$$.y^{\mu+1+k+1/2} (y^{-1}D)^{k} y^{-(\mu+1)-1/2} \varphi(y) dy$$

من الملاحظة ٢,٢ نجد إن:

$$\begin{aligned} M_{\mu} x^{k} \sqrt{xy}\, J_{\mu+1+k}(xy) &= x^{-\mu-1/2} D x^{\mu+1/2} x^{k} (xy)^{1/2} J_{\mu+1+k}(xy) \\ &= x^{-\mu-1/2} D x^{\mu+k+1} J_{\mu+k+1}(xy)\, (y)^{1/2} \\ &= x^{-\mu-1/2} (y) x^{\mu+k+1} J_{\mu+k}(xy)\, (y)^{1/2} \\ &= x^{k} \sqrt{xy}\, J_{\mu+k}(xy)\, (y) \end{aligned}$$

بتعويض العلاقة الأخيرة والاستفادة من الملاحظة ٢,١ نجد:

$$M_{\mu} h_{\mu+1,k}(\varphi)$$

$$= (-1)^{k} x^{-k} \int_0^{\infty} \sqrt{xy}\, J_{\mu+k}(xy) y^{\mu+2+k+1/2} (y^{-1}D)^{k} y^{-(\mu+2)-1/2} (y\varphi(y)) dy$$

$$= (-1)^{k} x^{-k} \int_0^{\infty} \sqrt{xy}\, J_{\mu+k}(xy) N_{\mu+2+k-1} ... N_{\mu+2} (y\varphi(y)) dy$$

$$= (-1)^{k} x^{-k} h_{\mu+k} N_{\mu+k-1} ....N_{\mu}(y\varphi) = h_{\mu,k}(y\varphi)$$

نبدل كل x بـ y وكل y بـ x نجد إن $h_{\mu,k}(x\varphi) = M_{\mu} h_{\mu+1,k}(\varphi)$.

مبرهنة ٢,١١ لتكن $\varphi \in \mathcal{H}_{\omega}^{\mu}(A)$ و $\mu + k \geqslant -1/2$، عندئذٍ :

$$h_{\mu,k}(M_\mu N_\mu \varphi) = -x^2 h_{\mu,k}(\varphi)$$

الإثبات: لدينا:

$$\begin{aligned} h_{\mu,k}(M_\mu \varphi) &= x\, h_{\mu+1,k}(\varphi) \\ \Rightarrow h_{\mu,k}(M_\mu N_\mu \varphi) &= x\, h_{\mu+1,k}(N_\mu \varphi) \\ &= x(-x\, h_{\mu,k}(\varphi)) = -x^2 h_{\mu,k}(\varphi) \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مبرهنة ٢,١٢ : لتكن $\mu \in \mathbb{R}$ ، و $f \in [\mathcal{H}_{\omega}^{\mu}(A);B]$ عندئذٍ :

$$M_\mu N_\mu h'_\mu f = h'_\mu[-x^2 f]$$

الإثبات: من المبرهنة ٢,١١ نحصل على:

$$\begin{aligned} \langle h'_\mu[-x^2 f, \varphi] \rangle &= \langle -x^2 f, h_{\mu,k}\varphi \rangle \\ &= \langle f, (-x^2) h_{\mu,k}\varphi \rangle \\ &= \langle f, h_{\mu,k}(M_\mu N_\mu \varphi) \rangle \\ &= \langle h'_\mu f, M_\mu N_\mu \varphi \rangle \\ &= \langle M_\mu N_\mu h'_\mu f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

المراجع

[1] BANAKH, T and GABRIYELYAN, S 2022-On Free Locally Convex Spaces, Filomat ,36:18 ,6393-6394.

[٢] BEURLING, A 1961- Quasi-analyticity and General Distributions, Lectures 4 and 5. A.M.S. Summer Institute, Stanford.

[3] BJORCK, G 1966-Linear partial differential operators and generalized distributions. Ark Math, 6, 351–407.

[4] KOH, E. L. and LIE, C. K. 1993- The Hankel transformation of Banach-space-valued generalized functions. Proc. Amer. Math. Soc., 119 (1), 153–163.

[5] KOMTSO, H 1973- Ultradistributions, I-structure theorem and a characterization. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, 20, 25–105.

[6] OSBORNE, M.S 2014-Locally Convex Spaces, Spring ,213p.

[٧] PATHAK, R. S. and PANDEY, A. B 1985- On Hankel transforms of Ultradistributions. Applicable Analysis, 20, 245–262.

[٨] PATHAK, R. S. and SHRESTHA, K. K 2001- The Hankel transformation of Geurey ultradistributions, Integral Transform and Special Functions, 11, 61–72.

[٩] ROUMIEU, C (1962–1963). Ultradistributions Defines Sur Rn et sur Certaines Classes de Varieties Differentiables. J. d' Analyse Math., 10, 153–192.

[١٠] TIWARI, A. K 1989- Banach-space-valued distributional Mellin transform and form invariant linear filtering. Indian J. Pure Appl. Math., 20, 403–504.

[١١] UPADHYAY,S.K 2003-The Hankel Transformation of the Banach-Space-Valued Ultradistributions, Integral Transforms and special Functions ,Vol 14,459-467 .

[12] ZEMANIAN, A. H 1968 - Generalized Integral Transformations. Interscience Publishers, New York, 297p.

[١3] ZEMANIAN, A. H 1972. Realizability Theory for Continuous Linear Systems. Academic Press, New York, 227p.