دراسة إحصائية لطيف بيتا لنظير ^{90}Sr

اعداد الطالبة : يارا الزوري

اشراف : د. سليمان ديبو ، د. عبد الله رستناوي

الملخص:

في هذا البحث تمَّ دراسة إحصائية لطيف بيتا لنظير ^{90}Sr التي تتضمن: التفكك النووي هي عملية عشوائية يجب أن تخضع لأحد التوزعات الإحصائية كتوزع (غاوص–بواسون)، بالتالي فإننا افترضنا أن طيف بيتا يجب أن يكون موافق لأحد التوزعات.

تمَّ دراسة مدى تطابق طيف بيتا المذكور مع توزع غاوص مع إجراء عمليتي تنعيم وفي كل مرة كنا نحدد الانحراف المعياري للبيانات التجريبية عن تابع غاوص، فوجدنا أنه كلما كان زمن تركيم (تسجيل) الطيف أطول كلما أصبحت البيانات التجريبية متطابقة بشكل أكبر مع توزع غاوص وهذا يدل على أن عملية تفكك بيتا تخضع لتوزع غاوص بانحراف معياري صغير جداً قدره ($\sigma = 0.017022$).

الكلمات المفتاحية:

التنعيم، طيف بيتا، تابع توزع غاوص.

A statistical study of the beta spectrum of the ^{90}Sr isotope

Abstract:

In this research, a statistical study was made of the beta spectrum of the ^{90}Sr isotope, includes: Since the nuclear disintegration is a random process, it must be subject to one of the statistical distributions such as the (Gauss-Poisson) distribution. Therefore, we assumed that the beta spectrum must It must be compatible with one of the distributions.

The extent to which the mentioned beta spectrum matches the Gaussian distribution was studied by performing two smoothing operations, and each time we determined the standard deviation of the experimental data from the Gaussian function. We found that the longer the time of accumulation (recording) of the spectrum, the more the experimental data became consistent with the Gaussian distribution. It indicates that the beta decay process is subject to a Gaussian distribution with a very small standard deviation.

Keywords:

Smoothing, Beta spectrum, Gaussian distribution function.

1. مقدمة:

إنَّ دراسة أشكال طيوف بيتا تشهد حالياً تجدداً في الاهتمام بدراستها، نظراً لأنه لم تتم دراستها إلا بشكل قليل منذ أواخر السبعينيات. لقد كان يُعتقد في ذلك الوقت بأن ما هو معروف عن أشكال طيوف بيتا هو مقبول. لكن على كل حال، في الوقت الحاضر، لقد أصبح مستخدمو صناعة الطاقة النووية، وقطاع الرعاية الطبية، وقياس الإشعاع المؤين يسعون إلى معرفة أكثر دقة عن أشكال طيوف الطاقية من أجل إزالة الشكوك العالقة التي تعيق الفهم الأصح لأشكال هذه الطيوف وتطبيقاتها.

عند إجراء قياسات على الإشعاع المؤين، غالباً ما تكون هناك حاجة إلى طيوف الطاقية لتفكك بيتا، وخاصةً عندما يتم إجراء تلك القياسات باستخدام العدادات الوميضية السائلة، نظراً لأن نمذجة انبعاث الضوء المستخدمة في تقانة نسبة التزامن الثنائية والثلاثية triple to double coincidence ratio (TDCR)، التي تستخدم لبيان أن هنالك علاقة ما بين مردود الكشف ونسبة التزامن الثنائية والثلاثية TDCR المعينة تجريبياً، تتطلب أن نكون على معرفة جيدة بأشكال طيوف النوكليدات المصدرة لجسيمات بيتا **[1]**.

بسبب تأثير عتبة الكشف، فإن موثوقية تقانة TDCR لكيرينكوف Cerenkov تعتبر هي الأكثر حساسية لتقديم أدق لأشكال طيوف بيتا التجريبية **[2]**.

كما هو الحال في أي علاج باستخدام الإشعاعات المؤينة، فإن معرفة الجرعة التي يتم توصيلها داخل الورم وبقية الجسم، أمر ضروري لضمان فعالية العلاج وسلامته وهي متوقفة على دقة طيف بيتا. وتتعلق إحدى المشكلات بحساب الجرعة المقدمة بالحجم المعني وفقاً لكمية النوكليدات المشعة الموجودة هناك، التي تتم معرفتها من الطيف**[3]**.

تعد المعرفة الدقيقة لأشكال أطياف بيتا، خاصة في الجزء من الطيف ذي الطاقة المنخفضة، ضرورية لحساب الجرعة المودعة على مستوى الخلية في البيولوجيا **[4]**.

وفي الواقع، فإن الإلكترونات ذات الطاقة المنخفضة جداً يكون لها مساهمة كبيرة في الجرعة، لأن انتقال الطاقة الخطي للإلكترونات يزداد بشكل كبير مع انخفاض طاقتها الحركية **[5]**.

2. فرضية البحث:

من حيث الشكل، بما أن طيف بيتا له شكل متزايد ثم متناقص لشدة إشعاع بيتا وبصورة مشابهة إلى حد كبير للتوزعات الإحصائية. وبما أن طيف بيتا يمثل تابعية احتمال أن يمتلك الالكترون طاقة معينة، وبما أن التوزع الإحصائي يمثل تابعية احتمال أن يمتلك الحدث قيمة معينة من مجال التغير العشوائي للحدث، فيمكننا أن نفترض أن تفكك بيتا ما هو إلا تابعية تخضع لتوزع إحصائي لجسيمات بيتا في مجال معين من القيم العشوائية (الطاقات).

3. أهمية البحث وهدفه:

أولاً: معرفة العلاقة التي يخضع له توزع بيتا بهدف تحديد الأسباب الفيزيائية الفعلية للتوزعات الإحصائية عموماً وتوزع الالكترونات خصوصاً.

ثانياً: من ناحية الفائدة العملية والتطبيقية لدراستنا لطيف بيتا، حالياً يجري تطوير العلاج الإشعاعي الموجه بيولوجياً باستخدام النوكليدات المشعة الجديدة المصدرة لبيتا كوسيلة لعلاج السرطان، إلى جانب إنتاج مستحضرات صيدلانية إشعاعية جديدة.

٤. دراسة نظرية

4.1. توزع الغاوسي أو الطبيعي:

هو التوزع الأهم في مجال الإحصاء وإن صيغة هذا التوزيع نشرت لأول مرة بواسطة العالم ابرهام عام (1935) وقد ساهم الكثير من الإحصائيين في تاريخ التوزيع الطبيعي ومن ضمنهم العالم Gauss والذي غالباً ما يدعى التوزيع باسمه Gaussinan dist.

إذا كانت القيمة المتوسطة للتوزع كبيرة (على سبيل المثال، أكبر من 25 أو 30)، فيمكن وبشكل عام استخدام تابع توزع غاوس:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}}} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\bar{x}}\right) \qquad (1)$$

وهي بمثابة دالة توزع نقطي و محدد فقط من أجل القيم الصحيحة لـ x.

الاحتمال المتوقع لمراقبة عدد معين x يُعطى بالشكل التالي:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi.27.4}} \exp\left(-\frac{(x-27.4)^2}{2.\ 27.4}\right) \qquad (2)$$

والانحراف المعياري المتوقع للاحتمال السابق:

$$\sigma = \sqrt{\bar{x}} = \sqrt{27.4} = 5.23 \qquad (3)$$

تمَّ توضيح النتائج بيانياً وفق الشكل (1).

هناك ملاحظتين مهمتين في هذه المرحلة حول التوزع الغاوسي:

- التوزع متناظر حول القيمة المتوسطة: $\bar{x}$. وبالتالي: قيمة الاحتمال $P(x)$ تعتمد فقط على القيمة المطلقة لانحراف أي قيمة x عن المتوسط، والتي تم تعريفها $\epsilon \equiv |x - \bar{x}|$.
- نظرًا لأن القيمة المتوسطة $\bar{x}$ كبيرة، فإن قيم $P(x)$ المجاورة لـ x لا تختلف كثيراً عن بعضها البعض. وبعبارة أخرى، فإن التوزع يتغير بشكل بطيء.

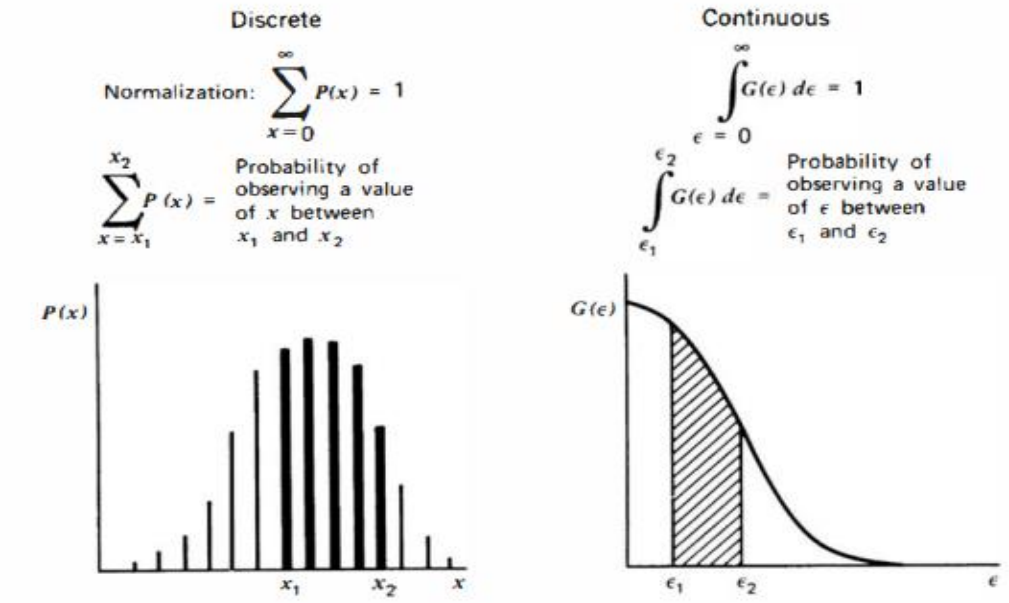
تُشير هاتان الملاحظتان إلى ضرورة إعادة صياغة التوزيع كدالة تتبع بشكل صريح للانحراف ϵ (بدلاً من x) وكدالة مستمرة (بدلاً من دالة منفصلة ذات اتجاه نقطي). يتم إنجاز هذه التغييرات عن طريق إعادة كتابة التوزيع الغاوسي بالشكل:

$$G(\epsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi\bar{x}}}\, e^{-\epsilon^2/2\bar{x}} \qquad (4)$$

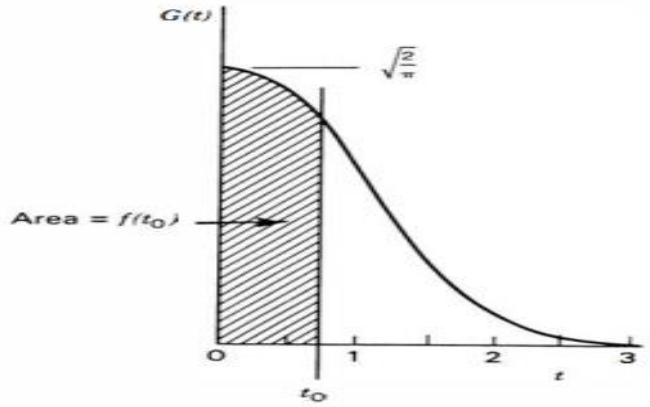
حيث تُمثِّل $G(\epsilon)\, d\epsilon$ الاحتمال التفاضلي لملاحظة انحراف في المجال العنصري $d\epsilon$ حول ϵ .

بمقارنة المعادلة (4) مع المعادلة (1)، نلاحظ وجود العامل 2 الذي دخل في عبارة $G(\epsilon)$ لأن هناك قيمتين لـ x مقابلة لكل قيمة للانحراف ϵ.

ولأننا نتعامل مع دالة مستمرة، يجب علينا إعادة تعريف بعض خصائص التوزع كما هو موضح في الشكل (١). وتجدر الإشارة بشكل خاص إلى أن المقادير ذات الأهمية الفيزيائية تتضمن الآن تكاملات التوزيع بين الحدود المحددة، أو المناطق الواقعة تحت المنحنى، بدلاً من مجموع القيم المنفصلة.



الشكل (١) مقارنة بين الأشكال المنفصلة والمستمرة للتوزع الغاوسي.



الشكل (٢) مخطط عام لمنحني غاوسي

يمكن إعادة صياغة المعادلة (4) بشكل أكثر شمولية من خلال دمج عدة ملاحظات. لقد رأينا بالفعل أنَّ الانحراف المعياري σ للتوزع الغاوسي يُعطى بواسطة $\sigma = \sqrt{\bar{x}}$ أو $\bar{x} = \sigma^2$ بإجراء هذا التعويض في المعادلة (4)، سوف نلاحظ أنَّ قيمة العامل الأسي تعتمد الآن فقط على نسبة E إلى σ. والتي يُمكن تحديدها (النسبة) وفق العلاقة:

$$t \equiv \frac{\epsilon}{\sigma}$$

وبالتالي يُمكن الآن إعادة كتابة تابع التوزع الغاوسي بدلالة المتحول الجديد t كما يلي:

$$G(t) = G(\epsilon)\frac{d\epsilon}{dt} = G(\epsilon)\sigma$$

$$G(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-t^2/2} \qquad (5)$$

حيث $0 \leq t \leq \infty$.

لدينا الآن الشكل المألوف للتوزع الغاوسي، كما هو موضح في الشكل (4)، يكون هذا التوزع صالحاً حول جميع القيم المتوسطة: $\bar{x}$.

النسبة t تُعبِّر عن الانحراف الملاحظ $\epsilon \equiv |x - \bar{x}|$ والتي لها أبعاد الانحراف المعياري σ نفسها.

وفق الشكل (3): فإنَّ احتمال أن يكون الانحراف المعياري النموذجي t المتوقع بواسطة توزع غاوس سيكون أقل من قيمة محددة ابتدائية للنسبة t_0، ويوافق هذا الاحتمال التكامل التالي:

$$\int_0^{t_0} G(t)dt \equiv f(t_0)$$

يمكن إيجاد القيم الموافقة لهذه الدالة التكاملية في العديد من مجموعات الجداول الإحصائية.

تُعطي قيمة $f(t_0)$ احتمال ظهور عينة عشوائية من توزع غاوس ذات انحراف طبيعي بنسبة $t \equiv \epsilon/\sigma$ أقل من القيمة المفترضة (الابتدائية) t_0.

على سبيل المثال: يمكننا أن نستنتج أن حوالي 68% من جميع العينات سوف تنحرف حول القيمة المتوسطة الحقيقية بمقدار واحد صحيح عن قيمة الانحراف المعياري.**[6,7,8,9,10,11]**

4.2. طيوف بيتا:

الإشعاع يقسم الى ثلاثة أنواع أساسية:

أ- جسيمات ألفا (α) موجبة الشحنة (أنوية ذرات الهليوم).

ب- جسيمات بيتا (β^-) (إلكترونات سالبة الشحنة).

ج-أشعة جاما (γ) (أشعة موجية كهرومغناطيسية – فوتونات).

حيث قام بيكرل عام 1900م بقياس نسبة كتلة إلى شحنة جسيمات بيتا فوجد أنها ذاتها عبارة عن إلكترونات صادرة من الأنوية الذرية.

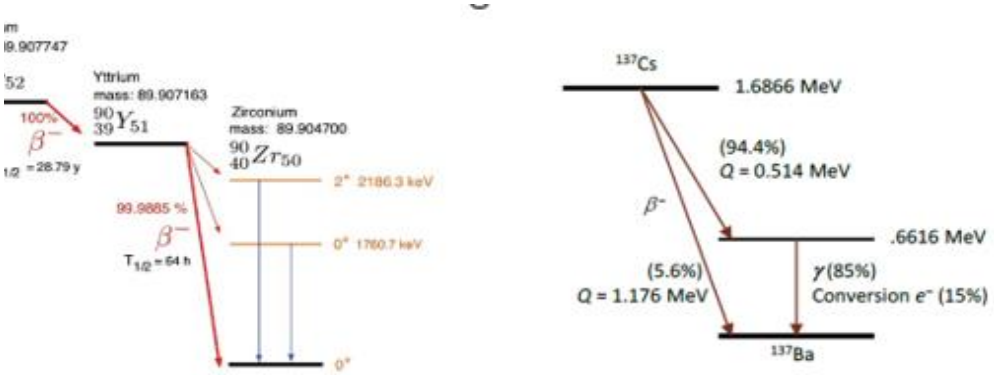
أنواع من انبعاث جسيمات بيتا (β-decay) :

١- انبعاث بيتا + نيوترينو مضاد $\quad {}^1_0n \rightarrow {}^1_1p + {}^0_{-1}\beta + \overline{\nu}$

٢- انبعاث البوزيترون + نيوترينو $\quad {}^1_1p \rightarrow {}^1_0n + {}^0_{+1}\beta + \nu$

٣- الأسر الإلكترونى $_{1}^{1}p + {}_{-1}^{0}e \rightarrow {}_{0}^{1}n$

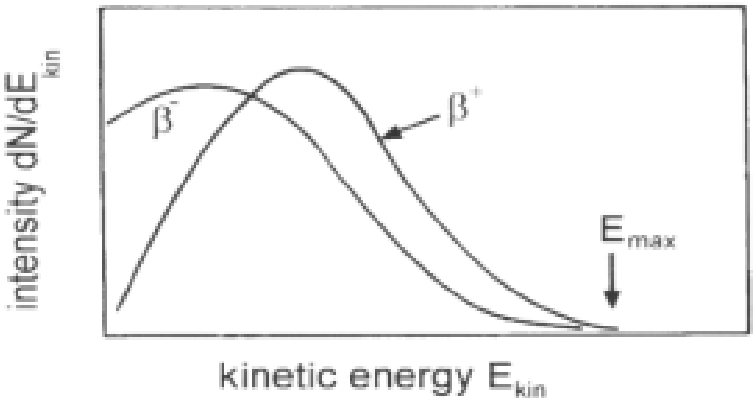
بشكل عام، عندما تتفكك نواة لها رقم كتلة $A = Z + N$ مصدرة لجسيمات بيتا، يكون الناتج إشعاع إلكترون و تكون ذرة ذات نواة لها رقم ذري $z + 1$ وعدد من النيترونات $N - 1$، يطلق على النواة الأولى النواة الأم (parent nuclei) والنواة الناتجة النواة البنت (Daughter nuclei) كما هو موضح على سبيل المثال بالشكل (٣) لنظيري السترانشيوم ^{90}Sr والسيزيوم ^{137}Cs.



الشكل(٣)

كتلة النواة الناتجة (البنت) أكبر بكثير من كتلة جسيم بيتا فإن طاقة الارتداد تكون مهملة (للنواة الناتجة) بناءً عليه نتوقع أن تكون جسيمات بيتا وحيدة الطاقة (خطية) Monoenergetic.

وعند التجارب المخبرية ثبت بدون أي مجال للشك أن جسيمات بيتا تصدر من الأنوية الذرية في صورة أطياف غير خطية ولكنها خطوط مستمرة تشمل مدى واسع من طاقات الحركة، مما استدعى دراسة هذه الظاهرة غير المتوقعة دراسة واسعة حتى تمكن العالم الأمريكى/الإيطالى إنريكو فيرمي من وضع تصور رياضي بارع يفسر هذه الظاهرة مما إستدعى فرضية خروج جسيمات إضافية مصاحبة لجسيمات بيتا.



الطيف المستمر لكل من β^- و β^+

حيث أن انبعاث كل من جسيمات بيتا البوزيترون هي عمليات ثلاثية الجسيمات وبناءً عليه فإن طيف الطاقة لكل من الإلكترونات والبوزيترونات يكون مستمراً.

ولحل الإشكال تمَّ افتراض وجود جسيمات إضافية تشارك في عملية الانبعاث ذاتها، و أطلق عليها " النيوترينو ν او النيترينو المضاد $\overline{\nu}$ " وهذا بدوره ساعد في تحقيق قوانين حفظ كل من الطاقة والدفع (كمية الحركة) والدفع الزاوى و أضافت سلوكاً جديداً حول قانون حفظ عدد اللبتونات. ونقصد بها تلك الجسيمات (المجهولة الطبيعة) حتى وقتنا هذا والتي يطلق عليها مجازاً (الجسيمات الشبحية) أو النيوترينو(neutrino) و النيوترينو المضاد (antineutrino) و التي أقترحها العالم الألماني بولي مسبقا. وقد تم الإستدلال عليها عملياً نتيجة للأشعة المصاحبة لإنفجارات النجوم، على سبيل المثال "المستعر الأعظم 1987 Supernova" في تجربة تعتبر من تجارب الفيزياء الأكثر تشويقاً وكلفة. والتفاعل الآتي يوضح انبعاث جسيم نيوترينو مضاد مصاحباً لإشعاع جسيم بيتا

$$^{A}_{Z}P_N \rightarrow {}_{Z+1}{}^{A}D_{N-1} + {}^{0}_{-1}\beta + \bar{\nu}$$

وليأخذ بعضاً من طاقة حركة جسيمات بيتا تبعاً للعلاقة الآتية، محققة لقانون حفظ الطاقة:

$$m_p c^2 = m_D c^2 + m_e c^2 + Q$$

$$(M_P - ZM_e)c^2 = (M_D - (Z+1)m_e)c^2 + m_e c^2 + Q$$

حيث أن m_p و m_D كتلة النواة الأصل والأبنة على الترتيب، و M_P و M_D الكتل الذرية، و Q المعروفة بالقيمة الفعالة للتفاعل والمعبرة عن طاقة الحركة المتوفرة للنواة البنت والإلكترون والنيوترينو.

$$Q = (M_P - M_D)c^2$$

و العلاقة العملية لانبعاث جسيمات بيتا تعطى بالعلاقة كما أستنتجها العالم فيرمي وكوري **[12,13]**

$$N(E)dE \cong F(Z,E).pE(E-E_0)dE \qquad (6)$$

5. مواد وطرق البحث:

قمنا بدراسة طيف بيتا الطاقي من أجل نظير ^{90}Sr ومطابقته مع تابع توزع غاوص الطبيعي، وتم استخدام برنامج mathcad، لإجراء تنعيم للقيم التجريبية وأهم التعليمات المستخدمة في برنامج mathcad كانت كالتالي:

$\mathrm{DATA} := \mathrm{csort}(\mathrm{data}, 0)$ تعليمة قراءة بيانات الجدول

$\mathrm{X} := \mathrm{Data}^{\langle 0 \rangle}$

$\mathrm{Y} := \mathrm{Data}^{\langle 1 \rangle}$

$\mathrm{sum} := \mathrm{supsmooth}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ تعليمة تنعيم وتدقيق البيانات التجريبية

6.النتائج والمناقشة:

❖ **أولاً:** إن الطيف التجريبي لبيتا المدروس في هذا البحث عبارة عن صورة، لذلك قمنا بإيجاد القيم العددية لطاقة جسيمات بيتا ومعدل العد لها من النقاط البيانية الموافقة في الطيف يدوياً. حيث يمثل محور x قيم الطاقة E مقدرة ب (KeV)،

ويمثل محور y عدد الجسيمات N خلال زمن مقداره $(100sec)$والذي سيتم تحويله لاحقاً إلى القيم الاحتمالية $P(x) \equiv P(E)$.

- من أجل المحور x تم جعل الطيف أكثر شمولية من خلال الانتقال بخطوات طاقية صغيرة، حيث تمَّ إيجاد القيمة العظمى للطاقة $(E_{max} = 2180\text{keV})$ وتقسيمها على العدد الكلي للبيانات $(x = 58)$ فنجد أن عرض البيان يعطى بالشكل $\Delta E = \frac{E_{max}}{x} = \frac{2180}{58} = 37.5\text{keV}$ ونعطي رقم للبيان الأول هو (1) ونكمل أرقام البيانات بشكل متسلسل.
- أما من أجل المحور y الذي تم وصفه بالرمز $P(x)$ حيث $P(x)$ يجب أن يمثل الاحتمال، لكن عملياً نحصل على مقدار يتناسب مع الاحتمال من أجل الحصول على الاحتمالات ونجري عملية توحيد باستخدام العلاقة التالية:

$$P(x) \equiv P(x_i) = \frac{N_i}{N} = \frac{N_i}{\sum_{i=1}^{58} N_i}$$

حيث:

N_i : العد من أجل قيم xفي المجالات المتتالية التي عرض المجال الواحد منها ΔE.

$N = \sum_{i=1}^{58} N_i$: تمثل العد في كامل الطيف.

يوضح الجدول (1) القيم التجريبية لطيف بيتا من أجل نظير ^{90}Sr

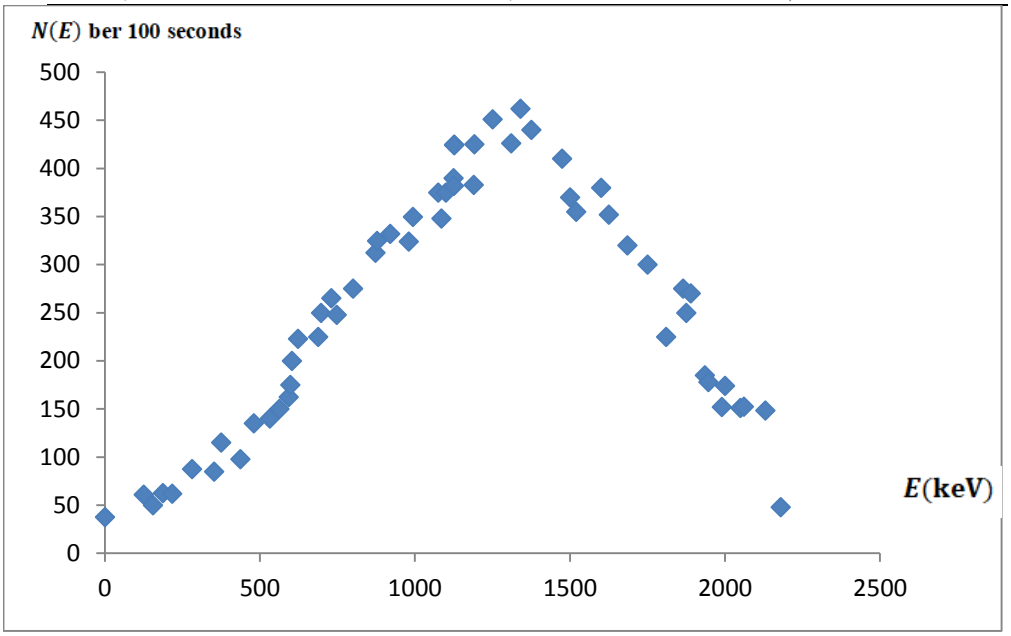
$p(x)$	x	$N(E)$	$E(\text{keV})$
0.002542	1	37.5	0
0.004135	2	61	125
0.003389	3	50	155
0.004237	4	62.5	187.5
0.004203	5	62	217.5
0.005932	6	87.5	281

0.005762	7	85	352
0.007796	8	115	375
0.006643	9	98	437.5
0.009151	10	135	480
0.00949	11	140	531.5
0.010168	12	150	562.5
0.011016	13	162.5	592.5
0.011863	14	175	598
0.013558	15	200	603
0.015117	16	223	623
0.015252	17	225	687.5
0.016947	18	250	697.5
0.017964	19	265	730
0.016812	20	248	748
0.018641919	21	275	800
0.021183999	22	312.5	873
0.022011022	23	324.7	878
0.022505881	24	332	920
0.02196357	25	324	980
0.023705742	26	349.7	993
0.025420799	27	375	1075
0.023590501	28	348	1085
0.025420799	29	375	1100
0.026437631	30	390	1125
0.025895321	31	382	1126
0.028796681	32	424.8	1126.5
0.02874245	33	424	1127
0.025963109	34	383	1190
0.028810239	35	425	1192

0.030572748	36	451	1250
0.028878028	37	426	1310
0.031318424	38	462	1340
0.029827071	39	440	1375
0.027793407	40	410	1475
0.025081855	41	370	1500
0.024065023	42	355	1520
0.025759743	43	380	1600
0.023861657	44	352	1625
0.021692415	45	320	1685
0.020336639	46	300	1750
0.015252479	47	225	1810
0.018655477	48	275.2	1865
0.016947199	49	250	1875
0.018302975	50	270	1890
0.012540927	51	185	1935
0.012066406	52	178	1946
0.010303897	53	152	1990
0.011795251	54	174	2000
0.010236108	55	151	2050
0.010337792	56	152.5	2061
0.010053079	57	148.3	2130
0.003253862	58	48	2180

الجدول (1)

إن التمثيل البياني$N(E)$ بدلالة E في الشكل (٦) هو طيف بيتا لنظير ^{90}Sr حيث أن القيم موجودة في الجدول (١).



الشكل (٤): يمثل طيف بيتا من أجل عنصر ^{90}Sr ويوضح العلاقة بين الطاقة $E(\text{keV})$ وعد الجسيمات N خلال 100 ثانية

مناقشة الشكل (٤):

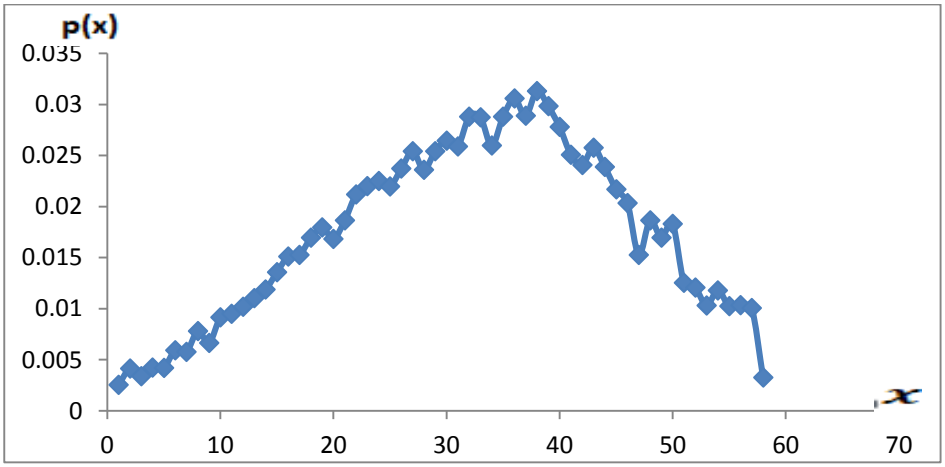
بناء على فرضيتنا بأن توزع الطيف المبين بالشكل (6) ناتج عن عملية تفكك عشوائية إحصائية فيمكننا تفسيره فيزيائياً كما يلي:

بما أن جسيم بيتا يصدر عن نترون مرتبط بالنواة، والنواة مرتبطة بذرتها، والذرة مرتبطة بالجسم الصلب في موضع معين بالشبكة البلورية. وبما أن الذرة بكاملها تتحرك في الفراغ بحركة اهتزازية عشوائية حرارية حول موضع توازن ما. وبما أن عملية إصدار جسيمة بيتا يمكن أن تكون بأي اتجاه ممكن في الفراغ فيمكن أن تكون جهة إصدار الالكترون أو جسيم بيتا إما متفقة مع جهة حركة الذرة أو مختلفة عنها وبصورة عامة يمكن أن يكون متجه الدفع للإلكترون يشكل زاوية ما مع متجه الدفع للذرة يمكن أن تتراوح بين

$(-\pi/2\ ,+\pi/2)$ ولذلك فإن دفع الالكترون سيكون تابعاً ما للزاوية ولدفع الذرة ولهذا فإن طاقة الالكترون يمكن أن تتراوح بين الصفر وقيمة عظمى ما.

- في أثناء الحركة الاهتزازية للنواة (الذرة) في الشبكة البلورية يكون تسارع النواة أعظمياً عند $(-\pi/2\ ,+\pi/2)$ وأصغرياً عند الصفر وبالتالي إذا ما قسمنا مجال الاهتزاز إلى مجالات متساوية قيمة كل منها dx فإن احتمال وجود النواة في المجالات المجاورة للتسارع صفر يكون أصغر من التي تليها وذلك لأن الزمن الذي تستغرقه في جوار التسارع صفر يكون أصغر ويكون احتمال وجود النواة عندما يكون التسارع أعظمي كبير لأن الزمن الذي تستغرقه في جوار التسارع الأعظمي أكبر. وكلما كان الزمن المستغرق لقطع المجال dx أكبر كان عدد الالكترونات المنبعثة خلال هذا المجال أكبر وهذا ما يفسر لنا السبب الفيزيائي لشكل طيف بيتا صعوداً ونزولاً، فعند الطاقة 0 والطاقة العظمى توافق احتمال انبعاث أصغري للالكترون، بينما عندما تكون طاقة بيتا وسطى بين القيمتين تقريباً فيكون احتمال انبعاث الالكترون أعظمي.

يبين الشكل (٧) التمثيل الاحتمالي لطيف بيتا من أجل نظير ^{90}Sr وفق البيانات الموجودة في الجدول (١)



الشكل (٥) يمثل طيف بيتا من أجل عنصر ^{90}Sr ويوضح تابعية الاحتمال $P(x)$ بدلالة الطاقة $x \equiv E$ بيانياً حيث المساحة الواقعة تحت المنحني البياني تساوي الواحد

نلاحظ من الشكل السابق: أن الاحتمال $P(x)$ يزداد بشكل خطي تقريباً ليصل إلى قيمة عظمى هي (0.031) تقابل قيمة طاقية (1340keV)، ثم يتابع بسلوك معاكس بعد هذه القيمة العظمى ليتناقص حتى يصل إلى قيمة (٠,٠٠٣٢) تقابل قيمة طاقية (2180keV).

❖ **ثانياً معالجة طيف بيتا من أجل نظير ^{90}Sr :**

- تم إجراء مطابقة بين البيانات التجريبية وتوزع غاوص المعطى بالعلاقة الاتية:

$Y = A.e^{-\left(\frac{(x-B)^2}{2c^2}\right)}$، ثم تم الحصول على البيانات الموضحة بالجدول (2)

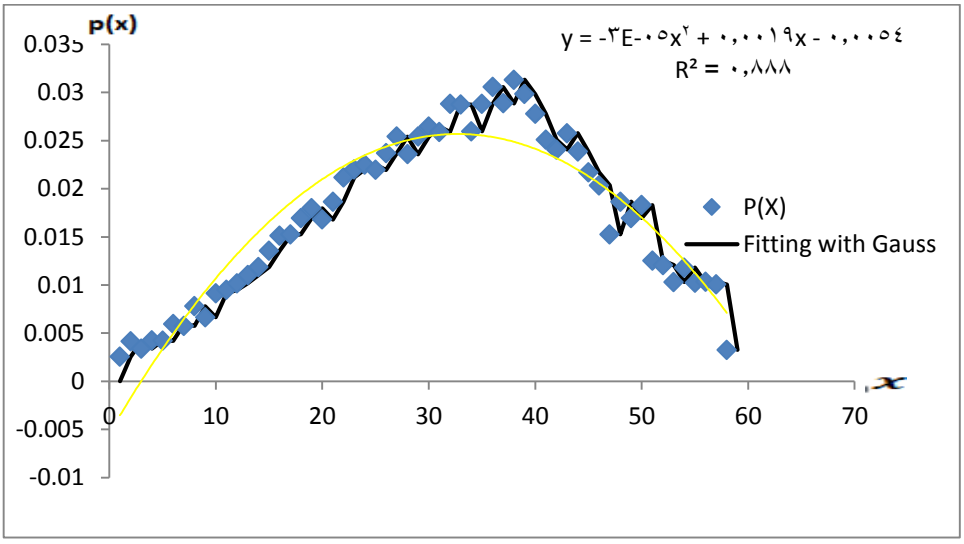
x	$p(x)$	Fitting with Gauss
1	0.002542	0.067667642
2	0.004135	0.00042194
3	0.003389	5.71034E-05
4	0.004237	7.7281E-06
5	0.004203	1.04588E-06
6	0.005932	1.41545E-07
7	0.005762	1.9156E-08
8	0.007796	2.59249E-09
9	0.006643	3.50855E-10
10	0.009151	4.74831E-11
11	0.00949	6.42614E-12
12	0.010168	8.69683E-13
13	0.011016	1.17699E-13
14	0.011863	1.59288E-14
15	0.013558	2.15573E-15
16	0.015117	2.91746E-16
17	0.015252	3.94836E-17
18	0.016947	5.34352E-18
19	0.017964	7.23167E-19

9.787E-20	**0.016812**	**20**
1.32453E-20	**0.018642**	**21**
1.79255E-21	**0.021184**	**22**
2.42595E-22	**0.022011**	**23**
3.28317E-23	**0.022506**	**24**
4.44329E-24	**0.021964**	**25**
6.01334E-25	**0.023706**	**26**
8.13817E-26	**0.025421**	**27**
1.10138E-26	**0.023591**	**28**
1.49056E-27	**0.025421**	**29**
2.01725E-28	0.026438	**30**
2.73005E-29	0.025895	**31**
3.69472E-30	0.028797	**32**
5.00026E-31	0.028742	**33**
6.76712E-32	0.025963	**34**
9.1583E-33	0.02881	**35**
1.23944E-33	0.030573	**36**
1.6774E-34	0.028878	**37**
2.27012E-35	0.031318	**38**
3.07227E-36	0.029827	**39**
4.15786E-37	0.027793	**40**
5.62706E-38	0.025082	**41**
7.61539E-39	0.024065	**42**
1.03063E-39	0.02576	**43**
1.39481E-40	0.023862	**44**
1.88767E-41	0.021692	**45**
2.55468E-42	0.020337	**46**
3.45738E-43	0.015252	**47**
4.67906E-44	0.018655	**48**
6.33242E-45	0.016947	**49**
8.56999E-46	0.018303	**50**
1.15982E-46	0.012541	**51**
1.56965E-47	0.012066	**52**
2.12429E-48	0.010304	**53**

54	0.011795	2.87491E-49
55	0.010236	3.89077E-50
56	0.010338	5.26559E-51
57	0.010053	7.1262E-52
58	0.003254	9.64426E-53

الجدول (2)

التمثيل البياني للقيم السابقة كان وفق التالي:



الشكل (٦): طيف بيتا التجريبي لنظير ^{90}Sr مع مطابقة لتوزع غاوص وفق القيم قبل عملية التنعيم.

نلاحظ من الشكل السابق:

- أن الانحراف المعياري للبيانات التجريبية عن تابع غاوص كان $\sigma =$ 0.018312.
- النقاط الموضحة بالشكل ذو اللون الأزرق تمثّل البيانات التجريبية قبل إجراء أي تنعيم لها.
- الخط البياني باللون الأسود يمثل الطيف الناتج عن المطابقة بين البيانات التجريبية قبل مطابقتها مع تابع توزع غاوص.

❖ **الخط البياني باللون الأصفر يمثِّل طيف متعدد الحدود تم من خلاله حساب معامل التباين الذي كانت قيمته $R^2 = 0.888$، ونلاحظ أن هذه القيمة ليست متقاربة بشكل كاف من 1 فهذا يُشير إلى توافق غير كافٍ، وُعزى سبب هذا التباين لعدم إجراء التنعيم للبيانات ومطابقتها مع القيم التجريبية.**

ثالثاً: قمنا بتنعيم البيانات التجريبية باستخدام برنامج ماثكاد (Mathcqd) مرة واحدة وتمت مطابقة البيانات المنعمة مع توزع غاوص، كما هو موضح في الجدول (3)

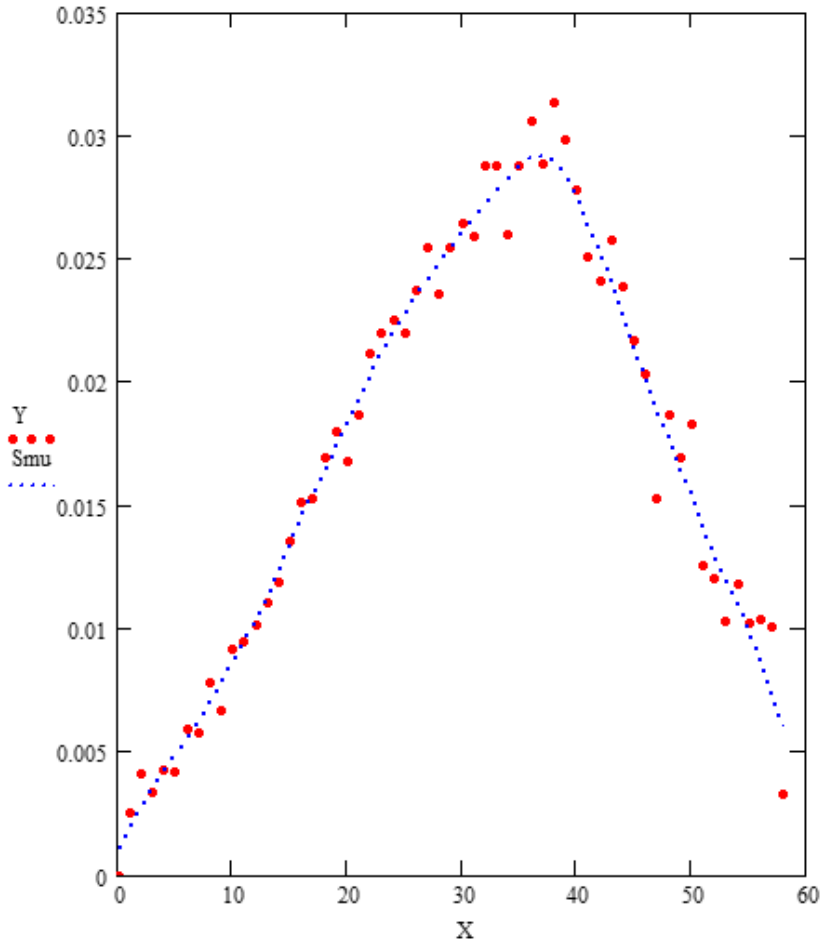
Fitting with Gauss	Smooth $p(x)$	x
0.001361068	0.00106552	1
0.000184201	0.00191935	2
2.49288E-05	0.00277318	3
3.37375E-06	0.00351482	4
4.56587E-07	0.00424632	5
6.17924E-08	0.00488764	6
8.36269E-09	0.00555876	7
1.13177E-09	0.0062366	8
1.53168E-10	0.0070256	9
2.0729E-11	0.00776712	10
2.80537E-12	0.0086212	11
3.79666E-13	0.00945364	12
5.13821E-14	0.01036884	13
6.95382E-15	0.01131116	14
9.41097E-16	0.01236192	15
1.27364E-16	0.01344792	16
1.72368E-17	0.0144878	17
2.33275E-18	0.0154436	18

19	0.01643332	3.15703E-19
20	0.01738836	4.27257E-20
21	0.01828104	5.7823E-21
22	0.01924964	7.82549E-22
23	0.0202798	1.05906E-22
24	0.02124216	1.43329E-23
25	0.02206516	1.93975E-24
26	0.02282308	2.62516E-25
27	0.02355388	3.55277E-26
28	0.02416968	4.80815E-27
29	0.02475104	6.50712E-28
30	0.02547524	8.80643E-29
31	0.02610452	1.19182E-29
32	0.02664972	1.61295E-30
33	0.02729448	2.1829E-31
34	0.02780744	2.95423E-32
35	0.0282174	3.99811E-33
36	0.02876024	5.41086E-34
37	0.02916752	7.3228E-35
38	0.02916804	9.91033E-36
39	0.0289728	1.34122E-36
40	0.0284522	1.81514E-37
41	0.02753844	2.45653E-38
42	0.02642132	3.32455E-39
43	0.02533404	4.49928E-40
44	0.02408676	6.08912E-41

8.24072E-42	0.0227776	45
1.11526E-42	0.02143044	46
1.50934E-43	0.02019176	47
2.04267E-44	0.01883104	48
2.76446E-45	0.0176954	49
3.74128E-46	0.01650992	50
5.06328E-47	0.01539496	51
6.8524E-48	0.01409288	52
9.27371E-49	0.01301452	53
1.25506E-49	0.01198308	54
1.69854E-50	0.01100368	55
2.29872E-51	0.00988506	56
3.11098E-52	0.00874382	57
4.21026E-53	0.00737705	58

الجدول(3)

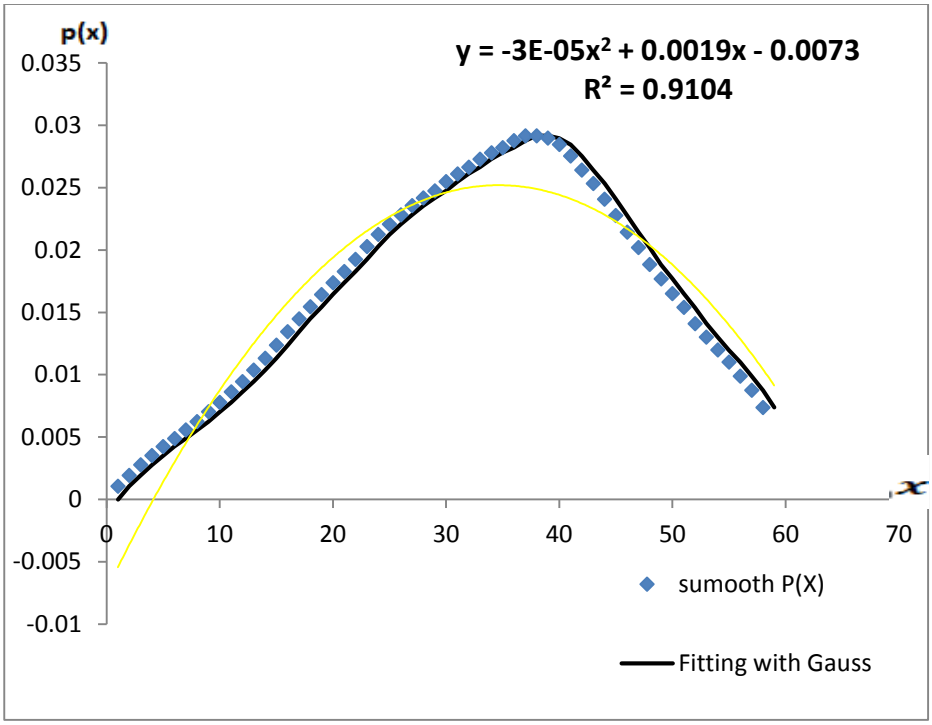
التمثيل البياني للبيانات المنعمة مرة واحدة باستخدام برنامج mathcad كان وفق الشكل التالي:



الشكل (٧): الطيف التجريبي من أجل أشعة بيتا الصادرة عن نظير ^{90}Sr المنعم مرة واحدة.

نلاحظ من الشكل:

- النقاط الدائرية الحمراء تمثل البيانات التجريبية لطيف أشعة بيتا من أجل نظير ^{90}Sr.
- أما النقاط الزرقاء شبه المتصلة تمثل البيانات التجريبية التي تم تنعيمها للمرة الأولى وفق برنامج ماثكاد(Mathcad).



الشكل (٨): طيف بيتا التجريبي لنظير ^{90}Sr مع محاكاة لتوزع غاوص وفق قيم منعمة للمرة الأولى

نلاحظ من الشكل السابق:

- أن الانحراف المعياري للبيانات التجريبية المنعمة للمرة الأولى عن تابع غاوص كان $\sigma = 0.017036$.
- النقاط الزرقاء تمثل نقاط بيانية تجريبية تم تنعيمها للمرة الأولى.
- المنحني البياني باللون الأسود يمثل طيف المطابقة بين البيانات التجريبية المنعمة مرة واحدة وتوزع غاوص.
- **المنحني البياني باللون الأصفر بمثل طيف متعدد الحدود تم من خلاله حساب معامل التباين الذي كانت قيمته $R^2 = 0.9104$، ونلاحظ أن هذه**

القيمة قريبة من الواحد وهذا يدل أن الدقة في المطابقة تمت بعد تنعيم البيانات.

❖ **رابعاً:** قمنا بتنعيم البيانات التجريبية باستخدام برنامج ماثكاد (Mathcqd) مرة ثانية وتمت مطابقة البيانات المنعمة مع توزع غاوص، كما هو موضح في الجدول (4):

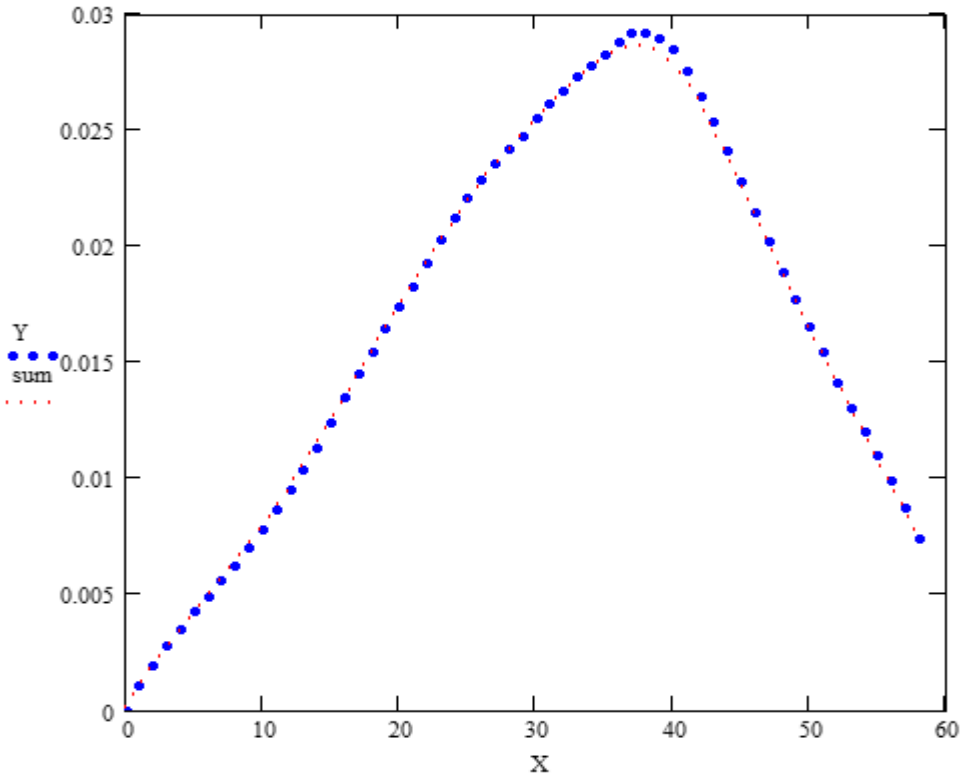
Fitting with Gauss	Smooth $p(x)$	x
0.000761	0.001066	1
0.000103	0.001919	2
1.39E-05	0.002773	3
1.89E-06	0.003515	4
2.55E-07	0.004246	5
3.45E-08	0.004888	6
4.67E-09	0.005559	7
6.33E-10	0.006237	8
8.56E-11	0.007026	9
1.16E-11	0.007767	10
1.57E-12	0.008621	11
2.12E-13	0.009454	12
2.87E-14	0.010369	13
3.89E-15	0.011311	14
5.26E-16	0.012362	15
7.12E-17	0.013448	16
9.63E-18	0.014488	17
1.3E-18	0.015444	18
1.76E-19	0.016433	19
2.39E-20	0.017388	20
3.23E-21	0.018281	21

4.37E-22	0.01925	22
5.92E-23	0.02028	23
8.01E-24	0.021242	24
1.08E-24	0.022065	25
1.47E-25	0.022823	26
1.99E-26	0.023554	27
2.69E-27	0.02417	28
3.64E-28	0.024751	29
4.92E-29	0.025475	30
6.66E-30	0.026105	31
9.01E-31	0.02665	32
1.22E-31	0.027294	33
1.65E-32	0.027807	34
2.23E-33	0.028217	35
3.02E-34	0.02876	36
4.09E-35	0.029168	37
5.54E-36	0.029168	38
7.5E-37	0.028973	39
1.01E-37	0.028452	40
1.37E-38	0.027538	41
1.86E-39	0.026421	42
2.51E-40	0.025334	43
3.4E-41	0.024087	44
4.61E-42	0.022778	45
6.23E-43	0.02143	46
8.44E-44	0.020192	47
1.14E-44	0.018831	48
1.54E-45	0.017695	49
2.09E-46	0.01651	50

51	0.015395	2.83E-47
52	0.014093	3.83E-48
53	0.013015	5.18E-49
54	0.011983	7.01E-50
55	0.011004	9.49E-51
56	0.009885	1.28E-51
57	0.008744	1.74E-52
58	0.007377	2.35E-53

الجدول(4)

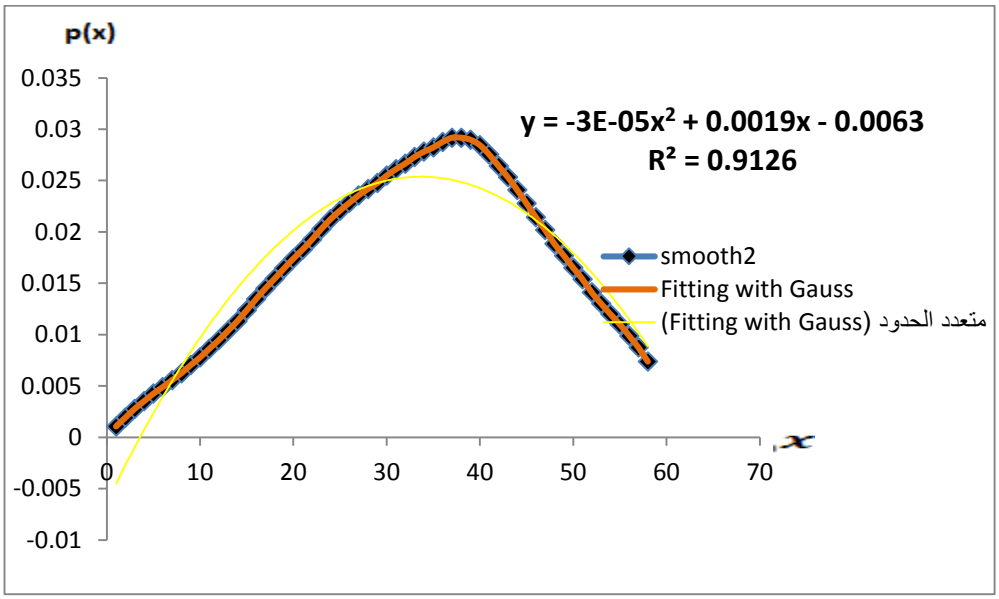
التمثيل البياني للبيانات المنعمة مرتين باستخدام برنامج mathcad كان وفق الشكل التالي:



الشكل (٩): الطيف التجريبي من أجل أشعة بيتا الصادرة عن نظير ^{90}Sr المنعم مرة ثانية.

في الشكل السابق نلاحظ:

- النقاط الحمراء تمثل البيانات التجريبية المنعمة للمرة الأولى من أجل طيف أشعة بيتا لنظير ^{90}Sr.
- أما النقاط الزرقاء شبه المتصلة تمثل البيانات التجريبية التي تم تنعيمها للمرة الثانية وفق برنامج ماثكاد(Mathcad).



الشكل (١٠): طيف بيتا التجريبي لنظير ^{90}Sr مع محاكاة لتوزع غاوص وفق قيم منعمة للمرة الثانية.

نلاحظ من الشكل السابق:

- أن الانحراف المعياري للبيانات التجريبية المنعمة للمرة الثانية عن تابع غاوص كان $\sigma = 0.017022$.
- المنحني البياني باللون الأسود يمثل البيانات التجريبية التي تم تنعيمها للمرة الثانية.

- المنحني البياني باللون البرتقالي يمثل طيف المطابقة بين البيانات التجريبية المنعمة مرتين وتوزع غاوص.
- المنحني البياني باللون الأصفر يمثل طيف متعدد الحدود تم من خلاله حساب معامل التباين الذي كانت قيمته $R^2 = 0.9126$، ونلاحظ أن هذه القيمة أقرب من القيمة 1 فهذا يدل أن الدقة الأكبر في المطابقة تمت بعد تنعيم البيانات مرتين.

٧. الاستنتاجات والتوصيات:

بعد إجراء عملية دراسة إحصائية لطيف بيتا الصادر عن نظير ^{90}sr تمَّ التوصل لكل مما يلي:

١. كلما كان زمن تركيم الطيف أطول كلما أصبحت البيانات التجريبية متطابقة بشكل أكبر مع توزع غاوص.
٢. عملية تفكك بيتا تخضع لتوزع غاوص بانحراف معياري صغير جداً.
٣. عند دراسة تابعية الاحتمال $P(x)$ بدلالة الطاقة $x \equiv E$ بيانياً، وجدنا أنه ذا سلوك خطي تقريباً حيث يزداد حتى يصل إلى قيمة عظمى 1340KeVليتناقص وصولاً للقيمة 2180KeV.
٤. عند إجراء عملية المطابقة والمحاكاة مع القيم التجريبية (دون تنعيم) لطيف بيتا الصادر عن نظير ^{90}sr، لاحظنا وجود بعض الانحرافات والشذوذ عن القيم التجريبية وبالتالي لم نحصل على أفضل تطابق.
٥. عند إجراء عملية التنعيم لمرة واحدة باستخدام برنامج (Mathcqd) من أجل طيف بيتا الصادر عن نظير ^{90}sr، حصلنا على توافق أفضل من ذلك المحسوب دون عملية تنعيم.

٦. بعد إجراء عملية التنعيم للمرة الثانية باستخدام برنامج (Mathcqd) من أجل طيف بيتا الصادر عن نظير ^{90}sr، حصلنا على تطابق تام تقريباً مع تابع توزع غاوس الطبيعي الممثل تجريباً، حيث لم نلاحظ وجود أي انحرافات أو شذوذ في سلوك الخط البياني.

٧. توصلنا إلى معادلة نستطيع من خلالها حساب المقدار $p(x)$ بدلالة $x \equiv E$ من أجل كل خطوة طاقية:

$$p(x) = -3e^{-5E^2} + 0.0019\,E - 0.0063$$

دون الحاجة لإجراء عملية تنعيم، وكانت القيم المحسوبة وفق هذه المعادلة مطابقة للقيم التجريبية.

٨. المراجع:

[1] Broda R. *et al.* (2007) Radionuclide metrology using liquid scintillation counting, *Metrologia* **44**, S36-S52.

[2] Bobin C. *et al.* (2010) Application of a stochastic TDCR model based on Geant4 for Cherenkov primary measurements, *Appl. Radiat. Isotopes* **68**, 2366-2371.

[3] Boswell C.A., Brechbiel M.W. (2007) Development of Radioimmunotherapeutic and Diagnostic Antibodies: An Inside-Out View, *Nucl. Med. Biol.* **34**, 757-778.

[4] BardièsM., Chatal J.-F. (٢٠٠٢) Absorbed doses for internal radiotherapy from 22 beta-emitting radionuclides: beta dosimetry of small spheres, *Phys. Med. Biol.* **39**, 961-981.

[5] Kassis A.I. (2004) The amazing world of auger electrons, *Int. J. Radiat. Biol.* **80**, 789-803.

[6] L R. D. Evans, *The Atomic Nucleus*, Krieger, New York, 1982, Chaps. 26-28.

[7] W. Feller, An *Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 2nd ed., Wiley, New York, 1957.

[8] P. R. Bevington, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw-Hill, New York, 1969.

[9] L. A. Currie, *Anal. Chem*. **40(**3), 586 (1968).

[10] "Particle Counting in Radioactivity Measurements," ICRU Report 52, ICRU, Bethesda (٢٠٠٦).

[11] J. W. Miiller, *Nucl*. *Instrum*. *Meth*. **A309**, 555 (1991).

[12] Singh, A., Mougeot, X., Sabot, B., Lacour, D., & Nourreddine, A. M. (2020). Experimental study of β spectra using Si detectors. In *EPJ Web of Conferences* (Vol. 239, p. 02001). EDP Sciences.

[13] Alton, T. T., Monk, S. D., & Cheneler, D. (2017). Beta particle energy spectra shift due to self-attenuation effects in environmental sources. *Nuclear Engineering and Technology*, *49*(7), 1483-1488.