الحساب التقريبي للتكاملات المضاعفة للدوال العقدية بطريقة النواة المولدة

د. حامد عباس–أستاذ مساعد في قسم الرياضيات –كلية العلوم – جامعة حمص

ملخص البحث:

يهتم هذا البحث بدراسة التكاملات المضاعفة التقريبية للدوال العقدية في المنطقة التكاملية $\Omega=[0\ ,\ 2\pi]^n$ من الفضاء R^n ، ودالة الوزن $\omega(x)=1$. صيغة النواة المولدة للدوال العقدية من الشكل:

$$K_m(u\ ,\ z):=\sum_{j=0}^{m}\overline{F_j(u)}.F_j(z)$$

حيث إن $z=\exp(ix)$ و $\{F_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ كثيرات حدود متعامدة نظامية في المنطقة Ω.

أوجدنا علاقة تكعيبية من أجل تكاملات الدوال العقدية المثلثية، وهي صحيحة تماما من أجل كل كثيرة حدود عقدية دقتها تساوي 3، بالشكل:

$$\frac{1}{[2\pi]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)dxdy \cong \frac{1}{8}[f(0,0)+f(\pi,\pi)]+$$
$$+\frac{1}{8}[f(\pi/2,3\pi/2)+f(3\pi/2,\pi/2)]+\frac{1}{8}[f(\pi/4,3\pi/4)$$
$$+f(3\pi/4,\pi/4)+f(5\pi/4,7\pi/4)+f(7\pi/4,5\pi/4)]$$

ثوابت هذه العلاقة التكعيبية تساوي:

$$A=1/8$$

عدد عقد (نقاط) هذه العلاقة التقريبية يساوي 8 مع بعض التطبيقات العددية.

الكلمات المفتاحية: العلاقات التكعيبية، الدوال المتعامدة، التكاملات المضاعفة التقريبية.

The approximate calculation of multi integrals for the complex functions by method reproducing kernel

D.Hamed abbas – Homs university – Science faculty- Math department .

Abstract

The research consists of study approximate multi integrals of the complex functions in the region integrals $\Omega = [0\ ,\ 2\pi]^n$ in the space R^n, and weight function $\omega(x) = 1$. reproducing kernel formula is:

$$K_m(u\ ,\ z) := \sum_{j=0}^{m} \overline{F_j(u)}.F_j(z)$$

Where: $z = \exp(ix)$, and $\{F_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ orthogonal and normal polynomials in Ω. We find new cubature formulae for calculate multi integral for the complex functions, and constructed the cubature formulae for are obtained, which have the algebraic degree of exactness 3:

$$\frac{1}{[2\pi]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)dxdy \cong \frac{1}{8}[f(0,0)+f(\pi,\pi)]+$$

$$+\frac{1}{8}[f(\pi/2,3\pi/2)+f(3\pi/2,\pi/2)]+\frac{1}{8}[f(\pi/4,3\pi/4)$$

$$+f(3\pi/4,\pi/4)+f(5\pi/4,7\pi/4)+f(7\pi/4,5\pi/4)]$$

Coefficients this cubature formulae:

$$A = 1/8$$

number of the nodes 8, and some numerical examples.

.

key words: cubature formulae, orthogonal polynomials, approximate calculation multi integrals

مقدمة البحث:

درس عدد كبير من العلماء الحساب التقريبي للتكاملات المضاعفة للدوال ذات المتحولات العقدية بطرائق تقريبية متعددة منهم I.P.Mysovskikh و Moller.H.M. R. و Cools و Noskov.V.M وغيرهم. تعتمد طريقة النواة المولدة لتشكيل العلاقات التكعيبية على كثيرات الحدود المتعامدة النظامية. لقد درس بعض الباحثين التكاملات المضاعفة للدوال المثلثية بطرائق تقريبية أخرى، مثل طريقة الوسطاء غير المحددة [2,7]، وبالطرائق التحليلية[6] وفي مناطق بسيطة. أوجد Noskov . M.V [2] كثيرات حدود متعامدة نظامية انطلاقا من أسرة الدوال المستقلة خطياً التالية :

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x.\cos 2x, \ldots\ldots$$

وأوجد العلاقات التكعيبية الموافقة، والمبرهنات المتعلقة بها، وحسب التكاملات التقريبية للدوال المثلثية ، والتي يمكن استخدامها للتكاملات العقدية.

هدف البحث وطريقته:

يهدف هذا البحث لإيجاد العلاقات التقريبية لحساب التكاملات المضاعفة للدوال العقدية $f(z)$ و $z = \exp(ix)$ باستخدام طريقة النواة المولدة ، والتي يكون من الصعب حسابها بالطرائق التحليلية، أو التي تعطى بشكل جدولي. نشير إلى أنه تم في[2, 7]حساب التكاملات المضاعفة للدوال المثلثية بطرائق أخرى، بطريقة الوسطاء غير المعينة وغيرها.

مشكلة البحث:

حساب التكاملات المضاعفة للدوال العقدية من الشكل $f(z)$ ، حيث إن $f(x) = exp(ig(x)) = \cos g(x) + i \sin g(x)$ و $g(x)$ كثيرة حدود خطية أو غير خطية والدوال المثلثية أيضاً باستخدام طريقة النواة المولدة، والتي يصعب حسابها بالطريقة التحليلية، وإيجاد العلاقات التقريبية التكاملية، والتي من خلالها يمكن حساب أي تكامل من الشكل:

$$I(f)=\int_{\Omega}\omega(x).f(x)dx$$

$\omega(x)$ دالة الوزن ، و $\boldsymbol{i}=\sqrt{-1}$ العدد التخيلي، x نقطة في الفضاء R^n .

النتائج ومناقشتها:

١-مفاهيم أساسية

تعريف: الدالة العقدية هي الدالة ذات المتحولات العقدية $z_1,z_2,....,z_n$ ، والتي يكتب كل حد فيها بالشكل الأسي التالي:

$$\exp(i\,(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+....+\alpha_bx_n)) \qquad (١)$$

حيث إن: $\alpha_1\,,\,\alpha_2,..,\,\alpha_b$ أعداد صحيحة، والعدد:

$$|\alpha_1|+|\alpha_2|+...+|\alpha_n|=\mathrm{m}$$

الحدود من الشكل (1) تشكل قاعدة للفضاء المتجهي τ_n لكثيرات الحدود العقدية التي درجتها لا تتجاوز n.من أجل m=0، فإن عدد حلول المعادلة السابقة يساوي الواحد. نرمز بـ $\tau(n,m)$ لعدد الحدود من الشكل (1) ، والتي درجتها تساوي m، أي أن:[7]

$$\tau(n,m)=\sum_{s=1}^{n}C_n^SC_{m-1}^{S-1}.2^S$$

حيث إن:

$$C_n^S=\begin{cases}\dfrac{n!}{s!\,(n-s)!} & ,\quad n\geq s\\ 0 & ,\quad n<s\end{cases}$$

$$\tau(n,0)=1$$

بحالات خاصة نجد إن:

$$\tau(n,1)=2n\ ,\ \tau(n,2)=2n^2\ ,\tau(n,3)=\frac{2}{3}n(2n^2+1)$$
$$\tau(1,m)=2\ \ ,\ \tau(2,m)=4m\ ,\ \tau(3,m)=4m^2+2$$

نرمز لعدد كل الحدود المثلثية بـ n من المتغيرات، والتي درجتها لا تتجاوز m بالرمز $t(n,m)$ ، ويساوي:

$$t(n,m)=1+\sum_{k=1}^{m}\tau(n,k)$$

نحصل على:

$$t(n,m)=\sum_{s=0}^{n}C_n^S C_m^S.2^S \qquad (2)$$

نرمز بـ τ_n لفضاء كثيرات الحدود المثلثية ، فيكون:

$$t(n,m)=\dim\ \tau_n$$

نلاحظ أنه تتحقق المساواة التالية:

$$t(n,m)=t(m,n)$$

مبرهنة١: [1]

بفرض أن Ω منطقة في الفضاء R^n تحوي نقاط داخلية ، وبفرض أن $\omega(x)$ دالة وزن غير سالبة من أجل $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ ، بحيث تكون التكاملات التالية موجودة:

$$\int_{\Omega}\omega(x).\exp(i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+....+\alpha_bx_n))dx$$

وكذلك الأمر نفرض أن : $\int_{\Omega}\omega(x)dx>0$ ، توجد علاقة تكعيبية بالشكل التالي:

$$\int_{\Omega} \omega(x).f\ (x)dx \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f\ (x^{(j)}) \qquad (3)$$

صحيحة من أجل كل كثيرات الحدود المثلثية ، التي درجتها لا تتجاوز m ونقاطها $x^{(j)}$ ضمن المنطقة Ω ، وعدد تلك النقاط يساوي $N = t(n,m)$.

مبرهنة٢ :[1]

بفرض أن Ω تحوي نقاط داخلية ، وبفرض أن $\omega(x)$ تحقق الشرط: $\omega(x) \geq 0\ ,\ \forall x \in \Omega \Rightarrow \int_{\theta} \omega(x)dx > 0$ ، والعلاقة التكعيبية(3) بـ N من النقاط تملك دقة جبرية m ، عند ذلك عدد النقاط N يحقق المتراجحة الآتية:

$$N \geq t(n,k) \quad , \quad k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \qquad (4)$$

الرمز $k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ يعني القسم الصحيح من الكسر $\frac{m}{2}$.

مبرهنة٣ :[2]

إذا كانت $\Omega = [0\ ,\ 2\pi]^n$ مكعب في الفضاء R^n ، وبفرض أن $\omega(x) = 1$ العلاقة التقريبية (4) صحيحة تماماً من أجل كل كثيرات الحدود المثلثية ، التي درجتها لا تتجاوز $2k+1$ ، عند ذلك عدد نقاط تلك العلاقة التقريبية N يحقق المتراجحة الآتية:

$$N \geq t(k+1,n) \qquad (5)$$

تعود هذه المبرهنة لـ Noskov . M.V [2]،إثبات هذه المبرهنات موجود في [3 , 2].

مبرهنة ٤ : [5]

تقع جذور كثيرة الحدود $K_n(\alpha\ ,\ z)$ من أجل $|\alpha|<1$ في المنطقة $|z|>1$ ، ومن أجل $|\alpha|>1$ داخل المنطقة$|z|<1$ ، اما من أجل $|\alpha|=1$ على محيط القرص الدائري $|z|=1$.

٢- النواة المولدة للدوال العقدية [4]: يمكن استخدام طريقة النواة المولدة لتشكيل العلاقات التقريبية والصحيحة من أجل كثيرات الحدود العقدية. نشكل العلاقات التقريبية الصحيحة من أجل كثيرات الحدود العقدية، كما في التكامل التالي[7]:

$$I(f);=\frac{1}{mess\Omega}\int_{\Omega}\omega(x)\,f(x)dx \quad , \qquad x=(x_1,x_2,...x_n)\ ,\ dx=dx_1.dx_2...dx_n \tag{5}$$

حيث إن $mess\Omega$ هو قياس المنطقة Ω ، أي:

$$I_1(f\ );=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(x)f\ (x)dx \tag{6}$$

في حالة التكامل الثنائي على المنطقة $[0\ ,\ 2\pi]^2$ ودالة الوزن $\omega(x,y)$ يصبح التكامل بالشكل التالي:

$$I_2(f);=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[0\ 2\pi]^2}\omega(x,y)\,f(x,y)dxdy \tag{7}$$

في حالة التكامل على المنطقة $[0\ ,\ 2\pi]^n$ ودالة الوزن $\omega(x)$ يصبح التكامل بالشكل:

$$I_n(f);=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0\ 2\pi]^n}\omega(x)\,f(x)dx \tag{8}$$

$$dx=dx_1.dx_2...dx_n \text{ و } x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$$

كثيرات الحدود المتعامدة النظامية: يحدد التكامل $I_n(f\ )$ في العلاقة (7) الجداء الداخلي في الفضاء المتجهي لكثيرات الحدود بـn من المتغيرات $z_1,z_2,...,z_n$

$$\langle\varphi,\psi\rangle;=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0\ ,\ 2\pi]^n}\omega(x)\ \varphi(z)\ \overline{\psi(z)}dx$$

حيث إن:

$$z = (z_1, z_2, ..., z_n) \quad , \quad z_j = \exp(ix_j) \quad , \quad j = 1, 2, ..., n$$

مجموعة كثيرات الحدود المتعامدة النظامية بالنسبة للجداء الداخلي السابق هي عبارة عن حدود بـn من المتغيرات $z_1, z_2, ..., z_n$ ، ويكون:

$$z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1} . z_2^{\alpha_2} .... z_n^{\alpha_n}$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$متجه في الفضاء R^n ، حيث إن $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ أعداد صحيحة غير سالبة ، وطول هذا المتجه هو العدد:

$$| \alpha | = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

يمكننا تشكيل النواة المولدة وفقاً للعلاقة: [3]

$$K_m(u\ ,\ z) = \sum_{j=0}^{m} \overline{F_J(u)}\ .F_J(z) \qquad (9)$$

وهي عبارة عن كثيرة حدود ،و $F_J(z)$ كثيرات حدود متعامدة نظامية في المنطقة التكاملية المفروضة .

تعد النقطة $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ ....\ a_n) \in \mathbb{C}^n$ جذر كثيرة الحدود :

$$n \geq 2 \ , \ K(z_1, z_2, ..., z_n)$$

أي أن:

$$K(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 0 \quad , \ | \alpha_1 | = | \alpha_2 | = , ..., = | \alpha_n | = 1$$

ممكن إثبات أن كثيرة الحدود (9) [3] تمتلك $2m^2$ من الجذور، لإيجاد تلك الجذور نرمز للجذر من المرتبة r بالرمز:

$$\xi_s^r = \exp(i\ \frac{2\pi}{r} s) \quad , \quad s = 0, 1, 2, ..., r-1 \qquad (10)$$

٣- تشكيل العلاقة التكعيبية في المربع $\Omega=[0\ ,\ 2\pi]^2$:

حسب العلاقة (3) تأخذ العلاقة التكعيبية الشكل التالي:

$$\frac{1}{[2\pi]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(x,y)\,f(x,y)dxdy\cong\sum_{i=1}^{2}A_i f(a_i)+\sum_{j=1}^{8}C_j f(x^{(j)},y^{(j)}) \qquad (11)$$

الصحيحة من أجل كثيرات الحدود المثلثية حتى الدرجة الثالثة.

نوجد كثيرات الحدود المتعامدة النظامية $F_J(z)$ $j=0,1,2,...m,$ في المنطقة التكاملية المفروضة وحسب دالة الوزن، وذلك اعتمادا على مبدأ التعامد والنظيم لـ شميدت ، انطلاقاً من مجموعة دوال مستقلة خطياً وباستخدام العلاقة (9) نحصل على النواة المولدة.

لنفرض أن $n=2$ ، نعتمد على مبدأ غرام شميث في التعامد والنظيم، حيث نحصل على كثيرات متعامدة ونظامية انطلاقاً من مجموعة الدوال المستقلة خطياً الآتية:

$$1, z_1, z_2, z_1^2 . z_1 z_2, z_2^2, ...$$

نأخذ دالة الوزن بالشكل $\omega(x,y)=1$.نجد إن كثيرات الحدود المتعامدة النظامية حتى الدرجة الثانية تكتب بالشكل الآتي:

$$F_0(z)=1,\ \ F_1(z)=z_1\ ,\ F_2(z)=z_2$$
$$F_3(z)=z_1^2\ ,\ F_4(z)=z_2 z_2\ ,\ F_5(z)=z_2^2$$

النواة المولدة هي كثيرة حدود بنوعين من المتحولات $z\ ,\ u$ ، وكل منهما متجه بـ m من المتحولات العقدية ،وتكتب حسب (9) بالشكل التالي:

$$K_2(u\ ,\ z)=1+u_1 z_1+u_2 z_2+u_1^2 z_1^2+u_1 z_1 u_2 z_2+u_2^2 z_2^2 \qquad (12)$$

نأخذ أي نقطة $a^{(1)}=(z_1^{(0)}\ ,z_2^{(0)})=(1\ ,-1)$ ، حيث إن $(x_1^{(0)},x_2^{(0)})=(0\ ,\ \pi)$ التي تحدد السطح الآتي:

$$\tilde{K}_2(1,-1;z_1,z_2)=z_1^2+z_2^2+z_1z_2+1=0 \qquad (13)$$

أخذنا الحدود التي درجتها زوجية لأن k عدد زوجي، تقع جذور المعادلة $\tilde{K}_2(1,-1;z_1,z_2)=0$ حسب المبرهنة (4) على محيط القرص الدائري $|z|=1$ أي أن:

$$|z_1|=1,\ |z_2|=1,\ |\overline{z_1}|=1,\ |\overline{z_2}|=1,\ \overline{z_1}=\frac{1}{z_2},\ \overline{z_2}=\frac{1}{z_1}$$

ومنه يكون:

$$\overline{z_1}z_2=1\ ,\ z_1\overline{z_2}=1$$

وأيضاً يكون:

$$\overline{z_1}^2+\overline{z_2}^2+\overline{z_1}\,\overline{z_2}+1=0$$

نبدل $\overline{z_1}=\frac{1}{z_2},\ \overline{z_2}=\frac{1}{z_1}$ نجد إن:

$$\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\frac{1}{z_1z_2}+1=0$$

نضرب طرفي هذه المعادلة بـ $z_1^2.z_2^2$ نجد:

$$z_2^2+z_1^2+z_1z_2+z_1^2z_2^2=0$$

من المعادلة (13) نجد:

$$z_1^2+z_2^2=-z_1z_2-1$$

بالتبديل نجد:

$$z_1^2z_2^2-1=0$$

ومنه نجد إن:

$$(z_1z_2+1)(z_1z_2-1)=0$$

من هذه المعادلة ،إما أن يكون : $z_1z_2-1=0$ ، ،أو $z_1z_2+1=0$

نلاحظ أنه إذا كان $z_1 = i$ ، فإن $z_2 = -i$ ، وبالتالي النقطة $(i\ ,-i)$ تقع على السطح (10) ، لذلك نأخذ $a^{(2)} = (i,-i)$ التي تحدد السطح الآتي:

$$K_2(i\ ,-i\ ; z_1\ ,\ z_2) = -z_1^2 - z_2^2 + z_1 z_2 + 1 = 0 \qquad (14)$$

تقع جذور هذه المعادلة حسب المبرهنة (4) على محيط القرص الدائري $|\ z\ | = 1$.

يتقاطع السطحان (13) و (14) في النقاط الآتية:

$$z^{(1)} = (e^{i\pi/4}\ , e^{i3\pi/4}) \quad , \quad z^{(2)} = (e^{i3\pi/4}\ , e^{i\pi/4})$$
$$z^{(3)} = (e^{i5\pi/4}\ , e^{i7\pi/4}) \quad , \quad z^{(4)} = (e^{i7\pi/4}\ , e^{i5\pi/4})$$

من الواضح أن $|\ z^{(j)}\ | = 1$ ، $j = 1\ ,2\ ,\ 3\ 4,$ التي تحدد أربعة نقاط للعلاقة التكعيبية (10) كما يلي:

$$(x^{(1)}\ , y^{(1)}) = (\pi/4\ ,\ 3\pi/4) \quad , \quad (x^{(2)}\ , y^{(2)}) = (3\pi/4\ ,\ \pi/4)$$
$$(x^{(3)}\ , y^{(3)}) = (5\pi/4\ ,\ 7\pi/4) \quad , \quad (x^{(4)}\ , y^{(4)}) = (7\pi/4\ ,\ 5\pi/4)$$

حسب طريقة النواة المولدة المعدلة ، نأخذ النقاط المتناظرة بالنسبة لمركز التناظر $-a^{(2)}$, $-a^{(1)}$ التي تحدد بشكل مشابه لما سبق بقية نقاط العلاقة التكعيبية كما يلي:

$$(x^{(5)}\ , y^{(5)}) = (0\ ,\ 0) \qquad , \quad (x^{(6)}\ , y^{(6)}) = (\pi\ ,\ \pi)$$
$$(x^{(7)}\ , y^{(7)}) = (\pi/2\ ,\ 3\pi/2) \quad , \quad (x^{(8)}\ , y^{(8)}) = (3\pi/2\ ,\ \pi/2)$$

نحسب ثوابت العلاقة التربيعية (8) من المساواة الآتية:

$$C_J^{-1} = 2\tilde{K}_2(a^{(J)}\ ,\ a^{(J)})$$

أي أن:

$$C_1^{-1} = C_2^{-1} = 2\tilde{K}_2(a^{(1)}\ ,\ a^{(1)}) = 8$$
$$C_3^{-1} = C_4^{-1} = 2\tilde{K}_2(a^{(2)}\ ,\ a^{(2)}) = 8$$

يمكننا إيجاد بقية ثوابت العلاقة التكعيبية والمقابلة للنقاط $(x^{(J)}, y^{(J)})$, $J = 1,2,...,8$ من دقة العلاقة التكعيبية ، لو أخذنا $\varphi = \pi/2$ أو $\varphi = 3\pi/2$ فإننا نحصل على نفس الثابت.

العلاقة التكعيبية (11) تكتب بالشكل التالي:

$$\frac{1}{[2\pi]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)dxdy \cong \frac{1}{8}[f(0,0)+f(\pi,\pi)]+$$
$$+\frac{1}{8}[f(\pi/2,3\pi/2)+f(3\pi/2,\pi/2)]+\frac{1}{8}[f(\pi/4,3\pi/4) \qquad (15)$$
$$+f(3\pi/4,\pi/4)+f(5\pi/4,7\pi/4)+f(7\pi/4,5\pi/4)]$$

يمكن التحقق من أن العلاقة التقريبية (15) دقيقة من أجل كثيرات الحدود المثلثية التي درجتها لا تتجاوز m ، وتقريبية من أجل كثيرات الحدود من الشكل $\exp(i(m+1)x))$ ومنه نجد أن الدقة الجبرية تساوي*3*.

عدد نقاط العلاقة التقريبية (15) يساوي $N = t(n,m) = t(2,2) = 8$ ، وهو يساوي الحد الأدنى لعدد نقاط العلاقة التكعيبية، والتي تحدده كلاً من المبرهنتين (2) و(3) .

تطبيق ١:

نأخذ $f(x) = 1$ نجد بالطريقة التحليلية إن:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[0\ 2\pi]^2} f(x)dx = 1$$

لنحسب قيمة التكامل المفروض حسب العلاقة (15) ، فيكون:

$$\frac{1}{[2\pi]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)dxdy \cong \frac{1}{8}[1+1]++\frac{1}{8}[1+1]+\frac{1}{8}[1+1+1+1] = 1$$

تطبيق ٢:

من أجل $f(x)=\cos 2x$ نجد بالطريقة التحليلية إن:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[0\,2\pi]^2}\cos 2x\,dxdy=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\sin 2x]_0^{2\pi}dy=0$$

لنحسب قيمة التكامل المفروض حسب العلاقة (15) ، فنجد:

$$\frac{1}{[2\pi]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x,y)dxdy\cong\frac{1}{8}[1+1]+\frac{1}{8}[-1+(-1)]+\frac{1}{8}[0+0+0+0]=0$$

من أجل $j=1,2,..,n$, $f(x)=\exp(ix_j)$ نجد بالطريقة التحليلية إن:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[0\,2\pi]^2}\exp(ix_j)dx=0$$

لنحسب قيمة التكامل المفروض حسب العلاقة (15) ، فنجد:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{[0,2\pi]^2}exp(ix)dx\cong 0$$

يمكننا بنفس الطريقة أن نأخذ أي دالة من الشكل:

$$f(x)=\exp(i(x_j+x_k))\ ;\ j,k=1,2,...,n$$

وأن نحسب قيمة التكامل بالطريقة التحليلية، وباستخدام العلاقة التقريبية (15).

ملاحظة: تصبح العلاقة (15) تقريبية من أجل الدوال من الشكل:

$f(x)=\exp(ig(x))$ ، و $g(x)$ أي كثيرة حدود غير خطية.

نأخذ دالة الوزن بالشكل $\omega(x,y)=1-coc(x-y)$.نجد إن كثيرات الحدود المتعامدة النظامية حتى الدرجة الثانية تكتب بالشكل الآتي:

$$F_0(z)=1\ ,\ F_1(z)\ ,=z_1\ ,\ F_2(z)=\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1+2z_2)$$

$$F_3(z)=z_1^2\ ,\ F_4(z)=\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1^2+2z_2z_2)\ ,\ F_5(z)=\frac{1}{\sqrt{6}}(z_1^2+2z_1z_2+3z_2^2)$$

وكثيرات الحدود المتعامدة النظامية من الدرجة الثالثة تكتب بالشكل الآتي:

$$F_6(z)=z_1^3\ ,\ F_7(z)=\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1^3+2z_1^2z_2)\ ,F_8(z)=\frac{1}{\sqrt{6}}(z_1^3+2z_1^2z_2+3z_1z_2^2)$$

$$F_9(z)=\frac{1}{\sqrt{10}}(z_1^3+2z_1^2z_2+3z_1z_2^2+4z_2^3)$$

أما كثيرات الحدود المتعامدة النظامية من الدرجة الرابعة، فتكتب بالشكل الآتي:

$$F_{10}(z)=z_1^4\ ,\ F_{11}(z)=\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1^4+2z_1^3z_2)\ ,F_{12}(z)=\frac{1}{\sqrt{6}}(z_1^4+2z_1^3z_2+3z_1^2z_2^2)$$

$$F_{13}(z)=\frac{1}{\sqrt{10}}(z_1^4+2z_1^3z_2+3z_1^2z_2^2+4z_1z_2^3)\ ,$$

$$F_{14}(z)=\frac{1}{\sqrt{15}}(z_1^4+2z_1^3z_2+3z_1^2z_2^2+4z_1z_2^3+5z_2^4)$$

التي يمكن استخدامها من أجل الحصول على علاقات تكعيبية جديدة أكثر دقة.

الاقتراحات والتوصيات:

١–تشكيل علاقات تقريبية ذات دقة أعلى للدوال المثلثية باستخدام الدوال العقدية.

٢–العلاقات التقريبية للتكاملات المضاعفة بمتحولات عقدية.

٣– البحث عن مناطق تكاملية أخرى للدوال العقدية مثل المناطق الكروية والناقصية.

المراجع المستخدمة:

[1]. Mysovskikh.I.P. Interpolation cubature formulas

Nowak . 1981 Mowscou.336.p.

[2] Noskov . M.V . The approximate integration formulae of the periodic functions .vestnig Leningrad , N14.1985.

[3] Mysovskikh.I.P. On the cubature formulas exact for trigonometric polynomials . summery A N USSR1987.

[4]. Mysovskikh.I.P. The cubature formulas exact for trigonometric polynomials. vestnig Leningrad , N16.1991.

[5].cege.g.1962 orthogonal polynomials Mowscou.500.p.

[6].Krilov . approximation Numerical for integration . Nawka Mowscou.500p-1967.

[7] R. Cools; , I.P. Mysovskikh, H.J. Schmidt, Cubature formulae that are exact for trigonometric polynomials .univ Leuven 2001.