توظيف طوريات تجديد ماركوف في نمذجة أزمنة نظام M/M/1 ودراسة الارتباطات المتعلقة بها

سعاد زرير*، د. آية خانطوماني، د. هادية طهماز*****

الملخص

تتصف أنظمة الخدمة عموماً بأزمنة تخديم مستقلة عن بعضها البعض وخصوصاً الأنظمة ذات مخدم واحد فقط، وفي حال كانت هذه الأنظمة تقدم أكثر من خدمة فإن فرضية الاستقلال لم تعد محققة، مما يدفعنا إلى اقتراح أسلوب يعالج هذا النوع من المسائل.

يقدم هذا البحث أسلوب جديد في نمذجة أزمنة التخديم في النموذج M/M/1 وذلك بالاعتماد على طوريات تجديد ماركوف، من خلال تمثيل ازمنة التخديم بطوريات تجديد ماركوف، كما تم استنتاج مصفوفة شبه كيرنل لهذا الطوري وبالاعتماد عليها تم التوصل إلى دالة توزيع أزمنة التخديم ومصفوفة الانتقال P.

كما تم استنتاج الصيغ الرياضية لدوال التوزيع والتوقع الرياضي والتباين والتغاير الذاتي والارتباط لأزمنة تخديم تجديد ماركوف بهدف دراسة الارتباطات بين أنواع الزبائن المختلفة، ومن ثم استنتاج الارتباطات بعد r-خطوة من عمل أي نظام خدمة يقدم خدمات مختلفة ويعتمد على مخدم واحد فقط. ومن خلال الأمثلة والتطبيقات تم التوصل إلى أن نظام الخدمة المقترح M/MRP/1 هو تعميم لنظام الخدمة الكلاسيكي M/M/1 كونه يتعامل مع أزمنة تخديم مرتبطة وتبين وجود ارتباطات عكسية وموجبة تتراوح بين الضعيفة والمتوسطة بين أزمنة التخديم المدروسة.

الكلمات المفتاحية: طوري تجديد ماركوف، نظام الخدمة M/M/1، كيرنل تجديد ماركوف، دالة توزيع تجديد ماركوف، توقع أزمنة تخديم ماركوف، الارتباط لأزمنة تخديم ماركوف.

* طالبة دراسات عليا (ماجستير)، قسم الاحصاء الرياضي، كلية العلوم، جامعة حلب

** قسم الاحصاء الرياضي، كلية العلوم، جامعة حلب.

*** قسم الاحصاء الرياضي، كلية العلوم، جامعة حمص.

Using Renewal Markov processes in modeling Service times of M/M/1 Queue and studying its correlations

Soaad Zrir*, Dr. Aya Khantoumani, Dr. HadiaTohmaz*****

*Postgraduate Student (Msc), Dept. of Mathematical Statistics, Faculty of Science, University of Aleppo

** Dept. of Mathematical Statistics, Faculty of Science, University of Aleppo

*** Dept. of Mathematical Statistics, Faculty of Science, University of homs

Abstract

Service systems are generally characterized by independent service times, especially in systems with a single server. However, when these systems offer multiple services, the assumption of independence no longer holds, necessitating the proposal of a method to address this issue.

This research presents a new approach to modeling service times in the $M/M/1$ queuing model using Markov renewal processes. By representing service times with Markov renewal processes, a semi-Markov kernel for this process was derived, which allowed for the determination of the service time distribution function and the transition matrix P.

Additionally, mathematical formulas for the distribution functions, expected value, variance, auto covariance, and correlation of Markov renewal service times were derived to study the correlations between different types of customers. The study further examines correlations after an r-step for any service system providing multiple services with a single server. Through examples and applications, it was found that the proposed $M/MRP/1$ service system generalizes the classic $M/M/1$ model by handling correlated service times, revealing both positive and negative correlations ranging from weak to moderate among the studied service times.

Keywords: Markov renewal processes, $M/M/1$ Queue, semi-Markov kernel, expected Markov renewal times, correlation Markov renewal times.

مقدمة (*Introduction*):

تعتبر نظرية التجديد من أحد فروع نظرية الاحتمالات المهمة والمختصـــة بدراســـة الظواهر العشـــوائية المتغيرة مع الزمن والأنظمة القابلة للإصـــلاح [1]، لذا فإن طوريات التجديد تعميم لطوريات بواســون وطوريات العّد، التي تتميز بكون أزمنة ما بين الوصول لها مستقلة ولها نفس التوزيع الاحتمالي [2].

كما تعد نظرية التجديد جزءً تطبيقياً مهماً في نظرية الطوريات العشــوائية [3]، فكان أول ظهور لتطبيقاتها في دراســـات التحليل الســـكاني على يد كل من الرياضـــي السويسري ليونارد أويلر عام 1760 والديموغرافي الألماني يوهان بيتر عام 1761، وتطورت في أوائل القرن الماضـي على يد الأمريكي ألفريد عام 1913 وتعتبر الفترة الحقيقيـة لظهور هـذه النظريـة [5][4]. وتوالـت المنشـــورات حول هـذه النظريـة وتطبيقاتها على يد الكثير من العلماء والباحثين إلى وقتنا هذا.

كما تلعب نظرية التجديد دوراً رئيســـياً في مجال الاحتمالات التطبيقية مثل نظرية الموثوقية [6]، ولها دور كبير وملحوظ في تحليل الأنظمة في نظرية الخدمات وتتم دراســـتها في عدة مجالات منها مراكز خدمة العملاء وأنظمة الحجز في الفنادق والخدمات الصـــحية ومحطات تعبئة الوقود وخطوط الإنتاج في المصـــانع وغيرها، وذلك بهدف تحليلها وفهمها والعمل على تحســينها إيجاد الحلول المناســبة المتعلقة بالمشــكلات التي تواجهها [7]، بالإضــافة إلى تطبيقاتها في المجالات الاقتصــادية والاجتماعية والصحية والفيزيائية والعديد من القطاعات الأخرى [8].

كما أن طوري تجديد ماركوف هي تعميم لطوري التجديد بأزمنة عشـــوائية غير مســتقلة ولها نفس التوزيع الاحتمالي. توزيعاتها تعتمد على الحالات في ســلســلة ماركوف. تمت دراســة عمليات التجديد الماركوفية في الســتينيات وتم تطبيقها في أنظمة الانتظار $M\backslash G\backslash 1$.

مشكلة البحث (*Problem of the Research*)

معظم الدراســات في مســائل أنظمة الخدمة لا تأخذ بعين الاعتبار أنواع الزبائن المراد تخديمها خدمات مختلفة، لذا فأن عدم معرفة المخدم بنوع الخدمة المراد تقديمها لكل زبون يؤثر بشكل مباشر على أزمنة أداء الخدمة، فيحصل تأخر زمني في تســلســل أزمنة الخدمة، أي زمن تخديم الزبون الجديد يعتمد على زمن تخديم الزبون الحالي وفقاً لنوع الخدمة المطلوبة. لذا لم تعد هذه الأزمنة تشكل سلسلة من المتغيرات العشـوائية المسـتقلة وفقاً لتسـلسـل أنواع الزبائن. مما يدفعنا لدراسـة نوع جديد من عمليات التخديم لحل هذا النوع من المسائل.

أهداف البحث(*Objectives of the Research*)

١- توظيف طوريات التجديد الماركوفية على نظام الخدمة $M\backslash M\backslash 1$ بمخدم واحد.

٢- دراسة أزمنة التخديم بالاعتماد على طوريات التجديد الماركوفية.

٣- إيجاد دالة التوزيع والتوزيع الشرطية لأزمنة التخديم T_n.

٤- إيجاد الصيغ الرياضية للصفات المميزة لأزمنة الخدمة.

٥- استنتاج الارتباط بين ازمنة الخدمة.

٦- مناقشة الحالة الخاصة لنوعين من الزبائن من خلال أمثلة وتطبيقات.

أولاً: تعاريف ومفاهيم أساسية:

١- طوري العد (*Counting Process*):[9]

نقول عن الطوري العشـــوائي $\{N_t\}_{t\geq 0}$ انه طوري عد إذا كانت $N(t)$ تمثل عدد الأحداث التي خلال الفترة الزمنية t وتحقق الشروط التالية:

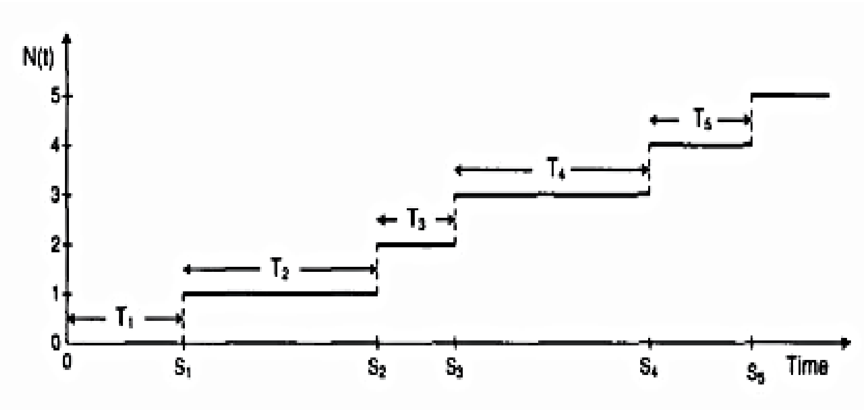
١- $N(t) \geq 0$

٢- اذا كان $(s < t)$ فان $N(s) \leq N(t)$

٣- من اجل $(s < t)$ فإن $N(t) - N(s)$ تمثل عدد الأحداث التي تحدث خلال الفترة الزمنية $(s, t]$

٢-طوري التجديد (*Renewal Process*):[10]

نقول عن طوري العد $(N(t); t \geq 0)$ إنه طوري تجديد إذا كانت أزمنة ما بين الوصـول له (T_n) عبارة عن سـلسـلة من المتغيرات العشـوائية المسـتقلة ومتماثلة التوزيع وغير سالبة لجميع قيم$1 \leq n$



الشكل (١): يمثل هذا الشكل طوري التجديد

علمــاً أن S_n تمثـل زمن ظهور الحــدث$-n$ وتـدعى بـأزمنــة التجـديـد، وأن $T_n = S_n - S_{n-1}; n \geq 1$ هي أزمنة ما بين الوصول أي ما بين حدوث حدثين.

في حال كانت أزمنة ما بين الوصــول أســية عندئذ يكون طوري التجديد عبارة عن طوري بواسون بمتوسط λ ويعد حالة خاصة من طوري التجديد.

٣-دالة التجديد *Renewal Function*:[11][12]

يمكن معالجة العديد من الأسئلة حول الطوريات الأكثر تعقيدًا من خلال تحديد دالة التجديد المتعلقة بطوري التجديد. وهذه الدالة مفيدة باستخلاص الصفات المتعلقة بطوري التجديد كونها دالة متعلقة بالزمن، علاوة على ذلك كونها تساعد في تحديد سلوك الطوري.

بفرض $(\mathrm{T_n}\,; n = 1,2,\dots)$ سلسلة من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتطابقة بالتوزيع والتي تمثل أزمنة ما بين الوصول بين كل حدثين متتاليين، وكل هذه المتغيرات لها دالة توزيع F، فإن دالة التجديد تمثل العدد المتوقع من الأحداث التي تحدث خلال الفترة الزمنية t ، في حال كانت $(\mathrm{T_n}\,; n = 1,2,\dots)$ تمثل أزمنة التشغيل بعد التصليح رقم$-1-n$، فإن دالة التجديد تمثل العدد المتوقع من حالات الفشل ضمن الفترة الزمنية t.

تعرف دالة التجديد بالشكل:

$$m(t) = E[N(t)]$$

ويعرف توزيع $N(t)$ كما يلي:

$$P_N(t) = P\{N(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

وبالاعتماد على معادلة الالتفاف لإيجاد معادلة التجديد نحصل على:

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} n\big(F_n(\mathrm{t}) - F_{n+1}(\mathrm{t})\big)$$

وتدعى أيضاً الدالة $m(t)$ بالقيمة المتوسطة.

يمكن كتابة معادلة التجديد بشكل آخر كما يلي:

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x)$$

ثانياً: طوريات تجديد ماركوف (*Markov Renewal Processes*):

تعتبر طوريات التجديد الماركوفية تعميم لطوريات التجديد تتميز بأن سلسلة الأزمنة لها ليست مستقلة ومتطابقة بالتوزيع، توزيعاتها تعتمد على حالات سلسلة ماركوف. درست طوريات التجديد الماركوفية لأول مرة عام (1961) على يد الباحث Pyke وطبقت على أنظمة الخدمة $M\backslash G\backslash 1$ وعلى مسائل اصلاح الآليات[13].

١- تعريف طوري ماركوف (*Markov Process*):[14]

نقول عن طوري عشوائي $\{X(t); t \in t\}$ أنه يمثل طوري ماركوف، من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ وكل من $t_0, t_1, \cdots, t_n \in T$ مع t_n $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *ومن أجل* $y, x, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0 \in \mathbb{R}$، تكون العلاقة التالية محققة:

$$P\left(X_{t_n} = y \mid X_{t_{n-1}} = x, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = x_0\right) = P\left(X_{t_n} = y \mid X_{t_{n-1}} = x\right)$$

تدعى هذه الخاصية بخاصية ماركوف.

٢- **سلسلة ماركوف المنفصلة:** نقول عن طوري ماركوف $\{X(t); t \in T\}$ أنه يمثل سلسلة ماركوف إذا كانت مجموعة وسطاؤه منقطعة، وبالتالي فإن خاصية ماركوف تصبح بالشكل:

$$P\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} = \mathrm{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

من أجل جميع قيم n وجميع الانتقالات $i_0, \dots, i_{n-1}, i, j$

يُطلق على احتمال X_{n+1}، في الحالة jبالنظر إلى أن X_n في الحالة i ، احتمالية الانتقال من خطوة واحدة ويُشار إليها بـ $P_{ij}^{n,n+1}$ أي

$$P_{ij}^{n,n+1} = \Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

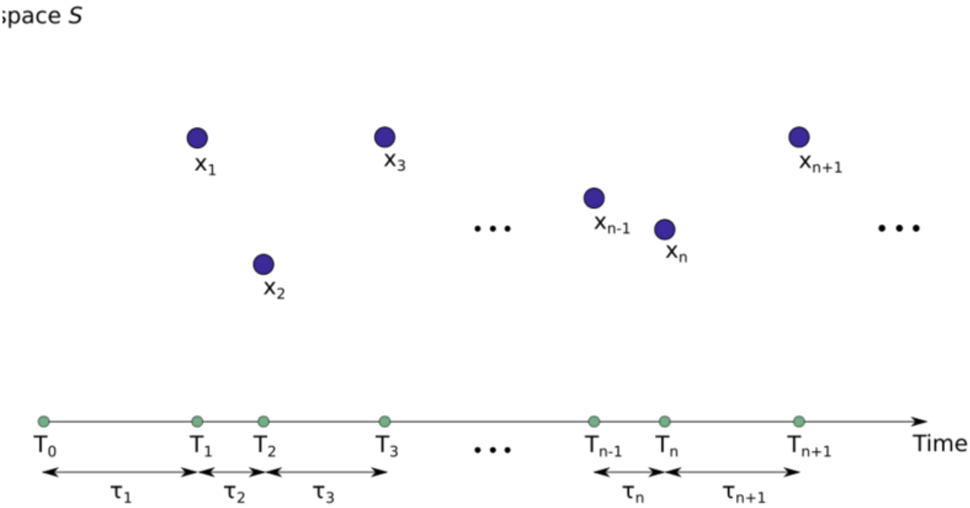
٣–طوري تجديد ماركوف (*Markov Renewal Process*):[15]

بفرض أن $(X_n, T_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ سلسلة من المتغيرات العشوائية فيها $X_n \in S\ ;\ S = \{0,1,2,\dots\}$ تمثل حالات لسلسة ماركوف و T_n أزمنة التجديد للحالات X_n، عندئذ نقول عن هذه السلسة أنها طوري تجديد ماركوفي بفضاء حالات S اذا تحقق الشرط التالي:

$$P(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \le t | X_0, \dots, X_n = i; T_0, \dots, T_n)$$
$$= P(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \le t | X_n = i) = Q_{ij}(t)$$

وذلك من أجل كل $i, j\epsilon\ E\ , T_0, \dots, T_n \epsilon\ \mathbb{R}_+$

يوضح الشكل التالي الانتقالات لطوري تجديد ماركوف علماً أن أزمنة ما بين الوصول هي $\tau_n = T_{n+1} - T_n$



وبالتالي المصفوفة التالية:

$$Q \coloneqq \{Q_{ij}(t); i, j \in E,, t \epsilon \mathbb{R}_+\}$$

تدعى بنواة شبه ماركوف semi-Markov kernel على فضاء الحالاتS .

ثالثاً: أنظمة الخدمة *Queueing Systems*: [16][17]

تعتبر مشكلة الانتظار في صفوف الانتظار من أكثر المشاكل التي نصادفها في حياتنا اليومية، إذ يتتابع وصول العناصر التي تحتاج الخدمة إلى مراكز تقديم الخدمة. فإذا كانت محطة الخدمة مشغولة فإن الزبائن سيقفون أمامها في طابور أو صف انتظار بانتظار تقديم الخدمة لهم. فالهدف تشغيل مراكز الخدمة في مستوى مقبول من الخدمة ضمن مستوى معقول من التكاليف. نشأت نظرية الخدمة على يد الباحث ايرلنغ عام 1909 حيث قدم أول ورقة بحثية عن نظرية الخدمة، وطورها كندال عام 1953 من خلال تقديم طريقة $A/B/C$ لترقيم الطابور.

نظام الخدمة $M/M/1$:

يوصـــــف هذا النظام بأنه نظام خدمة يحتوي على جهاز تخديم واحد، يخدم بأزمنة تخديم ثابتة تخضـــع للتوزيع الأســـي بالوســـيط $\mu > 0$ ، ويفترض أن الزبائن التي تصـــل إلى هذا النظام بشـــكل عشـــوائي بمعدل ثابت مقداره $\lambda > 0$ أي أن أزمنة الوصـــول تخضـــع للتوزيع البواســـوني بوســـيط λ، ويفترض هذا النظام أنه ذو حجم غير محدود، ويعمل هذا النظام وفقاً للقواعد التالية:

١- بأن قاعدة التخديم $FIFO$ (والتي تعني أنه من يصل أولاً يخدم أولاً).

٢- وصول أي زبون مستقل عن وصول الزبون الأخر.

٣- زمن خدمة أي زبون مستقل عن زمن خدمة زبون آخر.

٤- أزمنة ما بين الوصول أسية بالوسيط λ.

٥- النظام يتصـــــف بالاســـــتقرار عندما يكون $\lambda < \mu$، أي أن عدد الزبائن الذين يصلون إلى النظام أصغر تبايناً من عدد الزبائن الذين تتم خدمتهم.

نستطيع اعتبار وصول كل زبون عبارة عن ولادة، وسنرمز لمعدل الوصول خلال واحدة الزمن بـ λ، كما بإمكاننا اعتبار مغادرة كل زبون عبارة عن وفاة، وسنرمز لمعدل المغادرة خلال واحدة الزمن بـ μ، وبالتالي إن صف الانتظار $M/M/1$ هو عملية ولادة وفناء بمعاملات ولادة وفناء:

$$\lambda_n = \lambda \quad ; n = 0,1, \dots$$

$$\mu_n = \mu \quad ; n = 1,2, \dots$$

وبالتعويض في الحل المستقر لمعادلات طوري الولادة والفناء نحصل على:

$$P_n = \mathrm{P}\{N = n\} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = P^n\, P_0\ ;\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

حيث أن:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n} = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1-\rho}} ; \rho < 1$$

$$P_0 = 1 - \rho$$

وبالتالي:

$$P_n = (1-\rho)\rho^n ; n = 0,1, \dots$$

مقاييس أداء النظام $M/M/1$:

١- متوسط عدد الزبائن في النظام:

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$$

٢- متوسط عدد الزبائن في الطابور:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

٣- متوسط زمن الانتظار في النظام:

$$W_s = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

٤- متوسط زمن الانتظار في الطابور:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

نظام الخدمة المقترح $M/MRP/1$:

بفرض لدينا $X_1, X_2, \dots, X_n; n \in N$ هي متغيرات عشـــوائية تمثل أنواع الزبائن $(X_n)_{n \in N}$ وهي تشكل سلسلة ماركوف بمصفوفة انتقال $P = [P_{ij}]$ وحالات هذه السلسلة تاخذ قيمها في فضاء الحالة $E = \{1,2, \dots, m\}$.

وبفرض $T_1, T_2, \dots, T_n; n \in N$ تمثل أزمنة التخديم لأنواع الزبائن (X_n) وهي تمثل طوري تجديد $(T_n)_{n \in N}$ وبالتالي الثنائية (X_n, T_n)تمثل طوري تجديد ماركوف بمصفوفة كيرنل Q ولنرمز لاحتمال كل زبون n بـ:

$$\pi_i = P(X_n = i)$$

مع العلم أن $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ هو المتجه العشـــوائي الوحيد لمصــــفوفة الانتقال P (متجه توزيع البدء) أي أن $\pi P = \pi$ في حال استقرار السلسة.

حيث أن:

$$P = [P_{ij}] = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & P_{m1} & \cdots & P_{mm} \end{pmatrix}; \ \sum_{i=1}^{m} P_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

بما أن السلسلة مستقرة فإن

$$(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mm} \end{pmatrix}$$
$$= (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$$

$$\pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} + \cdots + \pi_m P_{m1} = \pi_1$$

$$\pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \cdots + \pi_m P_{m2} = \pi_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pi_1 P_{1m} + \pi_2 P_{2m} + \cdots + \pi_m P_{mm} = \pi_m$$

من أجل الحالة الخاصة عندما m=2 نحل المعادلات حل مشترك نجد أن:

$$\pi_1 = \frac{P_{21}}{P_{12} + P_{21}}$$

$$\pi_2 = \frac{P_{12}}{P_{12} + P_{21}}$$

من أجل طوري متجانس نعرف

$$Q_{ij}(t) = P[X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \le t | X_n = i]$$
$$\Longrightarrow Q = \left[Q_{ij}(t)\right] ; i, j \in E$$
$$P_{ij}(t) = P[X_{n+1} = j | X_n = i] \Longrightarrow P = \left[P_{ij}\right] ; i, j \in E$$
$$Q_{ij}(t) = P[X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \le t | X_n = i]$$
$$= P[T_{n+1} - T_n \le t | X_n = i, X_{n+1} = j] * P[X_{n+1} = j | X_n = i]$$

وبفرض أن $F_{ij}(t) := P[T_{n+1} - T_n \leq t | X_n = i, X_{n+1} = j]$

$$\Longrightarrow Q_{ij}(t) = F_{ij}(t) * P_{ij}$$

$$\Longrightarrow F_{ij}(t) = \frac{Q_{ij}(t)}{P_{ij}}$$

وهي تمثل دالة التوزيع الشرطية لزمن خدمة الزبون $n + 1$

الآن نســـتنتج التوقع الرياضـــي لأزمنة تخديم تجديد ماركوف من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنـة: بفرض أن (X_n, T_n) طوري تجديد ماركوفي يمثل أزمنـة تخديم نظـام $M/M/1/\infty$ عندئذٍ يكون التوقع الرياضي لهذه الأزمنة له العلاقة:

$$E(T_n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \pi_i \, P_{ij} \frac{1}{\mu_{ij}}$$

الإثبـات: بفرض أن T_{ij} تمثل زمن الخدمـة للزبون ذو النوع ij مثلاً T_{11} تمثل الزبون من النوع الأول وكذلك T_{12} تمثل الزبون من النوع الأول أما T_{21} تمثل الزبون من النوع الثاني وكذلك T_{22} وهكذا ...، وبفرض أن أزمنة الخدمة لكل نوع تخضع للتوزيع الأسي للنظام $M/M/1$ ، عندئذٍ يكون التوقع الرياضي لكل نوع

وبالتالي: $\bar{T}_{ij} = ET_{ij} = \frac{1}{\mu_{ij}}$

$$ET_n = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{T}_{ij} \, P(T_n \leq t, X_{n+1} = j, X_n = i)$$

$$= \lim_{t \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \bar{T}_{ij} \, P(T_n \leq t, X_{n+1} = j, X_n = i) \ldots (*)$$

ولكن استنتجنا من دالة التوزيع الشرطية أن

$$P(T_n \leq t, X_{n+1} = j, X_n = i) = Q_{ij}(t) * \pi_i$$

وبالتالي تصبح العلاقة $(*)$ بالشكل:

$$ET_n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \lim_{t \to \infty} \bar{T}_{ij}\ Q_{ij}(t) * \pi_i$$

ولكن نعلم أن $\lim\limits_{t \to \infty} Q_{ij}(t) = P_{ij}(t)$ أي أن:

$$ET_n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\mu_{ij}}\ P_{ij}(t)\pi_i$$

ملاحظة: نستنتج من المبرهنة السابقة أن:

$$ET_n^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{2}{{\mu^2}_{ij}}\ P_{ij}(t)\pi_i$$

لأن $ET_{ij}^2 = V(T_{ij}) + (ET_{ij})^2$ علماً أن $T_{ij} \sim Exp(\mu_{ij})$

$$\Rightarrow ET_{ij}^2 = \frac{1}{\mu_{ij}^2} + \left(\frac{1}{\mu_{ij}}\right)^2$$

$$\Rightarrow ET_{ij}^2 = \frac{2}{\mu_{ij}^2}$$

وبالتالي:

$$ET_n^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{T}_{ij}^2\ P(T_n \leq t, X_{n+1} = j, X_n = i)$$

وبنفس الطريقة السابقة يكون

$$ET_n^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{{\mu^2}_{ij}}\, P_{ij}(t)\pi_i$$

وبالتالي يكون **التباين** لأزمنة تخديم النظام المقترح:

$$V(T_n) = ET_n^2 - (ET_n)^2$$

مثال: بفرض لدينا نظام خدمة يقدم نوعين من الخدمة بمخدم واحد وبفرض أن معدل وصـــــول الزبائن إلى هذا النظام $\lambda = 1\text{min}$ وأن معدل تخديم النوع الأول $\mu_1 = 2min$ وأن معدل تخديم النوع الثاني من الزبائن $\mu_2 = 3\ min$، وبفرض أن الانتقالات بين النوعين من الزبائن كانت بالشكل التالي:

$$1,2,2,2,1,1,1,1,2,2,1,2,1$$

أي أن مصفوفة الانتقال:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{6} & \frac{3}{6} \\ \frac{3}{6} & \frac{3}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

وبالتالي: $\pi = \left(\frac{P_{21}}{P_{12}+P_{21}}, \frac{P_{12}}{P_{12}+P_{21}}\right) = (\pi_1 = 0.5 \quad \pi_2 = 0.5)$

لنحسب التوقع لأزمنة خدمة النظام المقترح لهذا المثال:

$$ET_n = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\lambda}{\mu_{ij}}\, P * \pi_i = \pi\left[P.\frac{1}{\mu_{ij}}\right].1$$

$$= [0.5 \quad 0.5] \begin{bmatrix} \frac{0.5}{2} & \frac{0.5}{2} \\ \frac{0.5}{3} & \frac{0.5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{12}$$

$$ET_n^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\lambda}{\mu_{ij}^2} P * \pi_i = \pi \left[P . \frac{2}{\mu_{ij}^2} \right] . 1$$

$$[0.5 \quad 0.5] \begin{bmatrix} (0.5)\left(\frac{2}{2^2}\right) & (0.5)\left(\frac{2}{2^2}\right) \\ (0.5)\left(\frac{2}{3^2}\right) & (0.5)\left(\frac{2}{3^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{13}{36}$$

وبالتالي يكون التباين لأزمنة تخديم النظام المقترح:

$$V(T_n) = ET_n^2 - (ET_n)^2$$

$$= \frac{13}{36} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

الارتباط بين أزمنة التخديم وفق مصفوفة انتقال بخطوة واحدة فقط:

أولاً نوجد تابع التوزيع المشترك لزمني الخدمة:

$P(T_n \le t, T_{n+1} \le s) = \sum_i \sum_j \sum_k P(T_n \le t, T_{n+1} \le s, X_{n-1} = i, X_n = j, X_{n+1} = k)$ وباستخدام مبرهنة جداء الأحداث:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) * P(A_2 \backslash A_1) * P(A_3 \backslash A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \backslash A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

$$\Rightarrow P(T_n \le t, T_{n+1} \le s) = \sum_{i.j.k=1}^{m} P(X_{n-1} = i) * P(X_n = j, T_n \le t | X_{n-1} = i) * P(X_{n+1} = k, T_{n+1} \le s | X_n = j, X_{n-1} = i)$$

الآن باستخدام خاصية ماركوف تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$P(T_n \le t, T_{n+1} \le s) = \sum_{i.j.k=1}^{m} P(X_{n-1} = i) * P(X_n = j, T_n \le t | X_{n-1} = i) * P(X_{n+1} = k, T_{n+1} \le s | X_n = j)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{m} \pi_i \, Q_{ij}(t) * Q_{jk}(s)$$

$$\Rightarrow E(T_n, T_{n+1}) = \lim_{s,t \to \infty} \sum_{i,j,k=1}^{m} \pi_i \, Q_{ij}(t) * Q_{jk}(s) * \bar{T}_{ij}$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{m} \bar{T}_{ij} \; \pi_i \, P_{ij} P_{jk} = \sum_{i,j,k=1}^{m} \frac{1}{\mu_{ij}} P_{ij} P_{jk}$$

$$\Longrightarrow cov(T_n, T_{n+1}) = E(T_n, T_{n+1}) - \left(E(T_n)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \rho(T_n, T_{n+1}) = \frac{cov(T_n, T_{n+1})}{var(T_n)}$$

استنتاج الارتباط بـ r خطوة بين أزمنة التخديم:

إن تابع التوزيع المشترك لزمني الخدمة T_n, T_{n+r}:

$$P(T_n \le t, T_{n+r} \le s) =$$

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{m} P(T_n \leq t, T_{n+r} \leq s, X_{n-1} = i, X_n = j, X_{n+r-1} = k, X_{n+r} = l)$$

$$= \sum_{i.j.k,l=1}^{m} P(X_{n-1} = i)\, P(X_n = j, T_n \leq t | X_{n-1} = i) * P(X_{n+r-1} = k | X_n = j) \mathrm{P}(X_{n+r} = l, T_{n+r} \leq s | X_{n+r-1} = k)$$

$$= \sum_{i,j,k,l=1}^{m} \pi_i\, Q_{ij}(t) * P^{r-1} Q_{kl}(s)$$

$$\Longrightarrow\ E(T_n, T_{n+r}) = \lim_{s,t\to\infty} \sum \pi_i \frac{1}{\mu_{ij}}\ Q_{ij}(t) * P^{r-1} * \frac{1}{\mu_{kl}}\ Q_{kl}(s)$$

$$= \sum_{i,j,k,l=1}^{m} \pi_i \frac{1}{\mu_{ij}}\ P_{ij} * P^{r-1} \frac{1}{\mu_{kl}}\ P_{kl}$$

وبالتالي الارتباط بين زمني الخدمة T_n, T_{n+r}:

$$\Longrightarrow cov(T_n, T_{n+r}) = E(T_n, T_{n+r}) - E(T_n) * E(T_{n+r})$$

$$\Longrightarrow \rho(T_n, T_{n+r}) = \frac{cov(T_n, T_{n+r})}{\sqrt{var(T_n) * var(T_{n+r})}}$$

بالعودة إلى المثال السابق نحسب الارتباطات بين نوعي الخدمة بخطوة واحدة كما يلي:

$$E(T_n, T_{n+1}) = \pi \frac{1}{\mu_{ij}} P_{ij} * \frac{1}{\mu_{jk}} P_{jk} * 1$$

$$= (0.5 \quad 0.5)\begin{pmatrix} \frac{0.5}{2} & \frac{0.5}{2} \\ \frac{0.5}{3} & \frac{0.5}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{0.5}{2} & \frac{0.5}{2} \\ \frac{0.5}{3} & \frac{0.5}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.1736$$

$$cov(T_n, T_{n+1}) = E(T_n, T_{n+1}) - \left(E(T_n)\right)^2$$

$$= 0.1736 - 0.1736 = 0$$

$$\rho = \frac{cov(T_n, T_{n+1})}{var(T_n)} = 0$$

لنحسب الارتباط بين نوعي الخدمة بخطوتين (يومين مثلاً من عمل نظام الخدمة)

$$E(T_n, T_{n+2}) = \pi\left(\frac{1}{\mu_{ij}} P_{ij}\right) * \mathrm{P}^{\mathrm{r}-1} * \left(\frac{1}{\mu_{kl}} P_{kl}\right) * 1$$

$$= (0.5 \quad 0.5)\begin{pmatrix} \frac{0.5}{2} & \frac{0.5}{2} \\ \frac{0.5}{3} & \frac{0.5}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{0.5}{2} & \frac{0.5}{2} \\ \frac{0.5}{3} & \frac{0.5}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= 0.17358$$

$$cov(T_n, T_{n+2}) = E(T_n, T_{n+2}) - E(T_n) * E(T_{n+2})$$

$$= 0.17358 - \frac{5}{12} * \frac{5}{12}$$

$$\rho(T_n, T_{n+r}) = \frac{cov(T_n, T_{n+r})}{\sqrt{var(T_n) * var(T_{n+r})}}$$

لنحسب الارتباط بين نوعي الخدمة بخطوتين (يومين مثلاً من عمل نظام الخدمة)

$$E(T_n, T_{n+2}) = \pi\left(\frac{1}{\mu_{ij}} P_{ij}\right) * \mathrm{P}^{\mathrm{r}-1} * \left(\frac{1}{\mu_{kl}} P_{kl}\right) * 1$$

$$= (0.5 \quad 0.5)\begin{pmatrix} \frac{0.5}{2} & \frac{0.5}{2} \\ \frac{0.5}{3} & \frac{0.5}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{0.5}{2} & \frac{0.5}{2} \\ \frac{0.5}{3} & \frac{0.5}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0.17358$$

$$cov(T_n, T_{n+2}) = E(T_n, T_{n+2}) - E(T_n) * E(T_{n+2})$$

$$= 0.17358 - \frac{5}{12} * \frac{5}{12}$$

$$\rho(T_n, T_{n+r}) = \frac{cov(T_n, T_{n+r})}{\sqrt{var(T_n) * var(T_{n+r})}}$$

مثال: بفرض أنه تم تسـجيل دخول الزبائن لتلقي خدمة ما خلال فترة زمنية مقدارها نصـف سـاعة في يوم معين، يوضــح الجدول التالي بيانات الزبائن من السـاعة $09:30$ وحتى الساعة $10:00$:

الزبائن	الزمن	نوع الزبون	زمن مغـادرة الطابور	مغادرة النظام
1	09:30	1	09:30	09:32
2	09:31	1	09:32	09:34
3	09:32	2	09:34	09:37
4	09:35	1	09:37	09:39
5	09:36	2	09:39	09:42
6	09:40	2	09:42	09:45
7	09:43	2	09:45	09:48
8	09:45	1	09:48	09:50
9	09:50	2	09:50	09:53
10	09:52	1	09:53	09:55

وبالتالي نجد أن $\mu_1 = 2$ ،$\mu_2 = 3$ ، $\lambda = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

احتمالات الانتقال: 1,1,2,1,2,2,2,1,2,1

أي أن مصفوفة الانتقال:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = \frac{P_{21}}{P_{12} + P_{21}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{4} + \frac{3}{5}} = 0.44$$

$$\pi_2 = \frac{P_{12}}{P_{12} + P_{21}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{3}{5}} = 0.56$$

$$\pi = (0.44 \quad 0.56)$$

$$ET_n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\mu_{ij}} \, P_{ij}(t)\pi_i$$

$$= (0.44 \quad 0.56) \begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.4067$$

$$ET_n^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{2}{{\mu^2}_{ij}} \, P_{ij}(t)\pi_i$$

$$(0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix} 0.25\left(\frac{2}{4}\right) & 0.75\left(\frac{2}{4}\right) \\ 0.6\left(\frac{2}{9}\right) & 0.4\left(\frac{2}{9}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0.344$$

$$V(T_n) = ET_n^2 - (ET_n)^2$$

$$= 0.344 - (0.4067)^2 = 0.1786$$

$$E(T_n, T_{n+1}) = \sum_{i,j,k=1}^{m} \frac{1}{\mu_{ij}} P_{ij}P_{jk}\pi_i$$

$$= (0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$= 0.0825$$

$$cov(T_n, T_{n+1}) = E(T_n, T_{n+1}) - E(T_n) * E(T_{n+1})$$

$$E(T_{n+r}) = \pi\, P^{r-1}\left(\frac{1}{\mu_{ij}} P_{ij}\right)$$

$$E(T_{n+1}) = \pi\, P^{1-1}\left(\frac{1}{\mu_{ij}} P_{ij}\right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0.4067$$

$$cov(T_n, T_{n+1}) = 0.0825 - 0.4067 * 0.4067 = -0.0829$$

$$\rho(T_n, T_{n+1}) = \frac{cov(T_n, T_{n+1})}{\sqrt{var(T_n) * var(T_{n+1})}}$$

$$E(T_{n+r}^2) = \pi\, P^{r-1}\left(\frac{2}{\mu_{ij}^2} P_{ij}\right)$$

$$E(T_{n+1}^2) = \pi\, P^{1-1}\left(\frac{2}{\mu_{ij}^2} P_{ij}\right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix} 0.25\left(\frac{2}{4}\right) & 0.75\left(\frac{2}{4}\right) \\ 0.6\left(\frac{2}{9}\right) & 0.4\left(\frac{2}{9}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.344$$

$$var(T_{n+1}) = E(T_{n+1}^2) - (ET_{n+1})^2$$

$$= 0.344 - (0.4067)^2 = 0.1786$$

$$\rho(T_n, T_{n+1}) = -\frac{-0.0829}{\sqrt{0.1786 * 0.1786}} = -0.4642$$

$$E(T_{n+2}) = \pi\, P^{2-1}\left(\frac{1}{\mu_{ij}} P_{ij}\right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0.4077$$

$$E(T_{n+2}^2) = \pi\, P^{2-1}\left(\frac{2}{\mu_{ij}^2} P_{ij}\right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix}0.25 & 0.75\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.25\left(\frac{2}{4}\right) & 0.75\left(\frac{2}{4}\right)\\ 0.6\left(\frac{2}{9}\right) & 0.4\left(\frac{2}{9}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= 0.3461$$

$$var(T_{n+2}) = E(T_{n+2}^2) - (ET_{n+2})^2$$

$$0.3461 - (0.4077)^2 = 0.18$$

$$E(T_n, T_{n+2}) = \pi\left(\frac{1}{\mu_{ij}}P_{ij}\right) * \; P^{r-1} * \left(\frac{1}{\mu_{jk}}P_{jk}\right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix}\frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2}\\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.25 & 0.75\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2}\\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= 0.1433$$

$$cov(T_n, T_{n+2}) = E(T_n, T_{n+2}) - E(T_n) * E(T_{n+2})$$

$$= 0.1433 - 0.4067 * 0.4076 = -0.0225$$

$$\rho(T_n, T_{n+2}) = \frac{cov(T_n, T_{n+2})}{\sqrt{var(T_n) * var(T_{n+2})}}$$

$$\rho(T_n, T_{n+2}) = -\frac{-0.0225}{\sqrt{0.1786 * 0.18}} = -0.123$$

$$E(T_{n+3}) = \pi\, P^{3-1}\left(\frac{1}{\mu_{ij}}P_{ij}\right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0.4073$$

$$E(T_{n+3}^2) = \pi\, P^{3-1}\left(\frac{2}{\mu_{ij}^2} P_{ij}\right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0.25\left(\frac{2}{4}\right) & 0.75\left(\frac{2}{4}\right) \\ 0.6\left(\frac{2}{9}\right) & 0.4\left(\frac{2}{9}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0.3455$$

$$var(T_{n+3}) = E(T_{n+3}^2) - (ET_{n+3})^2$$

$$= 0.3455 - (0.4073)^2 = 0.1796$$

$$E(T_n, T_{n+3}) = \pi\left(\frac{1}{\mu_{ij}} P_{ij}\right) * \; P^{3-1} * \left(\frac{1}{\mu_{jk}} P_{jk}\right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0.1654$$

$$cov(T_n, T_{n+3}) = E(T_n, T_{n+3}) - E(T_n) * E(T_{n+3})$$

$$= 0.1654 - (0.4067)(0.4073) = -2.4891 * 10^{-4}$$

$$\rho(T_n, T_{n+3}) = \frac{cov(T_n, T_{n+3})}{\sqrt{var(T_n) * var(T_{n+3})}}$$

$$\rho(T_n, T_{n+3}) = \frac{-2.4891 * 10^{-4}}{\sqrt{0.1786 * 0.1796}} = -1.3898 * 10^{-3}$$

$$E(T_{n+4}) = \pi\, P^{4-1} \left(\frac{1}{\mu_{ij}} P_{ij} \right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56) \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0.4073$$

$$E(T_{n+4}^2) = \pi\, P^{4-1} \left(\frac{2}{\mu_{ij}^2} P_{ij} \right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56) \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 0.25\left(\frac{2}{4}\right) & 0.75\left(\frac{2}{4}\right) \\ 0.6\left(\frac{2}{9}\right) & 0.4\left(\frac{2}{9}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0.3457$$

$$var(T_{n+4}) = E(T_{n+4}^2) - (ET_{n+4})^2$$

$$= 0.3457 - (0.4073)^2 = 0.1798$$

$$E(T_n, T_{n+4}) = \pi \left(\frac{1}{\mu_{ij}} P_{ij} \right) * \; P^{4-1} * \left(\frac{1}{\mu_{jk}} P_{jk} \right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0.4066$$

$$cov(T_n, T_{n+4}) = E(T_n, T_{n+4}) - E(T_n) * E(T_{n+4})$$

$$= 0.4066 - (0.4067)(0.4073) = 0.241$$

$$\rho(T_n, T_{n+4}) = \frac{cov(T_n, T_{n+4})}{\sqrt{var(T_n) * var(T_{n+4})}}$$

$$\rho(T_n, T_{n+4}) = \frac{0.241}{\sqrt{0.1786 * 0.1798}} = 1.345$$

$$E(T_{n+5}) = \pi\, P^{5-1}\left(\frac{1}{\mu_{ij}} P_{ij}\right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0.4073$$

$$E(T_{n+5}^2) = \pi\, P^{5-1}\left(\frac{2}{\mu_{ij}^2} P_{ij}\right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 0.25\left(\frac{2}{4}\right) & 0.75\left(\frac{2}{4}\right) \\ 0.6\left(\frac{2}{9}\right) & 0.4\left(\frac{2}{9}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0.3456$$

$$var(T_{n+5}) = E(T_{n+5}^2) - (ET_{n+5})^2$$

$$= 0.3456 - (0.4073)^2 = 0.1797$$

$$E(T_n, T_{n+5}) = \pi\left(\frac{1}{\mu_{ij}} P_{ij}\right) * \ P^{5-1} * \left(\frac{1}{\mu_{jk}} P_{jk}\right)$$

$$= (0.44 \quad 0.56)\begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} \frac{0.25}{2} & \frac{0.75}{2} \\ \frac{0.6}{3} & \frac{0.4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0.1656$$

$$cov(T_n, T_{n+5}) = E(T_n, T_{n+5}) - E(T_n) * E(T_{n+5})$$

$$= 0.1656 - (0.4067)(0.4073) = -4.891 * 10^{-5}$$

$$\rho(T_n, T_{n+5}) = \frac{cov(T_n, T_{n+5})}{\sqrt{var(T_n) * var(T_{n+5})}}$$

$$\rho(T_n, T_{n+5}) = \frac{-4.891 * 10^{-5}}{\sqrt{0.1786 * 0.1797}} = -2.7301 * 10^{-4}$$

النتائج والتوصيات:

أهم النتائج التي تم التوصل إليها والتوصيات:

١- تعميم نظام الخدمة $M/M/1$ إلى نظام الخدمة المقترح $M/MRP/1$.

٢- نمذجة أزمنة التخديم باستخدام طوري تجديد ماركوف.

٣- فعالية النموذج المقترح $(M/MRP/1)$ على دراسة نماذج تخديم بمخدم واحد وأزمنة تخديم مرتبطة.

٤- استنتاج الصيغ الرياضية لدالة التوزيع والتوقع الرياضي والتباين والعزوم من مراتب عليا لأزمنة تخديم تجديد ماركوف.

٥- استنتاج الارتباطات بين أزمنة التخديم لمصفوفة انتقال بخطوة واحدة وبعد r-خطوة.

٦- دراسة الارتباطات بين نوعين من الزبائن وتطبيق ذلك على عدة أمثلة مقترحة.

٧- نوصي بتطبيق النظام المقترح على أنظمة تخديم بمخدم واحد وأكثر من نوعين من الزبائن.

٨- نوصي باستنتاج الصيغ الرياضية المتعلقة باحتمالات وجود n-زبون وإيجاد مقاييس الأداء المتعلقة بالنظام المقترح.

المراجع:

[1] Chen , J. , Li , Kim-Hung and Lam, Y., (2010), "Bayesian Computation for
Geometric Process in Maintenance Problems". Mathematics and Computers in
Simulation, 81,771-781.

[2] cox, David (1970) , Renewal Theory London: Methuen & Co.P.142.

[3] Howard M. Taylor, Samuel Karlin, An Introduction to Stochastic Modeling 3, Statistical Consultant Onancock Virginia, Department of Mathematics Stanford University Stanford California, 1998, 1994, 1984 by Academic Press

[4] N. Bacaer,(2011), A Short History of Mathematical Population Dynamics,
Springer.

[5] MEDHI.J, Stochastic Models in Queuing Theory (Second Edition), science direct, 2003

[6] PRABHU.N.U, Markov Renewal And Markov-Additive Processes, School of operations research and Industrial Engineering College of Engineering Cornell University Ithaca, New York 14853-3801,October 1991.

[7] Harry F.M, Gary C.M, Peter R.N, Semi-Markov Processes and Reliability, University Department of Mathematics and Statistics,

[8] A.Gut, 1995, An Intermediate Course in Probability, Springer

[9] M. Ross Sheldon, 2010, Introduction to Probability Models
Tenth Edition,
Elsevier.

[10] Gallager, R. G., (1996), " Discrete stochastic processes ".
springer
science+business media, LLC, New York.
[11] Lam, Y., (2007), "The Geometric Process and its Applications".
World
Scientic, Singapore.
[12] Matloff, N., (2006), "Renewal Theory and some Applications".
university
of California, Davi.
[13] Pyke, R.(1961a) Markov renewal processes: definitions and
preliminary
properties. Ann. Math. Statist., 32,1231-1242.
[14] Howard M. Taylor, Samuel Karlin, An Introduction to
Stochastic
Modeling 3, Statistical Consultant Onancock Virginia, Department
of
Mathematics Stanford University Stanford California, 1998, 1994,
1984 by
Academic Press.
[15] Franciszek.G,(2015), Semi Markov Processes:Application in
System
Reliability and Maintenance.Polish Naval University Gdyia, Poland
Elsevier.
[16] U.N.bhat .G.K.Miller, and S.S. Rao (1997), Statistical analysis
of
queueing systems, in J.H. Dshalalow, ed., Frontiers in Queueing,
CRC Press,
New York, Chapter 13,351-393.

[17] U.Narayan Bhat, (2008), An Introduction to Queueing Theory, Statistical
Science & Operations Research , USA, Dallas, TX 75275-0332.