دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية ذات أمثال متغيرة زمنياً

ايمان احمد حسين[1] أ.د. سامح العرجه[2]

ملخص البحث:

ندرس في هذا البحث استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية بمعاملات متغيرة زمنياً، وتشمل الدراسة الجمل المتجانسة وغير المتجانسة.

في البداية ذكرنا مبرهنات وتعاريف أساسية في الاشتقاق الكسري، بالإضافة إلى تعاريف ومفاهيم أساسية في الاستقرار، ثم تطرقنا إلى عرض متراجحات أساسية لدراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية كسرية بمعاملات متغيرة، وهي تعتبر أداة مهمة في الدراسة.

بالاعتماد على نظريات تابع ليبانوف وتابع ميتاج- ليفلر، حصلنا على ثلاث مبرهنات للاستقرار وهذه المبرهنات تعطي شروط كافية لاستقرار حل الجمل المتجانسة وغير المتجانسة.

كلمات مفتاحية: الجمل الكسرية، تابع ميتاج-ليفلر، الاستقرار، تابع ليبانوف، متراجحة جورنويل-بيلمان المعدلة، المشتق الكسري المتزاو، التفاضل والتكامل الكسري.

Study Stability Solution system of fractional differential equations with variable coefficients

Abstract

In this paper, we study stability of system of fractional equations with variable

coefficients, which includes the homogeneous and nonhomogeneous cases

Whereas at the beginning we mentioned theorems and basic definitions of fractional derivation, in addition to definition and basic concepts of stability. Then we dealt with presenting basic inequalities to study the stability of fractional differential systems, which is an important tool in the study.

Based on the theories Lyapunov function and Mittag- Leffler function, we obtain three theorems on stability, which give some sufficient conditions on stability, for homogeneous systems and the nonhomogeneous systems.

Keywords: Fractional system, Mittag– Leffler function, Stability, Lyapunov function, Modified Gronwall– Bellman inequality, Conformable fractional derivative, Fractional calculus.

1-مقدمة:

يعود تاريخ التفاضل والتكامل من مرتبة كسرية والذي هو تعميم للتفاضل والتكامل من مرتبة صحيحة إلى أكثر من 300 سنة.

في العقود الأخيرة الماضية جذبت النماذج الرياضية من مرتبة كسرية اهتماماً متزايداً، وذلك منذ أن أظهرت أفضلية في وصف الذاكرة والخواص الوراثية للعمليات الشاذة [6,12].

لقد تطورت نظرية الاستقرار للجمل من مرتبة كسرية نظراً للدور الهام الذي تلعبه نظرية الاستقرار في الهندسة والتطبيقات الفيزيائية [11].

قدّم العديد من الباحثين طرائق متنوعة لدراسة استقرار حل الجملة المدروسة.

تم تقديم شروط لازمة وكافية لاستقرار حل الجملة المعطاة باستخدام مبدأ القيم الذاتية لمصفوفة أمثال الجملة المدروسة [8].

تم تمديد طريقة ليبانوف المستخدمة في دراسة استقرار حل الجمل الغير خطية من مرتبة صحيحة إلى دراسة استقرار حل الجمل الغير خطية من مرتبة كسرية [3,10].

تم تقديم معايير كافية لإثبات الاستقرار التقاربي لحل الجمل الغير خطية من مرتبة كسرية وذلك باستخدام تابع ميتاج ليفلر [1].

تم تقديم شروط لازمة وغير كافية لإثبات استقرار حل الجمل الغير خطية من مرتبة كسرية باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة، عام 2018 قدم رحيم وسيماب بحثاً حول موضوع النقطة الثابتة يتضمن الشروط الكافية لوجود واستقرار حل معادلة تفاضلية كسرية غير خطية [9].

نظراً للصعوبات التي تواجهنا في دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية ذات أمثال متغيرة زمنياً، من خلال هذا البحث قدمنا طريقة فعالة للتغلب على هذه الصعوبات، في هذه الطريقة لا نحتاج لإيجاد حل الجملة المدروسة.

تتلخص هذه الطريقة بالاعتماد على مبدأ ليبانوف في الاستقرار بالإضافة للاستفادة من خواص تابع ميتاج ليفلر حيث استطعنا الحصول على شروط تضمن لنا استقرار حل الجملة المدروسة.

2-أهمية البحث:

إن دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية ذات أمثال متغيرة زمنياً أمر صعب ومعقد، نقدم من خلال هذا البحث طريقة عملية وفعالة للحصول على الاستقرار، وذلك بالاعتماد على تابع ليبانوف بالإضافة إلى استخدام متراجحة جورنويل–بيلمان المعدلة.

3-مشكلة البحث:

إن دراسة الاستقرار أمر بالغ الأهمية في المجالات التطبيقية، تأتي مشكلة البحث لتوضح أهمية دراسة استقرار الحل في الحصول على أنظمة مستقرة زمنياً.

4- هدف البحث:

إن هدف البحث هو تقديم معايير مختلفة لدراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية ذات أمثال متغيرة زمنياً. حيث نهدف من خلال هذا البحث إلى وضع نظريات تتضمن شروط كافية لاستقرار حل الجملة المعنية بالدراسة، وذلك باستخدام أدوات ومفاهيم رياضية مختلفة مثل: تابع ليبانوف، متراجحة جورنويل–بيلمان المعدلة، خواص تابع ميتاج–ليفلر.

5- أساسيات:

تعريف (1): [13] ليكن لدينا: $f:[0\,,\infty[\to\mathbb{R}$ تابع قابل للمفاضلة n مرة يعرف المشتق الكسري المتزاو للتابع f بالشكل:

$$ {}^{G}D^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{(n)}\left(t e^{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}} \varepsilon t^{1-\alpha}\right) - f^{(n)}(t)}{\varepsilon} $$

$\Gamma(\ )$: تابع غاما، $n\in\mathbb{N}\ ,t>0, n-1<\alpha<n$

خاصة (1): [13] إذا كان التابع $f:[0\,,\infty[\to\mathbb{R}$ قابل للمفاضلة α مرة في النقطة $t>0$ عندئذٍ:

$$ {}^{G}D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}t^{1-\alpha}\frac{df}{dt} \qquad ;\ 0<\alpha<1 $$

مبرهنة (1): [13] لتكن $0<\alpha\le 1$ والتوابع f,g قابلة للمفاضلة α مرة في النقطة $t>0$ عندئذٍ:

$$ (1)\ {}^{G}D^{\alpha}(af+bg)=a\left({}^{G}D^{\alpha}f\right)+b\left({}^{G}D^{\alpha}g\right) \qquad ;\ \forall a,b\in\mathbb{R} $$
$$ (2)\ {}^{G}D^{\alpha}(\lambda)=0 \qquad ;\ \lambda=const $$
$$ (3)\ {}^{G}D^{\alpha}(fg)=\left({}^{G}D^{\alpha}f\right)g+\left({}^{G}D^{\alpha}g\right)f $$
$$ (4)\ {}^{G}D^{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\left({}^{G}D^{\alpha}f\right)g-\left({}^{G}D^{\alpha}g\right)f}{g^{2}} $$
$$ (5)\ {}^{G}D^{\alpha}(f\circ g)(t)={}^{G}D^{\alpha}(f)\big(g(t)\big)\,{}^{G}D^{\alpha}(g)(t) $$

تعريف (2): [13] ليكن f تابع قابل للمكاملة ومعرّف على $(t_0,t]$ حيث $t>t_0\,,t_0\ge 0$ يعرف التكامل الكسري للتابع f من المرتبة $\alpha\in\mathbb{R}$ بالشكل:

$$ \mathrm{I}_{t_0}^{\alpha}f(t)=\Gamma(1-\alpha)\int_{t_0}^{t}\tau^{\alpha-1}f(\tau)\,d\tau $$

مبرهنة (2): [13] ليكن f تابع مستمر والتكامل الكسري للتابع f من المرتبة α موجود عندئذٍ يكون:

$$ {}^{G}D^{\alpha}\left(\mathrm{I}_{t_0}^{\alpha}f\right)(t)=f(t) $$

حيث: $t>t_0\,,t_0\ge 0,\alpha\in(0,1)$

تعريف (3): [3] يعطى تابع ميتاج ليفلر بوسيط واحد α بالعلاقة:

$$\mathrm{E}_{\alpha}(z)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{z^{\kappa}}{\Gamma(\alpha\kappa+1)} \qquad ;\alpha>0,\ \alpha\in\mathbb{R}\ ,z\in\mathbb{C}$$

يعطى تابع ميتاج ليفلر بوسيطين α,β بالعلاقة:

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{z^{\kappa}}{\Gamma(\alpha\kappa+\beta)} \qquad ;\ \beta>0,\ \alpha>0$$

خاصة (2): [2] من أجل $0<\alpha\leq 1$:

$$(1)\ \int_{0}^{t}\frac{d^{\alpha}\tau}{\tau}=\ln_{\alpha}t$$

$$(2)\ \mathrm{E}_{\alpha}\left((t+\tau)^{\alpha}\right)=\mathrm{E}_{\alpha}\left(t^{\alpha}\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\tau^{\alpha}\right)$$

خاصة (3): [7] لتكن $\alpha>0\ ,\alpha,\beta\in\mathbb{C}\ ,\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ عندئذٍ:

$$\mathrm{A}\,\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(\mathrm{A})=\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(\mathrm{A})\,\mathrm{A}$$

خاصة (4): **[5]** من أجل:

$$\frac{\alpha\pi}{2}<\arg(\mathrm{Z})<2\pi-\frac{\alpha\pi}{2} \qquad ;\left|\arg(\mathrm{Z})\right|>\frac{\alpha\pi}{2}$$

يعرف تابع ميتاج–ليفلر $\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\lambda t^{\alpha}\right)$ بالعلاقة:

$$\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\lambda t^{\alpha}\right)\cong\begin{cases}1-\lambda\dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\cong\exp\left\{-\lambda\dfrac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right\} & ;\ t\to 0^{+}\\[2ex] \dfrac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} & ;t\to\infty\end{cases}$$

حيث: $\mathrm{Z}\in\mathbb{C}\ ,\lambda>0,0<\alpha<1,t\in[0,\infty)$

5–نتائج أساسية:

جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية متجانسة بمعاملات متغيرة:

بفرض أنه لدينا الجملة:

$$^{G}D^{\alpha}x(t)=\mathrm{A}(t)x(t) \qquad (1)$$

حيث: $[t_0,t[\to\mathbb{R}^n$: $x(t)=[x_1(t),x_2(t),......,x_n(t)]^T$ ، $t>t_0,0<\alpha<1$

$\mathrm{A}(t):[t_0,\infty[\to\mathbb{R}^{n\times n}$ مصفوفة تابعية مستمرة على $[t_0,\infty[$

T: يرمز إلى منقول المتجه $x(t)$

تعريف (4): [5] نقول بأن حل الجملة المدروسة مستقر إذا وجد من أجل كل $\zeta>0$ عدد $\delta>0$ بحيث أنه إذا تحقق: $\|x(t_0)\|<\delta$ فإن ذلك يقتضي أنّ:

$$\|x(t)\|<\zeta \qquad ;\forall t\in[t_0,T]\subset\mathbb{R}$$

$\|\ \|$: يرمز إلى نظيم المتجه $x(t)$

تعريف (5): [5] نقول بأن حل الجملة المدروسة مستقر تقاربياً إذا وجد عدد $\delta>0$ بحيث أنه إذا كان $\|x(t_0)\|<\delta$ فإن: $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$

تعريف (6): [3] نقول بأن حل الجملة المدروسة مستقر حسب مفهوم ميتاج–ليفلر إذا تحقق الشرط:

$$\|x(t)\|\le\left\{m\left[x(t_0)\right]\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\lambda(t-t_0)^{\alpha}\right)\right\}^{b}$$

حيث: $t>t_0,0<\alpha<1$ ، $\lambda>0,b>0$ ، $m(0)=0,m(x)\ge0$ ، و m_0 هي ثابت ليبشتز

$$x\in\mathrm{B}\subset\mathbb{R}^n$$

تعريف (7): [4] الحل الصفري للجملة المدروسة مستقر بانتظام بالنسبة لـ t_0 إذا كان:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma(\varepsilon) > 0$ تحقق المتراجحة $\|x_0\| < \sigma(\varepsilon)$ يقتضي تحقق

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad ; t \geq t_0$$

$x(t, t_0, x_0)$: يمثل الحل التذبذبي والذي يحقق الشرط الابتدائي: $x(t_0) = x_0$

تعريف (8): [4] الحل الصفري للجملة المدروسة يكون جاذبي إذا كان:

$$\forall t_0 \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \sigma(t_0) > 0, \exists T(\varepsilon, t_0, x_0) > 0:$$

تحقق $\|x_0\| < \sigma(t_0)$ يقتضي تحقق $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad ; t \geq t_0 + T$ أي $\lim\limits_{t \to \infty} x(t, t_0, x_0) = 0$

تعريف (9): [4] التابع $V(t, x)$ محدد موجب هذا يعني أنه يوجد تابع $\varphi(\|x\|) \in K$ يحقق: $V(t, x) \geq \varphi(\|x\|)$

تعريف (10): [4] نقول عن التابع H أنه من الصف K إذا كان H تابع مستمر ويحقق $H(0) = 0$

نظرية (1): بفرض أن التابع f مستمر على $\overline{\square} = \square = \{(t, x) \ ; |t - \tau| \leq a - |x - \xi| \leq b\}$ وغير متناقص بالنسبة لـ x وأن $x = \varphi(t)$ مستمر، التابع $\varphi(t)$ يحقق المتراجحة التكاملية:

$$\begin{cases} \varphi(t) \leq \xi + \int\limits_{\tau}^{t} f(s, \varphi(s))ds & ; \tau \leq t \leq \tau + h \\ \varphi(\tau) \leq \xi \end{cases}$$

وذلك من أجل $|t-\tau|\le a, (t,\varphi(t))\in \square$

التابع $\phi(t)$ يحقق المعادلة التفاضلية:

$$\begin{cases} \dfrac{d^{\alpha}x}{dt^{\alpha}} = f(t,x) \\ x(\tau)=\xi \end{cases}$$

حيث $\tau\le t\le \tau+h$، عندئذٍ المتراجحة التالية محققة:

$$\varphi(t)\le \phi(t) \quad ;t\in[\tau,\tau+h]$$

حيث $\mathrm{M}=\max\limits_{t,x\in\square}|f(t,x)|\ \ ,\ \ h=\min\left(a,\dfrac{b}{\mathrm{M}}\right)$

مبرهنة (3): (متراجحة جورنويل–بيلمان المعدلة): بفرض أن التوابع $u(t),g(t)$ توابع مستمرة حقيقية وغير سالبة، و c ثابت حقيقي غير سالب عندئذٍ $\forall t\in[t_0,t_1]$، وبفرض أن: $u(t)\le c+\int\limits_{t_0}^{t} g(\varepsilon)u(\varepsilon)d\varepsilon$

عندئذٍ تتحقق المتراجحة التالية: $u(t)\le c\mathrm{E}_{\alpha}\left(\int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau^{\alpha}\right)$

البرهان: بفرض أنه لدينا المعادلة التفاضلية:

$$\begin{cases} \dfrac{d^{\alpha}V(t)}{dt^{\alpha}} = g(t)V(t) \\ V(t_0)=c \end{cases}$$

والتي تملك الحل:

$$\frac{d^{\alpha}V(t)}{V(t)} = g(t)dt^{\alpha}$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d^{\alpha}V(\tau)}{V(\tau)}=\int_{t_0}^{t}g(\tau)d\tau^{\alpha}$$

$$\ln_{\alpha}\frac{V(t)}{V(t_0)}=\int_{t_0}^{t}g(\tau)d\tau^{\alpha}$$

$$V(t)=c\mathrm{E}_{\alpha}\left(\int_{t_0}^{t}g(\tau)d\tau^{\alpha}\right)$$

حسب النظرية (1) نجد: $u(t)\le V(t)=c\mathrm{E}_{\alpha}\left(\int_{t_0}^{t}g(\tau)d\tau^{\alpha}\right)$

طريقة ليبانوف في الاستقرار: تعتمد هذه الطريقة على إيجاد تابع موجب مشتقه أصغر من الصفر يدعى تابع ليبانوف، إن وجود مثل هذا التابع يعني تماماً استقرار حل الجملة المدروسة.

مبرهنة (4): يكون الحل الصفري للجملة (1) مستقر تقاربياً إذا تحقق الشرط:

$$\|x(t)\|^{2}\le\frac{\delta_2(t_0)}{\delta_1(t_0)}\|x(t_0)\|^{2}\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\gamma(t_0)t^{\alpha}\right)$$

حيث: $0<\gamma(t_0)\le\frac{1}{\delta_1(t_0)}$

البرهان: من أجل دراسة استقرار حل الجملة:

$$^{G}D^{\alpha}x(t)=\mathrm{A}(t)x(t) \qquad (1)$$

نفرض أن:

$$V(t,x)=x^{*}C(t)x$$

وبالتالي فإن:

$$^{G}D^{\alpha}V(t,x)=\left({}^{G}D^{\alpha}x^{*}\right)C(t)x+x^{*}\left({}^{G}D^{\alpha}C(t)\right)x+x^{*}C(t)\left({}^{G}D^{\alpha}x\right)$$

$$^{G}D^{\alpha}V(t,x)=x^{*}\mathrm{A}^{*}C(t)x+x^{*}\frac{d^{\alpha}C(t)}{dt^{\alpha}}x+x^{*}C(t)\mathrm{A}x$$

$$^{G}D^{\alpha}V(t,x)=x^{*}\left[\mathrm{A}^{*}C(t)+\frac{d^{\alpha}C(t)}{dt^{\alpha}}+C(t)\mathrm{A}\right]x$$

لنعتبر:

$$^{G}D^{\alpha}V(t,x)=-W(t,x)$$

حيث:

$$W(t,x)=x^{*}\mathrm{B}(t)x$$

عندها:

$$^{G}D^{\alpha}V(t,x)=-x^{*}\mathrm{B}(t)x$$

$$\Rightarrow x^{*}\left[\mathrm{A}^{*}C(t)+\frac{d^{\alpha}C(t)}{dt^{\alpha}}+C(t)\mathrm{A}\right]x=-x^{*}\mathrm{B}(t)x$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}^{*}C(t)+\frac{d^{\alpha}C(t)}{dt^{\alpha}}+C(t)\mathrm{A}=-\mathrm{B}(t) \qquad (2)$$

لنوجد أولاً حل المعادلة المتجانسة:

$$\frac{d^{\alpha}C(t)}{dt^{\alpha}}+\mathrm{A}^{*}C(t)+C(t)\mathrm{A}=0$$

لنضرب الطرفين من اليسار بـ $\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)$ ومن اليمين بـ $\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)$ نجد:

$$\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\left[\frac{d^{\alpha}C\left(t\right)}{dt^{\alpha}}+\mathrm{A}^{*}C\left(t\right)+C\left(t\right)\mathrm{A}\right]\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)=0$$

$$\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\frac{d^{\alpha}C\left(t\right)}{dt^{\alpha}}\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)+\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\mathrm{A}^{*}C\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)+\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(t\right)\mathrm{A}\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)=0$$

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\left[\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right]=0$$

بمكاملة الطرفين:

$$\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)=C\left(0\right) \qquad (3)$$

$$\Rightarrow C\left(t\right)=\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(0\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}t^{\alpha}\right)$$

من أجل حل المعادلة غير المتجانسة نعتبر $C\left(0\right)$ تابعة لـ t ونشتق:

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}C\left(t\right)=-\mathrm{A}^{*}\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(0\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}t^{\alpha}\right)+\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\frac{d^{\alpha}C\left(0\right)}{dt^{\alpha}}\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}t^{\alpha}\right)+$$
$$-\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(0\right)\mathrm{A}\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}t^{\alpha}\right)$$

نعوض في المعادلة غير المتجانسة (2) نجد:

$$-\mathrm{A}^{*}\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(0\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}t^{\alpha}\right)+\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\frac{d^{\alpha}C\left(0\right)}{dt^{\alpha}}\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}t^{\alpha}\right)-\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(0\right)\mathrm{A}\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}t^{\alpha}\right)$$
$$+\mathrm{A}^{*}\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(0\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}t^{\alpha}\right)+\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(0\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\mathrm{A}=-\mathrm{B}\left(t\right)$$

$$\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\frac{d^{\alpha}C\left(0\right)}{dt^{\alpha}}\mathrm{E}_{\alpha}\left(-\mathrm{A}t^{\alpha}\right)=-\mathrm{B}\left(t\right)$$

$$\Rightarrow\frac{d^{\alpha}C\left(0\right)}{dt^{\alpha}}=-\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)$$

حسب (3) العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\left[\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right]=-\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)$$

$$\mathrm{I}_{t_0}^{\alpha}\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\left[\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right]=-\mathrm{I}_{t_0}^{\alpha}\left[\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right]$$

$$\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)C\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\Big|_{t_0}^{t}=-\mathrm{I}_{t_0}^{\alpha}\left[\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right]$$

الآن بجعل $t_0=\tau$ و $t\rightarrow\infty$ نحصل على:

$$-\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}\tau^{\alpha}\right)C\left(\tau\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}\tau^{\alpha}\right)=-\mathrm{I}_{\tau}^{\alpha}\left[\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}t^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}t^{\alpha}\right)\right]$$

$$C\left(\tau\right)=\mathrm{I}_{\tau}^{\alpha}\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}\left(t-\tau\right)^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}\left(t-\tau\right)^{\alpha}\right)$$

بتبديل كل t بـ τ وكل τ بـ t نجد:

$$C\left(t\right)=\mathrm{I}_{t}^{\alpha}\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}\left(\tau-t\right)^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(\tau\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}\left(\tau-t\right)^{\alpha}\right)$$

نفرض الآن أن:

$$s=\tau-t$$

$$\Rightarrow ds=d\tau$$

$$\tau\rightarrow\infty\Rightarrow s\rightarrow\infty\quad \&\ \tau\rightarrow t\Rightarrow s\rightarrow 0$$

نعوض فنجد:

$$C\left(t\right)=\mathrm{I}_{0}^{\alpha}\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}^{*}s^{\alpha}\right)\mathrm{B}\left(s+t\right)\mathrm{E}_{\alpha}\left(\mathrm{A}s^{\alpha}\right)$$

لنفرض أن $\delta_1(t)$ و $\delta_2(t)$ هي دوال القيم الذاتية الصغرى والعظمى على الترتيب للمصفوفة $C(t)$ ومنه يتحقق أن:

$$\delta_1(t)\|x(t)\|^2 \le V(t,x) \le \delta_2(t)\|x(t)\|^2 \quad ; \; t \in (-\infty,+\infty) \qquad (4)$$

بما أن كل من $W(t,x)$ و $V(t,x)$ دوال موجبة تماماً توجد قيمة $0<\gamma(t_0)$ بحيث تحقق:

$$\gamma(t_0)V(t,x) \le W(t,x) \le \|x(t)\|^2$$

$$\gamma(t_0)V(t,x) \le \|x(t)\|^2$$

$$\gamma(t_0)V(t_0,x_0) \le \|x(t_0)\|^2 \Rightarrow \gamma(t_0) \le \frac{\|x(t_0)\|^2}{V(t_0,x_0)}$$

لكن من (4) لدينا:

$$\delta_1(t)\|x(t)\|^2 \le V(t,x) \Rightarrow \delta_1(t_0)\|x(t_0)\|^2 \le V(t_0,x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V(t_0,x_0)} \le \frac{1}{\delta_1(t_0)\|x(t_0)\|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\|x(t_0)\|^2}{V(t_0,x_0)} \le \frac{1}{\delta_1(t_0)} \Rightarrow \gamma(t_0) \le \frac{1}{\delta_1(t_0)}$$

من جهة أخرى:

$$\gamma(t_0)V(t,x) \le W(t,x)$$

$$\gamma(t_0)V(t,x) \le -{}^{G}D^{\alpha}V(t,x)$$

$$\Rightarrow -\gamma(t_0)V(t,x) \ge {}^{G}D^{\alpha}V(t,x)$$

$$\frac{{}^{G}D^{\alpha}V(t,x)}{V(t,x)} \le -\gamma(t_0) \Rightarrow$$

$$\frac{d^{\alpha}V(t,x)}{V(t,x)} \le -\gamma(t_0)\,dt^{\alpha} \Rightarrow$$

$$\int_0^t \frac{d^{\alpha}V(\tau,x)}{V(\tau,x)} = \int_0^t -\gamma(t_0)\,d\tau^{\alpha}$$

$$\ln_{\alpha}\frac{V(t,x)}{V(t_0,x_0)} \le -t^{\alpha}\gamma(t_0)$$

$$\Rightarrow V(t,x) \le V(t_0,x_0)\,\mathrm{E}_{\alpha}\left(-t^{\alpha}\gamma(t_0)\right)$$

لكن لدينا:

$$\delta_1(t)\left\|x(t)\right\|^2 \le V(t,x)$$

$$\left\|x(t)\right\|^2 \le \frac{1}{\delta_1(t)}V(t,x)$$

$$\left\|x(t)\right\|^2 \le \frac{1}{\delta_1(t)}V(t_0,x_0)\,\mathrm{E}_{\alpha}\left(-t^{\alpha}\gamma(t_0)\right) \quad ;\ \forall t \in [0,\infty)$$

$$\Rightarrow \left\|x(t)\right\|^2 \le \frac{1}{\delta_1(t_0)}V(t_0,x_0)\,\mathrm{E}_{\alpha}\left(-t^{\alpha}\gamma(t_0)\right)$$

وأيضاً لدينا:

$$V(t,x) \le \delta_2(t)\left\|x(t)\right\|^2 \quad ;\forall t \in (-\infty,+\infty)$$

$$V(t_0,x_0) \le \delta_2(t_0)\left\|x(t_0)\right\|^2$$

$$\|x(t)\|^2 \le \frac{1}{\delta_1(t_0)} V(t_0,x_0) \mathrm{E}_\alpha\left(-\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} t^\alpha \gamma(t_0)\right) \le \frac{\delta_2(t_0)}{\delta_1(t_0)} \|x(t_0)\|^2 \mathrm{E}_\alpha\left(-t^\alpha \gamma(t_0)\right)$$

وبما أن: $\mathrm{E}_\alpha\left(-t^\alpha \gamma(t_0)\right) \underset{t\to\infty}{\to} 0$

ومنه: $\|x(t)\| \underset{t\to\infty}{\to} 0$

إذاً حل الجملة المدروسة مستقر تقاربياً.

جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية غير متجانسة:

بفرض أنه لدينا الجملة:

$$ {}^G D^\alpha x(t) = f(t,x) \qquad (5)$$

حيث: $f(t,x) \in \mathbb{C}^1\left[G_{\mathrm{H}}, \mathbb{R}^n\right]$ وأن

$$G_{\mathrm{H}} = \left\{(t,x) \quad ; t \ge t_0, \|x\| < \mathrm{H} = \mathrm{constant}\right\}$$

$t > t_0, 0 < \alpha < 1$ ، $x(t) = \left[x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots, x_n(t)\right]^T : [t_0, t[\to \mathbb{R}^n$

مبرهنة (5): يكون الحل الصفري للجملة (5) مستقر تقاربياً إذا وجد محدد موجب $V(t,x) \in \mathbb{C}^1\left[G_{\mathrm{H}}, \mathbb{R}^n\right]$ بحيث إن: $\frac{d^\alpha V}{dt^\alpha} \le 0$

البرهان:

ليكن $x = x(t,t_0,x_0)$ حل للجملة (5). بفرض أنه لدينا تابع ليبانوف المعرف بالشكل:

$$V(t,x) = \|x(t_0,t,x)\|^2 \left(1 + \mathrm{E}_\alpha\left(-t^\alpha\right)\right)$$

بما أن $f(t,x)\in\mathbb{C}^{1}\left[G_{\mathrm{H}},\mathbb{R}^{n}\right]$ فهذا يقتضي أن $V(t,x)\in\mathbb{C}^{1}\left[G_{\mathrm{H}},\mathbb{R}^{n}\right]$ لذا الحل الصفري للجملة (5) مستقر بانتظام. وبالتالي $\forall\varepsilon>0$ فإنه يوجد $\delta=\delta(\varepsilon)$ بحيث إنه إذا كان: $\|x\|>\varepsilon$ فإن $\delta(\varepsilon)$ يحقق: $\|x(t_0,t,x)\|>\delta(\varepsilon)$ إذاً $V(t,x)>\delta^{2}(\varepsilon)$ ، بالتالي $V(t,x)$ محدد موجب.

وبسبب جاذبية الحل الصفري فإنه يوجد $\delta_0=\delta(t_0)>0$ يحقق أن

$$\|x(t_0,t,x)\|\le\delta(t_0)$$

وبالتالي $\forall\varepsilon>0$ ، فإنه يوجد $T=T(\varepsilon,t_0)>0$ يحقق:

$$\|x(t_0,t,x)\|\le\varepsilon\quad;(t\ge t_0+T)$$

بوضع $\eta=\delta(t_0)$ ، بالتالي وعندما يكون: $V(t,x)<\eta$ نجد إن:

$$\|x(t_0,t,x)\|^{2}=\frac{V(t,x)}{1+\mathrm{E}_{\alpha}\left(-t^{\alpha}\right)}<\frac{\eta}{1+\mathrm{E}_{\alpha}\left(-t^{\alpha}\right)}<\eta=\delta(t_0)$$

لذلك من أجل: $t\ge t_0+T$ نجد إن: $\|x(t)\|<\varepsilon$.

أي أنه من أجل جميع $(t,x(t))$ التي تحقق: $V(t,x)<\eta$ يكون لدينا:

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$$

من ناحية أخرى لدينا: $V(t,x)=\|x(t_0,t,x)\|^{2}\left(1+\mathrm{E}_{\alpha}\left(-t^{\alpha}\right)\right)$

$$\Rightarrow\frac{d^{\alpha}V(t,x)}{dt^{\alpha}}=\|x(t_0,t,x)\|^{2}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\mathrm{E}_{\alpha}\left(-t^{\alpha}\right)<0$$

إذاً حل الجملة المدروسة مستقر تقاربياً.

جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية غير متجانسة بمعاملات متغيرة:

بفرض أنه لدينا الجملة:

$$ {}^{G}D^{\alpha}x(t)=\mathrm{A}(t)x(t)+f(t,x) \qquad (6)$$

حيث: $x(t)=\left[x_1(t),x_2(t),......,x_n(t)\right]^T:[t_0,t[\to\mathbb{R}^n$ ،

$t>t_0,0<\alpha<1$

$\mathrm{A}(t):[t_0,\infty[\to\mathbb{R}^{n\times n}$ مصفوفة تابعية مستمرة على $[t_0,\infty[$

$f(t,x)\in C^1\left[G_{\mathrm{H}},\mathbb{R}^n\right]$ وأن $G_{\mathrm{H}}=\left\{g(t,x) \quad ;t\ge t_0,\|x\|<\mathrm{H}=\cos\tan t\right\}$

مبرهنة (6): $\forall\varepsilon>0$ فإنه يوجد $\sigma=\sigma(\varepsilon)>0$ يحقق

$x\in D=\left\{x \quad ;\|x\|<\sigma\right\}$ ، $t\in\left[t_0,\infty\right)$

وأن $\|f(t,x)\|<\varepsilon\|x\|$ محقق. يكون الحل الصفري للجملة (6) مستقر حسب ميتاج ليفلر إذا كان الحل الصفري للجملة (1) مستقر حسب ميتاج ليفلر.

البرهان: بفرض أن الحل الصفري للجملة (1) مستقر حسب ميتاج ليفلر، بالتالي يوجد ثابت $1\le\mathrm{M}$ بحيث إن:

$$\|K(t,t_0)\|\le\mathrm{M}\,\mathrm{E}_{\alpha}\left(-(t-t_0)^{\alpha}\right)$$

حيث $K(t,t_0)$ (مصفوفة الانتقال) حل للجملة (1)، بأخذ $\sigma(\varepsilon)>0$ بحيث يحقق:
$\|x\|<\sigma(\varepsilon)$

لكن لدينا: $\|f(t,x)\|<\varepsilon\|x\|$ محقق

يعطى الحل العام للجملة (6) بالشكل:

$$x(t)=K(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}K(t,t_1)f(t_1,x(t_1))dt_1$$

بأخذ $\sigma>0$ وكون الحل مستمر يوجد ثابت $\delta>0$ يحقق أن:

$$\|x(t_0)\|=\|x(t,t_0,x_0)\|<\frac{\sigma}{\mathrm{M}}$$

ومن أجل $t\in[t_0,t_0+\delta]$ يكون لدينا:

$$\|x(t)\|\le \mathrm{M}\,\mathrm{E}_{\alpha}\left(-(t-t_0)^{\alpha}\right)\|x(t_0)\|+\int_{t_0}^{t}\varepsilon \mathrm{M}\,\mathrm{E}_{\alpha}\left(-(t-t_1)^{\alpha}\right)\|x(t_1)\|dt_1$$

حسب متراجحة جورنويل–بيلمان المعدلة نكتب

$$\|x(t)\|\le \mathrm{M}\,\mathrm{E}_{\alpha}\left(-(t-t_0)^{\alpha}\right)\|x(t_0)\|\mathrm{E}_{\alpha}\left(\varepsilon\mathrm{M}(t-t_0)^{\alpha}\right)$$

$$\|x(t)\|\le\|x(t_0)\|\mathrm{M}\mathrm{E}_{\alpha}\left(-(1-\varepsilon\mathrm{M})(t-t_0)^{\alpha}\right)$$

وبفرض أن $(1-\varepsilon\mathrm{M})>0$ يتم المطلوب

التوصيات والمقترحات:

1) دراسة استقرار جملة معادلات تفاضلية كسرية عددياً ومقارنة النتائج مع دراسة الاستقرار تحليلياً.

2) دراسة استقرار جملة معادلات تفاضلية كسرية عشوائية.

3) دراسة استقرار جملة معادلات تفاضلية كسرية بأمثال عشوائية متغيرة زمنياً.

References

1.Chen L, Chai Y, Wu R, Yang J, 2012- Stability and Stabilization of a Class of Nonlinear Fractional Order Systems with Caputo derivative, IEEE Trans Circuits Sys II, Express Briefs, 59(9):602-606.

2.Jumarie, G, 2007- Modeling Fractional Stochastic Systems as Non-Random Fractional Dynamics Driven by Brownian Motions, Applied Mathematical Modeling, 32: 836-859.

3.Li Y, Chen Y, Pudlubny I, 2009- Mittag-Leffler Stability of Fractional Order Nonlinear Dynamic Systems, Automatica, 45(8):1965-1969.

4. Liao X, Wang L and Yu P, 2007- Stability of Dynamical Systems, Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity.

5. Priyadharsini S, 2016- Stability of Fractional Neutral and Integrodifferential Systems, Journal of Fractional Calculus and Applications, 7 (1): 78-102.

6.Pudlubny I, 1999- Fractional Differential Equations, New York: Academic.

7.Popolizio M, 2019- on The Matrix Mittag-Leffler Function, Theoretical Properties and Numerical Computation.

8.Qian D, Li C, Agarwal R P, and Wang P J Y, 2010- Stability Analysis of Fractional Differential System with Rieman- Liouville Derivative, Mathematical and Computer Modelling, 52(5-6): 862-874.

9.Seemab A, UR Rehman M, 2018- Existence and Stability Analysis by Fixed Point Theorems for a class of Nonlinear Caputo Fractional Differential Equations, Dynamic Systems and Applications, 27(3):445-456.

10.Trigeasson J, Maamri N, Sabatier J, Oustaloup A, 2011- a Lyapunov Approach to The Stability of Fractional Differential Equations, Signal Process, 91(3): 437-445.

11.Valdes- Parada F J, Ochoa- Tapia J A, 2007- Effective Medium Equations for Fractional Fick's Law in Parous Media, Physica A, 373: 339-353.

12.Zhou Y, 2014- Basic Theory of Fractional Differential Equations, World Scientific Publishing. Co. pte.Ltd, Hackensack, NJ.

13.ZaKaria M, Moujahid A, Ikhouba M, 2023- a New Fractional Derivative Operator and Applications, Department of Mathematics, 14(1): 1277-1282.