نمذجة أزمنة الوصول البينية في نظام الخدمة $G/M/1/\infty$ باستخدام طوري تجديد ماركوف

د. هادية طهماز*

الملخص

يعد النظام $M/G/1/\infty$ من الأنظمة الهامة في نظرية صفوف الانتظار الذي يستخدم لتحليل وتقييم أداء الأنظمة التي تتعامل مع تدفقات العملاء عبر خادم واحد، والذي يتعامل مع أزمنة تخديم مستقلة بتوزيع احتمالي عام، وقد يصادفنا دراسة حالات تتطلب التعامل مع أزمنة تخديم عشوائية مرتبطة كون هذه الأنظمة تقدم خدمات مختلفة وتتطلب أزمنة عشوائية مختلفة، وبالتالي لابد من استخدام أداة جديدة تعالج هذا النوع من الحالات.

تم في هذا البحث توسيع مفاهيم والأساسيات النظرية للنموذج $M/G/1$ وذلك بالاعتماد على طوريات تجديد ماركوف، من خلال تمثيل أزمنة وصول هذا النموذج بطوري تجديد ماركوف، كما تم استنتاج مصفوفة الانتقال P بالاعتماد على نهاية مصفوفة كيرنل شبه ماركوف للنظام المدروس، ومن ثم استنتاج الصيغة الرياضية العامة للمتجه π_{n_i} الذي يمثل وجود n–زبون في النظام للنوع _i. ومن ثم استنتاج الصيغة الرياضية لـ π_{0_i} لكل نوع من الزبائن بالاعتماد على تعريف الدوال المولدة $\Pi_i\ (Z)$. وأخيراً تم مناقشة الحالة الخاصة لأزمنة وصول بينية أسية لنوعين من الزبائن وتوضيح النتائج من خلال أمثلة وتطبيقات، وتم التوصل إلى أن نظام الخدمة المقترح $\mathrm{GMR}/\mathrm{M}/1/\infty$ هو تعميم لنظام الخدمة $M/G/1/\infty$ كونه يتعامل مع أزمنة وصول مرتبطة ويتمتع بخواص هذا النظام.

الكلمات المفتاحية: طوري تجديد ماركوف، نظام الخدمة G/M/1، كيرنل شبه–ماركوف، أزمنة الوصـــــول البينية، زمن المكوث، الدوال المولدة $\sqcap_i\ (Z)$، المتجه الاحتمالي π_{n_i}، مقاييس الأداء.

* قسم الاحصاء الرياضي، كلية العلوم، جامعة حمص.

Modeling Interarrival times in $G/M/1/\infty$ Queue Using Markov Renewal Process

Dr. HadiaTohmaz*

Abstract

The $G/M/1$ queueing system is a fundamental model in queuing theory, used to analyze and evaluate the performance of systems that manage customer flows through a single server with interarrival times following a general probabilistic distribution. However, there are scenarios requiring the handling of correlated interarrival times, as these systems provide various services and need different random service times. Thus, a new tool is needed to address such cases.

This study extends the concepts and theoretical foundations of the $G/M/1$ model by Markov renewal theory. interarrival times in this model are represented using Markov renewal processes. The transition matrix P is derived from the endpoint of the semi−Markov kernel matrix of the studied system, leading to the general mathematical formula for the vector π_{n_i} which represents the number of customers in the system. Subsequently, the formula for π_{0_i} is derived using the definition of generating functions $\Pi_i\ (Z)$ .Special cases of exponential interarrival times for different customer types are discussed, with results illustrated through examples and applications. The study concludes that the proposed $GMR/M/1$ service system is a generalization of the $G/M/1$ system.

*** Dept. of Mathematical Statistics, Faculty of Science, University of Albaath

Keywords: Markov renewal processes, $G/M/1$ Queue, semi-Markov kernel, interarrival times, sojourn time, Markov renewal generating function.

المقدمة:

تعتبر أنظمة الخدمة من المجالات الأساسية في نظرية الصفوف، حيث تُستخدم في تحليل أداء الأنظمة التي تتعامل مع تدفق العملاء، سواء في خدمات العملاء أو في بيئات التصنيع. يعتبر نموذج G/M/1 من أحد النماذج المهمة التي تُعنى بدراسة أنظمة الخدمة، فهو يمثل نوعًا من الأنظمة التي يتبع فيها وصول العملاء توزيعًا عامًا، بينما تكون أزمنة الخدمة فيه لها التوزيع الأسي. فهو يُفترض وجود خادم واحد يتعامل مع تدفق العملاء، مما يسمح بدراسة تأثير أزمنة الوصول العشوائية على أداء النظام. يعد هذا النموذج مناسبًا لتطبيقات متعددة مثل أنظمة الهاتف، وأنظمة خدمة العملاء، وحتى في المجالات اللوجستية. من خلال دراسة هذا النظام، يمكن تحديد زمن الانتظار، وعدد العملاء في النظام، ومدى تأثير أزمنة الوصول المتنوعة على كفاءة الخدمة. تُظهر الأبحاث المتعلقة بهذا المجال أن نموذج G/M/1 قادر على تقديم رؤى قيمّة حول كيفية تحسين الأداء وزيادة رضا العملاء. كما يتم استخدام هذا النموذج كأساس لتطوير نماذج أكثر تعقيدًا، مثل G/G/1 و M/G/1. [1][2]

نظام الخدمة G/M/1 لديه العديد من التطبيقات في مجالات مختلفة نظراً لمرونته وقدرته على نمذجة سلوك صفوف الانتظار. تُستخدم نماذج G/M/1 لتقدير أزمنة الانتظار للمتصلين، كما يُستخدم في حساب أزمنة الانتظار للعملاء في فروع البنوك، وخاصة في

حالات الخدمة الذاتية أو الخزائن. يُمكن أيضاً استخدامه لتحليل زمن انتظار الركاب عند تسجيل الوصول أو في نقاط التفتيش الأمنية. وبشكل عام يُستخدم في مراكز خدمة العملاء لتحسين تجارب العملاء من خلال تقليل أزمنة الانتظار وتحسين إدارة الصفوف. يُستخدم في تحليل أزمنة الانتظار والازدحام في الشبكات، مثل خوادم الإنترنت أو خدمات التخزين السحابية. كما من تطبيقاته أيضاً إدارة أزمنة الانتظار لمرضى الطوارئ أو العيادات الخارجية، وله العديد من التطبيقات الأخرى. [4][3]

في هذا البحث، سيتم توسيع المفاهيم النظرية الأساسية في نظام $G/M/1$، من خلال اقتراح تمثيل أزمنة الوصول البينية وفق طوري تجديد ماركوف، كما تم استنتاج مصفوفة الانتقال P واستنتاج الصيغ الرياضية العامة للمتجه π_{n_i} و π_{0_i} لكل نوع من الزبائن. وأخيراً تم مناقشة الحالة الخاصة لأزمنة وصول بينية أسية لنوعين من الزبائن وتوضيح النتائج من خلال أمثلة وتطبيقات بهدف تحسين أداء الأنظمة وتوفير رؤى حول كيفية إدارة الطوابير بشكل أكثر فعالية.

مشكلة البحث (***Problem of the Research***):

يعتبر النظام $G/M/1$ من الأنظمة الهامة في نظرية الخدمة الذي يستخدم أدوات قيمة لتحسين فعالية وكفاءة أنظمة الخدمة في مجموعة متنوعة من المجالات، والذي يتعامل مع أزمنة وصول مستقلة بتوزيع احتمالي عام، وقد يصادفنا دراسة حالات تتطلب التعامل مع أزمنة وصول عشوائية مرتبطة غير مستقلة كون هذه الأنظمة تقدم خدمات مختلفة وتتطلب أزمنة عشوائية مختلفة، وبالتالي لابد من استخدام أداة جديدة تعالج هذا النوع من الحالات.

أهداف البحث (***Objectives of the Research***):

1- توسيع المفاهيم النظرية للنموذج G/M/1 بالاعتماد على طوريات تجديد ماركوف.
2- تمثيل أزمنة الوصول البينية في نموذج G/M/1 بطوري تجديد ماركوف.
3- استنتاج مصفوفة الانتقال P بالاعتماد على نهاية مصفوفة كيرنل شبه ماركوف للنظام المدروس.
4- استنتاج الصيغة الرياضية العامة للمتجه π_{n_i}.
5- استنتاج الصيغة الرياضية لـــ π_{0_i} لكل نوع من الزبائن بالاعتماد على تعريف الدوال المولدة $\sqcap_i\ (Z)$.
6- مناقشة الحالة الخاصة لأزمنة وصول أسية لنوعين من الزبائن وتوضيح النتائج من خلال أمثلة وتطبيقات.

المفاهيم النظرية الأساسية:

أولاً: أنظمة الخدمة (queueing system): [4][5]

تعتبر مشكلة الانتظار في صفوف الانتظار من أكثر المشاكل التي نصادفها في حياتنا اليومية، إذ يتتابع وصول العناصر التي تحتاج الخدمة إلى مراكز تقديم الخدمة. فإذا كانت محطة الخدمة مشغولة فإن الزبائن سيقفون أمامها في طابور أو صف انتظار بانتظار تقديم الخدمة لهم. فالهدف تشغيل مراكز الخدمة في مستوى مقبول من الخدمة ضمن مستوى معقول من التكاليف. نشأت نظرية الخدمة على يد الباحث ايرلنغ عام 1909 حيث قدم أول ورقة بحثية عن نظرية الخدمة، وطورها كندال عام 1953 من خلال تقديم طريقة $A/B/C$ لترقيم الطابور.

بفرض أن الزبائن ... $K_1, K_2,$ تصل إلى نظام الخدمة في اللحظات العشوائية ... $t_0, t_1, t_2,$،وبفرض أن $\alpha_n = t_n - t_{n-1}, \forall n \geq 1$ تمثل أزمنة الوصول البينية وهي متغيرات عشوائية مستقلة. دالة توزيعها:

$$A(X) = P(\alpha_n < X).$$

وتوقعها:

$$a = E(\alpha_n) = \int_0^{\infty} XdA(X) < \infty$$

وبفرض أن β_n **أزمنة خدمة** الزبون K_n، وهي متغيرات عشوائية غير سالبة ومستقلة ولها التوزيع نفسه، دالة توزيعها:

$$B(X) = P(\beta_n < X).$$

بتوقع الرياضي

$$b = E(\beta_n) = \int_0^{\infty} XdB(X) < \infty.$$

عند دراسة أنظمة الانتظار نهتم بالتغير الزمني لطول الطابور $X(t)$. حيث نقصد **بطول الطابور** عدد الطلبات الموجودة في نظام الخدمة في اللحظة t، هذا يعني التي يتم تخديمها والتي في غرفة الانتظار. تشكل $(X(t))_{t\in I=[0,\infty)}$ عملية عشوائية مع زمن مستمر

ثانياً: نظام الانتظار $G/M/1/\infty$ *[6][7]*

إن أزمنة الوصول البينية α_n في هذا النموذج تتبع توزيع عام $A(X)$ بتوقع رياضي منته، في حين توزيع أزمنة الخدمة β_n لهذا النظام له التوزيع الأسي:

$$B(X) = P(\beta_n < X) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x}, & x \geq 0 \\ 0 \quad\quad\quad , & x < 0 \end{cases}$$

بفرض أن X_n تمثل طول الطابور قبل وصول الزبون K_{n+1} عندئذ يكون:

$$X_0 = X(0-)$$

$$X_n = \begin{cases} X(t_n - 0) & ; \forall n \in N \\ X(0-) & ; \ n = 0 \end{cases}$$

وبفرض U_n تمثل عدد الزبائن الذين يغادرون النظام أثناء فترة الوصـــول α_n، عندئذ يمكننا أن نكتب:

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + 1 - U_n & ; \ X_{n-1} + 1 > U_n \\ 0 & ; X_{n-1} + 1 \le U_n \end{cases}$$

وأن $(X_n)_{n\geq 0}$ تمثل سلسلة ماركوف لأن U_n متغيرات عشوائية مستقلة وأن X_n تعتمد فقط على X_{n-1} دون الاعتماد على الماضي.

مبرهنة: تشكل $(U_n)_{n\in N}$ متتالية من المتحولات العشوائية الحقيقية المستقلة، ولها التوزيع الاحتمالي نفسه:

$$\beta_i = P(U_n = i) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\mu X} \frac{(\mu t)^i}{i!} \, dA(t), \quad \forall i = 0,1,2,..$$

من أجل دوال الانتقال نجد:

$$P_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

$$= \begin{cases} P(U_n \geq i+1), & j = 0, i \geq 0 \\ P(U_n = i + 1 - j), & i \geq 0, j \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{i} \beta_k & ; i = 0, j \geq 0 \\ \beta_{j-i+1} & ; \ i \geq 1, j \geq 0 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

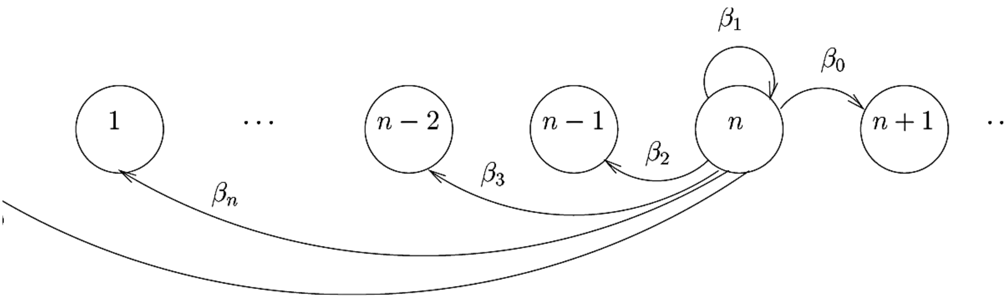
عندئذ مصفوفة الانتقال لها الشكل:

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & \beta_0 & 0 & 0 & 0 & . & \cdot & \cdot \\ p_{1,0} & \beta_1 & \beta_0 & 0 & 0 & . & \cdot & \cdot \\ p_{2,0} & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & 0 & . & \cdot & \cdot \\ p_{3,0} & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & . & \cdot & \cdot \\ p_{4,0} & \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ . & . & . & . & . & . & \cdot & \cdot \\ . & . & . & . & . & . & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

حيث:

$$p_{i,0} = 1 - \sum_{j=0}^{i} \beta_j = \sum_{j=i+1}^{\infty} \beta_j$$

والعرض الماركوفي لسلسلة ماركوف ممثلة بالشكل التالي:



ثالثاً: طوريات تجديد ماركوف (*Markov Renewal Processes*):

تعتبر طوريات التجديد الماركوفية تعميم لطوريات التجديد تتميز بأن سـلسـلة الأزمنة لها ليست مستقلة ومتطابقة بالتوزيع، توزيعاتها تعتمد على حالات سلسلة ماركوف.

درست طوريات التجديد الماركوفية لأول مرة عام (1961) على يد الباحث Pyke وطبقت على أنظمة الخدمة $M\backslash G\backslash 1$ وعلى مسائل اصلاح الآليات [8].

تعريف طوري ماركوف (*Markov Process*):[9]

نقول عن طوري عشوائي $\{X(t); t \in t\}$ أنه يمثل طوري ماركوف، من أجل كل $n \in$ $\mathbb{N}$ وكل من $t_0, t_1, \cdots, t_n \in T$ مع $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *ومن أجل* $y, x, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0 \in \mathbb{R}$، تكون العلاقة التالية محققة:

$$P\left(X_{t_n} = y \mid X_{t_{n-1}} = x, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = x_0\right)$$
$$= P\left(X_{t_n} = y \mid X_{t_{n-1}} = x\right)$$

تدعى هذه الخاصية بخاصية ماركوف.

طوري تجديد ماركوف (*Markov Renewal Process*):[10]

بفرض أن $(X_n, T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ سلسلة من المتغيرات العشوائية فيها $X_n \in S$; $S = \{0,1,2, \dots\}$ تمثل حالات لسلسة ماركوف و T_n أزمنة التجديد للحالات X_n، عندئذ نقول عن هذه السلسة أنها طوري تجديد ماركوفي بفضاء حالات S اذا تحقق الشرط التالي:

$$P(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t | X_0, \dots, X_n = i; T_0, \dots, T_n)$$
$$= P(X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t | X_n = i) = Q_{ij}(t)$$

وذلك من أجل كل $i, j\epsilon\ E\ , T_0, \dots, T_n \epsilon\ \mathbb{R}_+$

وبالتالي المصفوفة التالية:

$$Q \coloneqq \{Q_{ij}(t); i, j \in E, , t\epsilon\ \mathbb{R}_+\}$$

تدعى بنواة شبه ماركوف semi–Markov kernel على فضاء الحالات S .

رابعاً: النظام المقترح $GMR\backslash M\backslash 1$:

يعد هذا النظام تعميم للنظام $G\backslash M\backslash 1$ حيث نقترح فيه أن أزمنة الوصـــول البينية تمثل طوري تجديد ماركوف وأن توزيع كل سلسلة من أزمنة الوصول لكل نوع له التوزيع الأسي بالوسيط λ_{ij}، كما نفترض أن أزمنة التخديم أسية بالوسيط μ. عندئذٍ نستطيع أن نوصف النظام الجديد كما يلي:

بفرض أن $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ســـلســـلة من أزمنة المغادرة المتعاقبة للزبائن حيث $n\epsilon\mathbb{N}$ $\tau_n\epsilon\mathbb{R}^+$. وبفرض أن X_n تمثل طول الطابور قبل وصـول الزبون K_{n+1} حيث $X_n\epsilon\mathbb{N}$، وبفرض أن α_n زمن وصـول الزبون n حيث $\alpha_n\epsilon\mathbb{R}^+$، وبفرض أن Z_n تمثل نوع الزبون حيث $Z_n\epsilon E\{1,2,\dots,m\}$، عندئذٍ الثلاثية $(X_n, Z_n\ , \alpha_n\ )$ تمثل طوري تجديد ماركوف بكيرنل $K(t)$ حيث:

$$K(t) = P[X_n = K, Z_n = j, \tau_n - \tau_{n-1} \le t | X_{n-1} = l, Z_{n-1} = i]$$

$$= \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{i} \int_0^t \left(1 - e^{-\lambda(t-x)}\right) \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} dA_{ij}(x) & ;\ l = 0, i \ge 0, j = 0 \\ \int_0^t \frac{e^{-\mu x}(\mu x)^{k-l+1}}{(k-l+1)!} dA_{ij}(x) & ;\ l > 0, j \ge 1, i \ge j-1 \end{cases}$$

حيث $B_{ij}(x)$ هي كيرنل طوري تجديد ماركوف لأزمنة الخدمة وتعطى بالعلاقة:

$$B_{ij}(x) = [B_{ij}(t)]_{i,j\epsilon E} = \left[P_{ij}F_{ij}(t)\right] = [P_{ij}\ \left(1 - e^{-\lambda_{ij}t}\right)]_{m*m}$$

ونلاحظ أن الثلاثية $(X_n, Z_n\ , \alpha_n)$ معقدة كونها بثلاثة أبعاد أحدها مســـتمر والآخر منفصـل مما يزيد الأمر تعقيداً لذلك لفهم هذا النظام نسـتطيع أن نراقبه بعد مغادرة الزبون رقم n وبذلك نكون قد بسطنا وصف النظام.

لدينا X_n طول الطابور بعد مغادرة الزبون n وبفرض U_n تمثل عدد الزبائن الجديدة التي تصل إلى النظام أثناء خدمة الزبون n عندئذٍ نستطيع أن نكتب:

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + U_n - 1 & ; X_{n-1} > 0 \\ U_n & ; X_{n-1} = 0 \end{cases}$$

عندئذٍ (X_n) تمثل طوري ماركوف كون X_n يعتمد على X_{n-1} على الأكثر. ولنرمز لكيرنل$K(t)$ من خلال المصفوفات $E_k(t)$ و $G_k(t)$، عندئذٍ تصبح العلاقة (1) بالشكل:

$$K(t) = \begin{cases} C_k(t) & ; l = 0, i \geq 0, j = 0 \\ D_k(t) & ; l > 0, j \geq 1, i \geq j-1 \end{cases}$$

عندئذٍ نستطيع أن نكتب $K(t)$ بالشكل المصفوفاتي التالي:

$$K(t) = \begin{bmatrix} C_0(t) & D_0(t) & 0 & 0 & \dots \\ C_1(t) & D_1(t) & D_0(t) & 0 & \cdots \\ C_2(t) & D_2(t) & D_1(t) & D_0(t) & \cdots \\ C_3(t) & D_3(t) & D_2(t) & D_1(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

مصفوفة الانتقال بخطوة واحدة P نستطيع أن نجدها بالاعتماد على العلاقة:

$$P = \lim_{t \to \infty} K(t)$$

وبالتالي مصفوفة الانتقال P تصبح بالشكل:

$$P = K(\infty) = \begin{bmatrix} 1 - D_0 & D_0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 - D_0 - D_1 & D_1 & D_0 & 0 & \cdots \\ 1 - D_0 - D_1 - D_2 & D_2 & D_1 & D_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

بحيث $$D_k = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} dA(x)$$

أو $$D_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}(\mu x)^k}{k!} \left[P_{ij}\lambda_{ij}e^{-\lambda_{ij}x}\right] dx$$

أو نكتب مصفوفة الانتقال P بشكل آخر كما يلي:

$$P=\begin{bmatrix} p_{0,0} & D_0 & 0 & 0 & \dots \\ p_{1,0} & D_1 & D_0 & 0 & \cdots \\ p_{2,0} & D_2 & D_1 & D_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

حيث أن $p_{i,0}=1-\sum_{j=0}^{i} D_j$

وبفرض أن π يمثل التوزيع المستقر لسلسلة ماركوف (X_n, Z_n) بحيث $0 \le \pi_k \le 1$; $K \in \mathbb{N}$ ونستطيع ايجاد π من خلال:

$$\pi\,\mathrm{K}(\infty)=\pi \qquad ; \pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\dots,)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j=1$$

وبالتالي ينتج لدينا من المعادلات الأخيرة أن:

$$\pi_n=\pi_{n-1}D_0+\ \pi_n D_1+\ \pi_{n+1}D_2+\cdots \qquad ; n=1,2,\dots$$

$$\Longrightarrow \pi_n=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_{k+n-1}D_k \qquad ; n=1,2,\dots$$

أما من أجل $n=0$ ينتج لدينا أيضاً الصيغة التالية:

$$\pi_0=\pi_0 p_{0,0}+\pi_1 p_{1,0}+\pi_2 p_{2,0}+\cdots$$

$$\Longrightarrow \pi_0=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k p_{k,0}$$

ولنعرف التوابع المولدة الاحتمالية التالية:

$$\begin{cases} \Pi_i\,(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n_i} Z^n & ; i = 1,2, \dots, m \\ M_i(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{n_i} Z^n & ; i = 1,2, \dots, m \end{cases} \qquad (*)$$

وليكن لدينا $\pi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{k+n-1} D_k \quad ; n = 1,2, \dots$

وبتعميم هذه العلاقة لتشمل أكثر من نوع من الزبائن تصبح بالشكل:

$$\pi_{n_i} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{(n-1+k)_i} D_{(k)_{ij}} \quad ; j = 1,2, \dots, m$$

وبضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ Z^n وأخذ المجموع على n ينتج لدينا مايلي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n_i} Z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{(n-1+k)_i} D_{(k)_{ij}}\ Z^n \qquad ; j = 1,2, \dots, m$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n_i} Z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{(n-1+k)_i} D_{(k)_{ij}}\ Z^{n-1+k}\ Z^{1-k}$$

وبفرض أن $n - 1 + k = \ell$ عندئذ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n_i} Z^n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n-1}^{\infty} \pi_{(\ell)_i} D_{(1-n+\ell)_{ij}}\ Z^{\ell}\ Z^{n-\ell}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n_i} Z^n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=n-1}^{\infty} \pi_{(\ell)_i} D_{(1-n+\ell)_{ij}}\ \ Z^n$$

وبالاستفادة من العلاقة $(*)$ تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\Pi_i\,(Z) = \sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} M_i(Z) + Z^{-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{\infty} \pi_{\ell_i} Z^{\ell} * \sum_{n=\ell}^{\infty} D_{(n+1-\ell)_{ij}}\, Z^{n+1-\ell}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} M_i(Z) + Z^{-1} \sum_{i=1}^{m} M_i(Z)\,(\Pi_i\,(Z) - \boldsymbol{\pi_{0_i}})$$

ولكن:

$$D_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x}(\mu x)^k}{k!} dA(x)$$

$$\Rightarrow M(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x}(\mu x)^k}{k!} \left[P_{ij}\lambda_{ij} e^{-\lambda_{ij}x}\right] dx$$

$$= P_{ij}\lambda_{ij} \int_0^{\infty} e^{\mu Z x}\; e^{-(\mu+\lambda_{ij})x} dx$$

$$= P_{ij}\lambda_{ij} \int_0^{\infty} e^{-(\mu-\mu Z+\lambda_{ij})x} dx = \frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{\mu - \mu Z + \lambda_{ij}}$$

$$\Rightarrow M(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x}(\mu x)^k}{k!} dA(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{\mu x}(\mu x)^k}{k!} \left[P_{ij}\lambda_{ij} e^{-\lambda_{ij}x}\right] dx$$

$$= P_{ij}\lambda_{ij} \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-(\mu+\lambda_{ij})x} dx$$

$$= P_{ij}\lambda_{ij} \int_0^{\infty} e^{\mu x} e^{-(\mu+\lambda_{ij})x} dx = P_{ij}\lambda_{ij} \int_0^{\infty} e^{-\lambda_{ij}x} dx$$

$$= \frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}} = P_{ij}$$

$$\Rightarrow \acute{M}(Z) = \frac{\mu P_{ij}\lambda_{ij}}{(\mu - \mu Z + \lambda_{ij})^2}$$

$$\Rightarrow \acute{M}(1) = \frac{\mu P_{ij}\lambda_{ij}}{(\mu - \mu + \lambda_{ij})^2} = \frac{\mu P_{ij}}{\lambda_{ij}} = \rho^{-1}P_{ij}$$

استنتاج π_{0_i} (متجه احتمالات أن يكون النظام المقترح فارغ بالنسبة لكل الأنواع):

من أجل $Z = 1$ تصبح العلاقة $\sqcap_i\,(Z)$ السابقة بالشكل:

$$\sqcap_i\,(1) = \sum_{i=1}^{m} M_i(1)\,\sqcap_i\,(1)$$

ولكن $M_i(1) = \frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{\mu-\mu+\lambda_{ij}} = P_{ij}$ وبالتالي:

$$\sqcap_i\,(1) = \sum_{i=1}^{m} P_{ij}\,\sqcap_i\,(1)$$

يمكن كتابتها بالشكل المصفوفاتي التالي:

$$\Rightarrow \sqcap\,(1) = \sqcap\,(1)\mathrm{P}$$

وبفرض أن المتجه η هو المتجه الاحتمالي الوحيد المستقر للمصفوفة P أي أن:

$$\eta = \eta P \qquad ;\eta = \left(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\right)$$

بالمطابقة بين العلاقتين الأخيرتين ينتج أن $\sqcap\,(1) = \eta$

الآن بالرجوع لعلاقة $\sqcap_i\,(Z)$ نستطيع كتابتها بالشكل:

$$\sqcap_i\,(Z) == \sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} M_i(Z) + Z^{-1}\sum_{i=1}^{m} M_i(Z)\,(\sqcap_i\,(Z) - \boldsymbol{\pi_{0_i}})$$

من أجل i=1 تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\sqcap_1\ (Z) = \pi_{0_1} M_1(Z) + Z^{-1}\ M_1(Z)(\sqcap_1\ (Z) - \boldsymbol{\pi_0}\ )$$

$$\sqcap_1\ (Z) = \frac{\pi_0 M_1(Z)(1-Z)}{M_1(Z) - Z}$$

ولكن استنتجنا أن:

$$\lim_{Z \to 1} \sqcap_i\ (Z) = \eta$$

وباستخدام قاعدة أوبيتال على $\sqcap_i\ (Z)$ يصبح لدينا:

$$\sqcap_i\ (Z) = \frac{\sum \pi_{0_i} \acute{M}(Z)(1-Z) + \sum \pi_{0_i} M(Z)(-1)}{\sum \acute{M_i}(Z) - 1}$$

وبتبديل كل $Z = 1$ وبتعميم العلاقة على m–نوع، تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل:

$$\sqcap_i\ (1) = \frac{-\sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} M(1)}{-\left(1 - \sum_{i=1}^{m} \acute{M}_i(1)\right)}$$

ولكن $\rho^{-1} P_{ij} = \acute{M}_i(1)$ نبـدل في العلاقـة الأخيرة كلاً من $\sqcap_i\ (1)$ و $K(1)$ و $\acute{K}(1)$:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} P_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{m} \rho_i^{-1} P_{ij} - 1\right)}$$

ولكن $\sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} P_{ij} = \pi_{0_i}$ و $\sum_{i=1}^{m} \rho_i^{-1} P_{ij} = \rho_i^{-1}$ وبالتالي:

$$\eta_i = \frac{\pi_{0_i}}{\rho_i^{-1} - 1} \Longrightarrow \quad \pi_{0_i} = \eta_i \rho_i^{-1}(1 - \rho_i) \quad ; \rho_i = \frac{\lambda_{ij}}{\mu} < 1$$

توزيع زمن المكوث Distribution of the sojourn time:[9][8]

لنفترض أن الزبون سيصل إلى النظام في حالة الاستقرار، ولنرمز للزمن الذي سيستغرقه الزبون في الخدمة (زمن المكوث) بالمتحول العشـــوائي S وبـــــــ $F_S(.)$ دالة توزيعه الاحتمـاليـة. وبفرض أن $\{L^n; n \geq 0\}$ تمثـل عـدد الزبـائن الموجودين في النظـام عنـد

الوصول n-، وبفرض π_n احتمال أن يجد الزبون القادم n-زبون في النظام، من الواضح أن عدد الزبائن المتبقين عند وصول n-زبون أي لحظة مغادرة زبون ما هو نفسه عدد الزبائن الذين وصلوا خلال فترة مكوثه في النظام (باعتبار النظام في حالة استقرار)، ولذلك سيكون:

$$L^n = \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^n}{n!} dA(t)$$

عندئذ زمن المكوث هو مجموع $n+1$ زمن الخدمة بالتوزيع الأسي:

$$\tilde{S}(s) = E(e^{-sS}) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\sigma)\sigma^n \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1}$$
$$= \left(\frac{\mu(1-\sigma)}{\mu+s}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu\sigma}{\mu+s}\right)^n = \frac{\mu(1-\sigma)}{\mu(1-\sigma)+s}$$

حيث:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^i}{i!} \left[P_{ij}\lambda_{ij} e^{-\lambda_{ij} t}\right] dt$$
$$= \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\mu-\mu\sigma)t} \left[P_{ij}\lambda_{ij} e^{-\lambda_{ij} t}\right] dt = \frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{\mu-\mu\sigma+\lambda_{ij}}$$

وبالتالي أصبح لدينا:

$$\sigma = \frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{\mu-\mu\sigma+\lambda_{ij}} \Longrightarrow \sigma(\mu-\mu\sigma+\lambda_{ij}) = P_{ij}\lambda_{ij}$$

بحل المعادلة الأخيرة نتوصل إلى قيمة σ.

مقاييس الأداء للنموذج المقترح:

1- متوسط زمن الانتظار في النظام W_s:

إن متوسط زمن المكوث أو متوسط زمن الانتظار للنظام المقترح بالاعتماد على النظام G/M/1 يحسب من العلاقة التالية:

$$W_s = E(S) = \sum_{i=1}^{m} E(L^a)\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}$$

ولكن:

$$E(L^a) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\,(1-\sigma)\sigma^n = \frac{\sigma}{1-\sigma}$$

وبالتالي نحصل على W_s:

$$W_s = \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_i}{(1-\sigma_i)\mu} + \frac{1}{\mu} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(1-\sigma_i)\mu}$$

2- متوسط زمن الانتظار في الطابور W_q:

إن متوسط زمن الانتظار في الطابور W_q يكون:

$$W_q = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_{ij}}{(1-\sigma_i)\mu} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_{ij}}{(1-\sigma_i)}\ ;\ \ j = 1,2,\dots,m$$

3- متوسط عدد الزبائن في الطابور L_q:

نستطيع استنتاج كل من L_q بالاعتماد على صيغة ليتيل كما يلي:

$$L_q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} W_q = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_{ij}\rho_{ij}}{(1-\sigma_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda^2{}_{ij}}{(1-\sigma_i)\mu}$$

4- متوسط عدد الزبائن في النظام L_S:

بالاعتماد على صيغة ليتيل أيضاً يكون متوسط عدد الزبائن في النظام المقترح:

$$L_s = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} W_s = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_{ij}}{(1-\sigma_i)\mu} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_{ij}}{(1-\sigma_i)}$$

تطبيق:

نفترض أن لدينا خادم ويب يتلقى نوعين من الطلبات:

1. طلبات البيانات (Data Requests): وهي طلبات بسيطة للوصول إلى بيانات معينة (مثل صفحات الويب)، وأن معدل وصول هذا النوع من الطلبات 8 طلبات في الدقيقة.

2. طلبات المعالجة (Processing Requests): وهي طلبات تتطلب وقتًا أطول للمعالجة (مثل تحميل الملفات أو تنفيذ عمليات معقدة)، وبفرض معدل وصول الطلبات 5 طلبات في الدقيقة.

وأن معدل التخديم لكل طلب لكلا النوعين يستغرق حوالي نصف دقيقة أي 5 ثواني. نلاحظ أنه عندما يصل الطلب إلى الخادم، يتم تحديد نوع الطلب. يمكن أن تتداخل الطلبات، مما يعني أن الطلبات من كلا النوعين يمكن أن تصل في نفس الوقت، مما يدل على أن معدلات الوصول مرتبطة ببعضها البعض وغير مستقلة فزمن وصول كل طلب متعلق بزمن وصول طلب آخر حتى يتم تخديمها. والمطلوب:

1. حساب احتمال أن يكون المخدم فارغاً لكل نوع من الطلبات (لكلا النوعين البيانات والمعالجة):

أي نريد حساب π_{0_i} لدينا $\mu = 12$، $\lambda_1 = 8$، $\lambda_2 = 5$

$$\Longrightarrow \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} = \frac{8}{12} = 0.67 < 1$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} = \frac{5}{12} = 0.42 < 1$$

وبفرض مصفوفة الانتقال P:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \eta = \begin{pmatrix} \frac{0.7}{0.7+0.6} & \frac{0.6}{0.7+0.6} \end{pmatrix} = (0.54 \quad 0.46)$$

وباستخدام العلاقة:

$$\pi_{0_i} = \eta_i \rho_i^{-1}(1-\rho_i)$$

$$i = 1 \Longrightarrow \pi_{0_1} = \eta_1 \rho_1^{-1}(1-\rho_1) = 0.54(0.67^{-1})(1-0.67) = 0.27$$

$$i = 2 \Longrightarrow \pi_{0_2} = \eta_2 \rho_2^{-1}(1-\rho_2) = 0.46(0.42^{-1})(1-0.42) = 0.63$$

$$\Longrightarrow \pi_{0_i} = (0.27 \quad 0.63\ )$$

أي أن احتمال أن يكون النظام فارغ بالنسبة للنوع الأول هو $\pi_{0_1} = 0.27$

واحتمال أن يكون النظام فارغ بالنسبة للنوع الثاني هو $\pi_{0_2} = 0.63$

2. احسب احتمال أن يكون النظام ممتلئ:

$$1 - \pi_{0_i} = 1 - (0.27 \quad 0.63) = (0.73 \quad 0.37)$$

3. احسب احتمال أن يكون هناك زبون من النوع الأول أو زبون من النوع الثاني:

أي نريد حساب π_{1_i}، نستخدم العلاقة التالية:

$$\pi_{0_j} = \sum_{i=1}^{m} \pi_{0_i} D_{0_{ij}} + \sum_{i=1}^{m} \pi_{1_i} D_{0_{ij}} \quad ; m = 2$$

لنحسب أولاً D_0، لدينا

$$D_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}(\mu x)^k}{k!}\left[P_{ij}\lambda_{ij}e^{-\lambda_{ij}x}\right]dx$$

$$\Longrightarrow D_0 = \int_0^\infty e^{-\mu x}\left[P_{ij}\lambda_{ij}e^{-\lambda_{ij}x}\right]dx$$

$$= P_{ij}\lambda_{ij}\left(\int_0^\infty e^{-(\lambda_{ij}+\mu)x}dx\right) = \frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{(\lambda_{ij}+\mu)}$$

$$\Longrightarrow D_{0_{ij}} = \begin{pmatrix} \frac{P_{11}\lambda_{11}}{\mu+\lambda_{11}} & \frac{P_{12}\lambda_{12}}{\mu+\lambda_{12}} \\ \frac{P_{21}\lambda_{21}}{\mu+\lambda_{21}} & \frac{P_{22}\lambda_{22}}{\mu+\lambda_{22}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(0.3)(0.13)}{0.20+0.13} & \frac{(0.7)(0.13)}{0.2+0.13} \\ \frac{(0.6)(0.08)}{0.2+0.08} & \frac{(0.4)(0.08)}{0.2+0.08} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow D_{0_{ij}} = \left(\frac{P_{ij}\lambda_{ij}}{(\lambda_{ij}+\mu)}\right)_{m*m} = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.28 \\ 0.17 & 0.11 \end{pmatrix}$$

ولإيجاد قيم المتجه π_{1_i} نشكل المعادلتين التاليتين من خلال (π_{1_j}):

$$j = 1 \Longrightarrow \pi_{0_1} = \pi_{0_1}D_{0_{11}} + \pi_{0_2}D_{0_{21}} + \pi_{1_1}D_{0_{11}} + \pi_{1_2}D_{0_{21}}$$

$$j = 2 \Longrightarrow \pi_{0_2} = \pi_{0_1}D_{0_{12}} + \pi_{0_2}D_{0_{22}} + \pi_{1_1}D_{0_{12}} + \pi_{1_2}D_{0_{22}}$$

$$\begin{cases} 0.27 = 0.27(0.12) + 0.63(0.17) + \pi_{1_1}(0.12) + \pi_{1_2}(0.17) \\ 0.63 = 0.27(0.28) + 0.63(0.11) + \pi_{1_1}(0.28) + \pi_{1_2}(0.11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.1305 = 0.12\pi_{1_1} + 0.17\pi_{1_2} \\ 0.4851 = 0.28\pi_{1_1} + 0.11\pi_{1_2} \end{cases}$$

بحل المعادلتين الأخيرتين حل مشترك ينتج لدينا:

$$\Longrightarrow \pi_{1_1} = 0.19 \quad \& \quad \pi_{1_2} = 0.63$$

$$\Longrightarrow \pi_{1_j} = \begin{pmatrix}\pi_{1_1} & \pi_{1_2}\end{pmatrix} = (0.19 \quad 0.63)$$

4. أوجد متوسط زمني الانتظار في الطابور وفي النظام للنظام المقترح:

إن متوسط زمن الانتظار في الطابور w_q يحسب من خلال العلاقة التالية:

$$W_q = \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{(1-\sigma_i)}$$

نحسب σ_i من المعادلة التالية:

$$\sigma_i(\mu - \mu\sigma_i + \lambda_{ij}) = P_{ij}\lambda_{ij}$$

من أجل i=1:

$$\sigma_1(\mu - \mu\sigma_1 + \lambda_1) = P_{11}\lambda_1 \Longrightarrow \sigma_1(0.20 - 0.20\sigma_1 + 0.13) = 0.3 * 0.13$$

$$\Longrightarrow 0.20{\sigma_1}^2 - 0.33\sigma_1 + 0.039 = 0$$

بحل هذه المعادلة نحصل على قيمة $\sigma_1 = 0.128$ (الجذر الموجب الأصغر)

أما من أجل i=2:

$$\sigma_2(\mu - \mu\sigma_2 + \lambda_2) = P_{22}\lambda_2 \Longrightarrow \sigma_2(0.20 - 0.20\sigma_2 + 0.08) = 0.4 * 0.08$$

$$\Longrightarrow 0.20{\sigma_2}^2 - 0.28\sigma_2 + 0.032 = 0$$

بحل هذه المعادلة نحصل على قيمة σ_2 =0.125 (الجذر الموجب الصغر)

وبالتالي:

$$W_q = \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{(1-\sigma_i)} = \frac{\rho_1}{(1-\sigma_1)} + \frac{\rho_2}{(1-\sigma_2)}$$
$$= \frac{0.67}{1-0.128} + \frac{0.42}{1-0.125} = 1.159$$

متوسط زمن الانتظار في النظام W_S:

$$W_s = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(1-\sigma_i)\mu}$$

$$= \left(\frac{1}{0.2}\left(\frac{1}{1-0.128}\right) + \frac{1}{0.2}\left(\frac{1}{1-0.125}\right)\right) = 11.44$$

في هذا التطبيق، يتم التعامل مع نوعين مختلفين من الطلبات على نفس الخادم. يعكس التحليل كيف يمكن أن تؤثر الطلبات المختلفة على أداء النظام. من المهم أيضًا ملاحظة أن زيادة حجم الطلبات من نوع معين يمكن أن تؤثر على أزمنة انتظار جميع الطلبات. يمكن أن يساعد هذا النوع من التحليل في تحسين استراتيجيات إدارة الحمل على الخادم وضمان تقديم الخدمة بكفاءة.

النتائج والتوصيات:

أهم النتائج التي تم التوصل إليها والتوصيات:

1- تعميم نظام الخدمة $G/M/1$ إلى نظام الخدمة المقترح $GMR/M/1$.

2- تمثيل أزمنة الوصول البينية للنموذج المقترح باستخدام طوري تجديد ماركوف.

3- استنتاج مصفوفة الانتقال P بالاعتماد على نهاية مصفوفة كيرنل شبه ماركوف للنظام المدروس.

4- استنتاج الصيغة الرياضية لكل من π_{n_i} و π_{0_i} بالاعتماد على تعريف الدوال المولدة $\sqcap_i (Z)$.

5- مناقشة الحالة الخاصة لأزمنة وصول بينية أسية لنوعين من الزبائن وتوضيح النتائج من خلال تطبيق في أنظمة الشبكات.

6- نوصي بتطبيق النظام المقترح على أنظمة $G/M/1$ لأكثر من نوعين من الزبائن.

7- نوصي بتوسيع مفهوم البحث على أنظمة ذات n-مخدم.

المراجع:

1) Whitt, W. (1983). "Queueing Models with Markovian Arrival Processes." *Operations Research*, 31(5), 931-945.

2) Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems: Volume 1 - Theory*. John Wiley & Sons.

3) Gross, D., & Harris, C. M. (1998). *Fundamentals of Queueing Theory*. Wiley.

4) Boucherie, R. J., & van der Wal, J. (2000). *Queueing Models for Computer Networks*. Kluwer Academic Publishers.

5) Rao, K. P. S. (1990). "The Impact of Renewal Theory on Queueing Systems." *Journal of Applied Probability*, 27(1), 70-85.

6) Pyke, R.(1961a) Markov renewal processes: definitions and preliminary
properties. Ann. Math. Statist., 32,1231-1242.

7) Howard M. Taylor, Samuel Karlin, An Introduction to Stochastic
Modeling 3, Statistical Consultant Onancock Virginia, Department of

Mathematics Stanford University Stanford California, 1998, 1994, 1984 by Academic Press.

8) Franciszek.G,(2015), Semi Markov Processes: Application in System
Reliability and Maintenance. Polish Naval University Gdyia, Poland Elsevier.

9) Gunter Bolch,Stefan Greiner, Hermann de Meer,Kishor S. Trivedi, Queueing Networks and Markov Chains – 2nd Edition, John Wiley & Sons, 2006.

10) W. J. Stewart, Probability, Markov, Chains, Queues and Simulation, Princeton University Press, 2009.