الإستقرار الأسّي لجملة معادلات فرقيّة لا توقفيّة من خلال استخدام مصفوفة مساعدة لحل معادلة ليابونوف

ماهر قبلان *   د. سامح العرجة **
*** طالب دراسات عليا (ماجستير) في قسم الرياضيات - كليّة العلوم – جامعة حمص**
**** أستاذ في قسم الرياضيات - كليّة العلوم - جامعة حمص**

الملخّص

يعدّ حل معادلة ليابونوف شرطاً كافياً لضمان استقرار حلول جمل المعادلات الفرقيّة، ولكن ليس بالأمر اليسير حل هذه المعادلة ، فهو يعتبر موضوعاً منفصلاً يحتاج إلى دراسة بحد ذاته.
لذلك قمنا بتقديم طريقة تبيّن فيما إذا كان هذا الحل موجود فعليّاً أم لا دون الحصول على هذا الحل.
تعتمد هذه الطريقة على تشكيل مصفوفة مساعدة محدّدة تحوي معامل متغيّر α ، ومن أجل بعض القيم الموجبة تماماً للمتغيّر α نضمن وجود الحل لمعادلة ليابونوف ومن ثمّ ضمان الإستقرار .
وفي نهاية العمل قمنا بوضع بعضاً من الأمثلة للتوضيح .

كلمات مفتاحيّة : معادلة فرقيّة ، استقرار ، استقرار أسّي ، معادلة ليابونوف.

Exponential stability of a system of Non-Stationary difference equations using an auxiliary matrix to solve the Lyapunov equation

Abstract

Solving the Lyapunov equation is a sufficient condition to ensure the stability of solutions to difference equation systems, but it is not easy to solve this equation, it is considered a separate topic that needs to be studied in itself. Therefore, we have presented a method that shows whether this solution actually exists or not without obtaining this solution. This method depends on forming a specific auxiliary matrix containing the variable coefficient α, and for some completely positive values of the variable α, we guarantee the existence of the solution to the Lyapunov equation and thus ensure stability. At the end .of the work, we have provided some examples for clarification .

Keywords : difference equation , stability , Exponential stability , Lyapunov equation .

1- مقدّمة :

تعتبر نظريّة الإستقرار من المواضيع ذات أهميّة كبرى في علم الميكانيك ، وفي الحقيقة لا يمكن تحديد تاريخ نشأة هذه النظريّة بدقة ، يمكننا القول أنّ القرن السابع عشر بداية الفترة

التاريخيّة الأهم لهذه النظريّة ، وذلك عندما بدأ البحث عن الإجابة لبعض الأسئلة مثل هل النظام الشمسي مستقر ؟

تحت أي قوة سوف ينحني شعاع ؟ كانت هذه الأسئلة الأساسيّة التي دفعت العلماء مثل أويلر ولاغرانج وبوانكاريه وليابونوف إلى التفكير في مفهوم استقرار الحركة .

إنّ الإهتمام باستقرار الحركة اليوم أكبر من أي وقت مضى ، إذ تلعب نظريّة الإستقرار دوراً هاماً في النماذج الإقتصاديّة والخوارزميات العدديّة وميكانيكا الكم ونظريّة التحكم .

قدّم عالم الرياضيّات الروسي أليكسندر ميخائيل ليابونوف في عام 1892 مذكّرته الشهيرة التي تحوي طريقة جديدة لدراسة استقرار المعادلات التفاضليّة غير الخطيّة . والتي تسمّى طريقة ليابونوف المباشرة ، تسمح هذه الطّريقة بتحليل الطّبيعة النوعيّة للحلول دون تحديد الحلول نفسها فعليّاً .

ولذلك فهي تعد أداة رئيسيّة في نظريّة الآستقرار . حيث تعتمد هذه الطّريقة على إيجاد دوال معيّنة ذات قيم حقيقيّة تحقّق خواص محدّدة ، تسمى هذه الدوال بدوال ليابونوف .

سنقوم في هذا البحث بتوظيف طريقة ليابونوف المباشرة لدراسة استقرار المعادلات الفرقيّة اللّا توقفيّة من النمط $x(n+1) = A(n)x(n)$ ، علماً أنّ الشرط اللازم ليكون حل هذه الجمل مستقرّاً هو أن تكون القيم الذاتيّة للمصفوفة $A(n)$ تقع داخل دائرة الوحدة ($tr\ A(n) < k$)، ولكن هذا الشرط غير كافي إذ يجب وضع شرط إضافي .تعد هذه المعادلات أداة هامّة في النماذج الإقتصاديّة ونماذج النمو السكاني ونظريّة التحكّم .

2 - المصفوفات والدوال الموجبة تحديداً :

تعريف 2-1 نقول عن دالّة $f: \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}$ أنها موجبة تحديداً إذا تحقق الشرطان :

- $f(0) = 0$
- $f(x) > 0 \;\; ; \;\; \forall x \in \mathbb{R}^K/\{0\}$

تعريف 2-2 : نقول عن مصفوفة $A = [a_{ij}]_{k\times k}$ أنّها موجبة تحديداً إذا كانت محدداتها موجبة تماماً

أي : $\Delta_{11} > 0$ و $\Delta_{22} > 0$ و ...و $\Delta_{kk} > 0$.

مثال 2-1 : من أجل المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_{11} = 2 > 0$ و $\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ و $\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$

وبالتالي A موجبة تحديداً .

3 - المعادلات الفرقيّة الخطيّة ذات الأمثال المتغيّرة والإستقرار الأسي :

نسمي جملة المعادلات الفرقيّة :

$$x(n+1) = f\big(n, x(n)\big) \qquad (3-1)$$

جملة معادلات فرقيّة لا توقفيّة . حيث : $x(n) = \big(x_1(n), x_2(n), \dots . x_k(n)\big)^T$

$$f\big(n, x(n)\big) : Z^+ \times D \longrightarrow R^K \quad ; \qquad D \subset R^K \,,\ K \in Z^+$$

إذا كانت $f\big(n, x(n)\big) = A(n)x(n)$ حيث : $A(n) = [a_{ij}(n)]_{k\times k}$ ، فإنّ الجملة $(3-1)$

تسمّى جملة معادلات فرقيّة خطيّة متجانسة ذات أمثال متغيّرة ، يعطى الشكل غير المتجانس لها بالشكل: $x(n+1) = A(n)x(n) + g(n)$ حيث $g(n) \in R^K$.

تعريف 3-1 [1] : نقول أنّ $x(n) := x(n, n_0, x_0)$ حل للجملة $(3-1)$ إذا تحقق الشرطين :

1- $x(n_0) = x_0$

2- $x(n)$ يحقق المعادلة $(3-1)$ من أجل كل $n \geq n_0 \geq 0$.

تعريف 3-2 [1] : يعطى الحل الوحيد للجملة المتجانسة $x(n+1) = A(n)x(n)$ مع الشرط الإبتدائي $x(n_0) = x_0$ بالشكل :

$$x(n, n_0, x_0) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \, . \, x_0 \qquad ; \qquad n \geq n_0 \geq 0$$

علماً أنّ :

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = \begin{cases} A(n-1)A(n-2)\dots A(n_0) \; ; & n > n_0 \\ I \; ; & n = n_0 \end{cases}$$

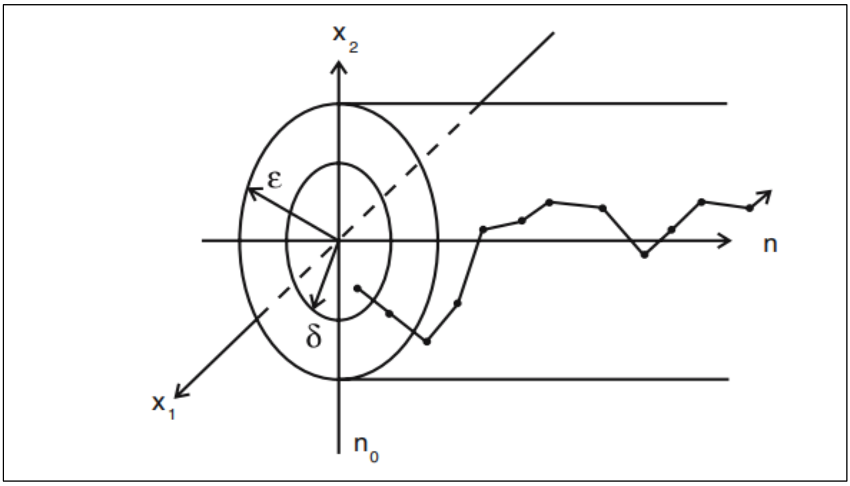
نضع $\Phi(n, n_0) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)$. واضح أنّ $\Phi(n_0, n_0) = I$.

تعريف 3-3 [1] : نقول أنّ الحل الصفري للجملة $(3-1)$ مستقر إذا كان أي حل للجملة $(3-1)$ يحقق الشرط :

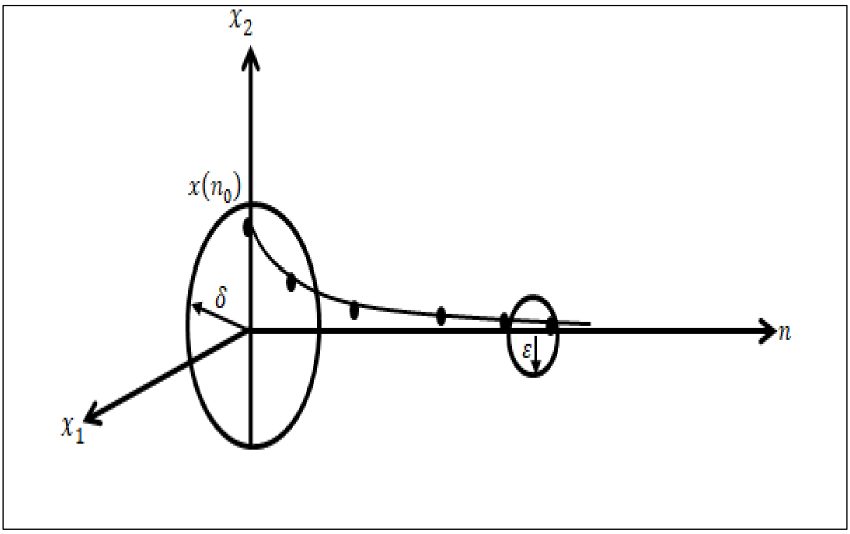
$$\forall\, \varepsilon > 0 \,, n_0 \geq 0 \,, \exists\, \delta(\varepsilon, n_0) \; ; \; \|x_0\| < \delta \implies \|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon \; ; \; \forall n \geq n_0$$

تعريف 4-3 [1] : نقول أنّ الحل الصفري للجملة $(1-3)$ مستقر أسيّاً إذا كان أي حل للجملة $(1-3)$ يحقّق الشرط :

$$\exists\, \delta > 0 \,, M > 0 \,;\ \|x_0\| < \delta$$
$$\Longrightarrow \|x(n, n_0, x_0)\| \leq M\|x_0\|e^{-(n-n_0)}$$



الشكل (1) : الحل الصفري مستقر



الشكل (2) : الحل الصفري مستقر أسيّاً

4- الإستقرار الأسي حسب طريقة ليابونوف :

مبرهنة 4-1 [2] : في الجملة $(3-1)$ إذا كانت الدالّة $f(n,x)$ تحقّق شرط ليبشتز في x على المنطقة $Z^{+} \times D$ ، ووجدت دالّة $V \;:\; Z^{+} \times D \longrightarrow R$ مستمرّة في x وموجبة تحديداً وتحقّق الشرطين:

$$1)\; V(n,x) < a\|x\|^{2} \qquad ; \qquad a \in R_{+}^{*}$$

$$2)\; V\big(n+1, f(n,x)\big) - V(n,x) \le -b\|x\|^{2} \;\; ; \;\; b \in R_{+}^{*}$$

لكل $n \ge 0$. عندئذٍ الحل الصفري مستقر أسيّاً .

نسمي الدالّة V دالّة ليابونوف ، ووجودها يضمن استقرار الحل الصفري للجملة .

لنأخذ الجملة المتجانسة :

$$x(n+1) = A(n)x(n) \qquad (4-1)$$

ولنأخذ دالّة ليابونوف بالشكل :

$$V\big(n, x(n)\big) = x^{T}(n)p(n)x(n) \qquad (4-2)$$

يسمى هذا الشكل بالصّيغة التربيعيّة لدالّة ليابونوف ، حيث $p(n) = \big[b_{ij}(n)\big]_{k\times k}$ مصفوفة موجبة تحديداً ومتناظرة ومحدودة ، أي :

$$0 < c_{1}I \le p(n) \le c_{2}I \qquad ; n \ge 0 \qquad (4-3)$$

نلاحظ أنّ :

$$V\big(n+1, x(n+1)\big) - V\big(n, x(n)\big)$$
$$= x^{T}(n)A^{T}(n)p(n+1)A(n)x(n) - x(n)^{T}p(n)x(n)$$
$$x^{T}(n)\big(A^{T}(n)p(n+1)A(n) - p(n)\big)x(n) = -x^{T}(n)Q(n)x(n)$$

حيث :

$$A^{T}(n)p(n+1)A(n) - p(n) = -Q(n)$$

تسمّى هذه المعادلة بمعادلة ليابونوف ووجود حل لهذه المعادلة يعني أنّ الحل الصفري للجملة $(4-1)$ مستقر أسيّاً ، وسنبيّن ذلك من خلال المبرهنة الآتية .

مبرهنة 4-2 [2] : الشرطين الآتيين متكافئين :

1 - الحل الصفري للجملة $(4-1)$ مستقر أسيّاً .

2 - يوجد لمعادلة ليابونوف :

$$A(n)^{T}P(n+1)A(n) - P(n) = -Q(n)$$

من أجل $Q(n) = \left[q_{ij}(n)\right]_{k\times k}$ مصفوفة موجبة تحديداً ومتناظرة ، و $A(n)$ محدودة ، حلاً $P(n)$

حيث $P(n)$ مصفوفة موجبة تحديداً ومحدودة ومتناظرة.

في الحقيقة حل معادلة ليابونوف لا يعدّ أمراً سهلاً حيث أنّ طرق حل هذه المعادلة تحتاج إلى دراسة خاصّة **[3]**.

لذلك سنقوم بإنشاء شكل محدّد للمصفوفة $P(n)$ تعتمد على مصفوفة مساعدة $P_1(n)$ ومن خلال شروط محدّدة نضعها على المصفوفة الأخيرة نتأكد من وجود المصفوفة $P(n)$.

سننطلق من الشرط اللازم وضعه على المصفوفة $A(n)$ لتكون الجملة $(1-3)$ مستقرّة ، وهو أن تكون القيم الذاتيّة للمصفوفة $A(n)$ واقعة داخل دائرة الوحدة :

$$|\max \lambda_i\,[A(n)]| < e^{-\alpha} < 1$$

حيث α عدد حقيقي موجب تماماً .

لنأخذ المصفوفة المحدودة **[4]** :

$$B(n) = I - e^{-\alpha}A^{-1}(n)$$

علماً أنّ $A(n)$ قابلية للقلب ، إذا كانت المصفوفة المتناظرة الآتية موجبة تحديداً :

$$B^T(n) + B(n) > 0$$

عندئذٍ تكون القيم الذاتيّة للمصفوفة $\left(-B(n)\right)$ تقع داخل دائرة الوحدة.**[5]**

ومنه تكون المصفوفة $D = \left(A^T(n)A(n)\right)B(n)$ تحقق :

$$\max|\lambda_i[-D]| < 1$$

إذا كانت المصفوفة الآتية موجبة تحديداً :

$$D^T(n) + D(n) = B^T(n)\left(A^T(n)A(n)\right) + \left(A^T(n)A(n)\right)B(n) > 0 \quad (4-4)$$

يمكن كتابة العلاقة $(4-4)$ بالشكل :

$$P_1(n) = 2A(n)A(n) - e^{-\alpha}[A^T(n) + A(n)] > 0 \qquad (4-5)$$

وبالتالي من أجل $\alpha > 0$ تكون $(5-4)$ محققة ، واعتماداً على **تعريف 2-2** فإنّه بحل المعادلة $\det P_1(n) = 0$ نحصل على الحد الأعلى $\alpha = \alpha_0$ للعدد α والذي من أجله نستطيع تحديد فيما

إذا كانت $(5-4)$ محقّقة أم لا.

الآن نعرف المصفوفة $P(n)$ حل معادلة ليابونوف بالشكل :

$$P(n) = P_1(n)B_1(n) \qquad (4-6)$$

حيث $B_1(n)$ مصفوفة موجبة تحديداً اختياريّة تجعل المصفوفة $P(n)$ في $(4-6)$ تحقق $(4-2)$ و $(4-3)$.

مما سبق نستطيع تقديم المبرهنة الآتية :

مبرهنة 4-3 : إذا كانت المصفوفة $P(n) > 0$ (موجبة تحديداً) من أجل $\alpha \in]-\alpha_1, \alpha_0[$ حيث

$\alpha_1 \geq 0$ و $\alpha = \alpha_0 > 0$ حل المعادلة $\det(P(n)) = 0$.عندئذٍ تكون الجملة $(4-1)$ مستقرّة أسيّاً .

الإثبات :

المصفوفة $p(n)$ تحقق :

$$0 < c_1 I \leq p(n) \leq c_2 I \qquad (4-7)$$

لنأخذ دالّة ليابونوف :

$$V(x,n) = x^T(n)p(n)x(n) \qquad (4-8)$$

والتي تحقق :

$$c_1\|x(n)\|^2 \leq V(x,n) \leq c_2\|x(n)\|^2$$

الآن من $(4-5)$ و $(4-6)$ تصبح $(4-8)$ بالشكل :

$$x^T(n)\{2A^T(n)A(n) - e^{-\sigma}[A(n) + A(n)]\}B(n)x(n) > 0 \qquad (3-9)$$

نعلم أنّ :

$$x(n) = \Phi(n,n_0)x(n_0)$$

علماً أنّ

$$\Phi(n,n_0) = \prod_{i=n_0}^{i=n-1} A(i)$$

نعوّض في $(4-9)$ ثمّ نأخذ المحدد ونساويه بالصفر :

$$\det\{2\Phi^T(n+1,n_0)B_1(n)\,\Phi(n+1,n_0) - e^{-\sigma_0}[\Phi^T(n+1,n_0)B_1(n)\Phi(n,n_0) + \Phi^T(n,n_0)B_1(n)\Phi(n+1,n_0)]\} = 0$$

هذه المعادلة محقّقة إذا تحقق الشرطان :

$$B_2(n) = A(n)B_1(n)A^{-1}(n) = B_1(n) \qquad (4-10)$$

و أيضاً :

$$\Phi(n+1,n_0) = e^{-\sigma_0}\Phi(n,n_0) \qquad (4-11)$$

من $(4-11)$ نستنتج أنّ :

$$\Phi(n,n_0) = e^{-\sigma_0(n-n_0)}\Phi(n_0,n_0)$$

$$\|\Phi(n,n_0)\| = e^{-\sigma_0(n-n_0)}$$

وبالتالي من أجل $\sigma_0 > 0$ تكون الجملة $(4-1)$ مستقرّة أسيّاً .

مثال 4-1: لنأخذ الجملة

$$x(n+1) = A(n)x(n) \quad ; \; n \geq n_0 > 0 \qquad (4-12)$$

حيث : $A(n) = \begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{n+2}{n} \end{pmatrix}$ ، نلاحظ أنّ

$$tr\, A(n) = \frac{2n^2+3n+2}{n^2+n} > 2$$

وبالتالي القيم الذاتيّة للمصفوفة $A(n)$ تقع خارج دائرة الوحدة وبالتالي الجملة $(4-12)$ غير مستقرّة
أسيّاً .

مثال 4-2: لنأخذ الجملة

$$x(n+1) = A(n)x(n) \quad ; \; n \geq 1 \qquad (4-13)$$

حيث: $A(n) = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$

$$tr\, A(n) = 0 < 2$$

لنأخذ المصفوفة $p(n) = P_1(n)B(n)$ حيث :

$$P_1(n) = 2A^T(n)A(n) - e^{-\sigma}[A^T(n) + A(n)]$$

الآن نأخذ :

$$\det P(n) = \det P_1(n) . \det B_1(n) = 0$$

بما أنّ $\det B_1(n) \neq 0$ فإنّ $\det P_1(n) = 0$ أي :

$$\det \begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n + e^{-\sigma_0}\right) & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - e^{-\sigma_0}\right) \end{pmatrix} = 0$$

$$-4\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - e^{-\sigma_0}\right)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow e^{-\sigma_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Longrightarrow \ \sigma_0 = n.\ln 2 > 0$$

وبالتالي حسب **مبرهنة 3-4** تكون الجملة $(13-4)$ مستقرّة أسيّاً .

مثال 3-4: لنأخذ الجملة

$$x(n+1) = A(n)x(n) \quad ; \ n \geq 1 \qquad (4-14)$$

حيث : $A(n) = \begin{pmatrix} \frac{n}{n+4} & 1 \\ 0 & \frac{n}{n+5} \end{pmatrix}$ ، نلاحظ أنّ :

$$tr\, A(n) = \frac{2n^2+9n}{n^2+9n+20} < 2$$

لنأخذ المصفوفة : $\mathrm{P}_1(n) = 2A^T(n)A(n) - e^{-\sigma}[A^T(n) + A(n)]$

$$\mathrm{P}_1(n) = \begin{pmatrix} \frac{2n}{n+4}\left(\frac{n}{n+4} - e^{-\sigma}\right) & \frac{n}{n+4} - e^{-\sigma} \\ \frac{n}{n+4} - e^{-\sigma} & \frac{2n+10n+25}{(n+5)^2} - \frac{2n}{n+5}e^{-\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathrm{P}_1(n) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{n}{n+4} - e^{-\sigma_0} = 0$$

$$\Longrightarrow \sigma_0 = \ln\left(\frac{n+4}{n}\right) > 0$$

وبالتالي فإنّ الجملة $(14-4)$ مستقرّة أسيّاً .

المراجع :

[1] ElAYDI.S ,(2005) - **An Introduction to Difference Equations**. Springer , Third Edition , New York , p 539.

[2] Bof,N and Carli,R and Schenato,L (2018) **Lyapunov theory for discrete time systems** , arXiv preprint arXiv:1809.05289.

[3] LIAO.X and Wang.L and YU.P (2007) - **Stability of Dynamical Systems** . Elsevier, London, Canada , P 718.

[4] BROGAN.W.L , (1990) **- Modern Control Theory**. Prentice-Hall , Third Edition , Las Vegas , p 653.

[5] HORN.R and JOHANSON.CR (1999)- **Topics in Matrix Analysis**, New York Cambridge University Press, p 607.