الحلقات شبه المحلية

إيمان الخوجة¹

حمزة حاكمي²

مريم حاكمي³

الملخص

تعد الحلقة المحلية، واحدة من أهم الحلقات في صف الحلقات التي أساس جاكبسون لها لا يساوي الصفر. لأجل ذلك درسنا في هذه الورقة العلمية تعميماً للحلقة المحلية تحت اسم الحلقة شبه المحلية. حيث نقول عن حلقة ما R إنها شبه محلية إذا كان لأجل كل عنصر $a \in R$ إما العنصر a أو العنصر $1-a$ يكون قابلاً للقلب جزئياً في R . وقد تبين لنا أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R محلية هو أن تكون شبه محلية وعناصرها الجامدة هي $0, 1$ فقط.

وقد أوجدنا العديد من الشروط اللازمة والكافية لكي تكون الحلقة شبه محلية، نذكر منها على سبيل المثال، أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R شبه محلية هو أن يكون لأجل كل عنصر $a \in R$ إما aR أو $(1-a)R$ يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر. إضافة لذلك، تكون الحلقة R شبه محلية عندما فقط عندما يكون لأجل كل عنصر $a \in R$ إما aR أو $(1-a)R$ يحوي عنصراً منتظماً مغايراً للصفر. كما أثبتنا أن الحلقة التي لا تحوي عناصر جامدة مغايرة للصفر والواحد تكون شبه محلية عندما فقط عندما تكون نظيفة أو r -نظيفة أو f -نظيفة. وقد وجدنا أيضاً أن حلقة المصفوفات المربعة من أي مرتبة فوق حلقة شبه محلية، تكون أيضاً شبه محلية.

أخيراً، أثبتنا أن حلقة الإندومورفيزمات لمودول حر منتهي التوليد فوق حلقة شبه محلية تكون أيضاً حلقة شبه محلية.

الكلمات المفتاحية: العنصر الجامد، العنصر المنتظم، العنصر القابل للقلب جزئياً، الحلقة المحلية وشبه المحلية.

رقم التصنيف العالمي للعام 2020: 16D10, 16D40, 16D80, 16D90.

¹ أستاذ مساعد قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة حمص.

² أستاذ قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة حمص.

³ طالب دراسات عليا قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة حمص.

Quasi-Local Rings

Eaman Al-Khouja¹ Hamza Hakmi² Maryam Bassam Hakmi³

Abstract

The local ring is concenter one of the most important rings in the class of rings which has a nonzero Jacobson radical. For that we study in this scientific paper a generalization for the local ring, called a quasi-local ring. Where we call a ring R is a quasi-local ring if for every element $a \in R$ either a or $1-a$ is a partially invertible element in R .

We show that the necessary and sufficient condition to be that a ring R is local if and only if R is a quasi-local ring and it's idempotent elements are $0,1$ only. We found many of necessary and sufficient conditions to be some ring, is quasi-local.

We mention from, that the ring R is quasi-local if and only if for every element $a \in R$ either a or $1-a$ contains a nonzero idempotent element. In addition to that, we proved that the ring R is quasi-local if and only if for every element $a \in R$ either a or $1-a$ contains a nonzero regular element.

Also, we obtain that if the ring R does not contains a non-zero idempotent elements is quasi-local if and only if R is a clean ring or r -clean ring or f -clean ring. We found that, the matrices ring from any order over a quasi-local ring is too quasi-local.

Finally, we proved that the endomorphism ring of free finitely generated module over a quasi-local ring is quasi-local.

Key Words: Idempotent element, Regular element, partially inver-tible element, Local and Quasi-local ring.

2020 Mathematical Subject Classification: 16D10,16D40,16D80,16D90.

¹ Assistant Professor, Department of Mathematics Homs University.

² Professor, Department of Mathematics Homs University.

³ Department of Mathematics Homs University.

المقدمة.

تعد الحلقة التي تحوي مثالياً أعظماً واحداً فقط والتي تسمى بالحلقة المحلية، واحدة من أهم الحلقات في صف الحلقات التي أساس جاكسون لها لا يساوي الصفر. ينتج من هذا التعريف أن كل عنصر a من حلقة محلية R إما أن يكون قابلاً للقلب في R أو أن العنصر $1-a$ يكون قابلاً للقلب في R ، وبالتالي لأجل كل عنصر a من حلقة محلية R يحقق إما $aR \cong R$ أو $(1-a)R \cong R$ ، وبالتالي فإن هذه الحلقة تحوي بداخلها نسخاً كثيرة عنها. فضلاً عن ذلك إن هذه الحلقة لا تحوي حدوداً مباشرة تختلف عن R والصفر.

لأجل ذلك درسنا في هذه الورقة العلمية تعميماً للحلقة المحلية تحت اسم الحلقة شبه المحلية. حيث نقول عن حلقة ما R إنها شبه محلية إذا كان لأجل كل عنصر $a \in R$ إما العنصر a أو العنصر $1-a$ يكون قابلاً للقلب جزئياً في R . وقد تبين لنا أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R محلية هو أن تكون شبه محلية وعناصرها الجامدة هي $0, 1$ فقط.

وقد أوجدنا العديد من الشروط اللازمة والكافية لكي تكون الحلقة شبه محلية، نذكر منها على سبيل المثال، أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R شبه محلية هو أن يكون لأجل كل عنصر $a \in R$ إما aR أو $(1-a)R$ يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر. إضافة لذلك، تكون الحلقة R شبه محلية عندما فقط عندما لأجل كل عنصر $a \in R$ إما aR أو $(1-a)R$ يحوي عنصراً منتظماً مغايراً للصفر. كما أثبتنا أن الحلقة التي لا تحوي عناصر جامدة مغايرة للصفر والواحد تكون شبه محلية عندما فقط عندما تكون نظيفة أو r -نظيفة أو f -نظيفة. وقد وجدنا أيضاً أن حلقة المصفوفات المربعة من أي مرتبة فوق حلقة شبه محلية، تكون أيضاً شبه محلية.

أخيراً، أثبتنا أن حلقة الإندومورفيزمات لمودول حر منتهي التوليد فوق حلقة شبه محلية تكون أيضاً حلقة شبه محلية.

الهدف من البحث.

لما كانت الحلقة المحلية تحتل أهمية كبيرة في نظرية الحلقات والمودولات، نظراً لأنها تحتوي مثالياً أعظماً واحداً فقط، حيث إنها تأتي في المرتبة الأولى في نظرية الحلقات، بين الحلقات التي أساس جاكبسون لها لا يساوي الصفر. ونظراً لهذه الأهمية درسنا في هذه الورقة العلمية تعميماً لهذه الحلقة تحت اسم الحلقات شبه المحلية.

1 - الدراسة المرجعية.

جميع الحلقات R التي سندرسها هي حلقات واحدة فيها $1 \neq 0$ والمودولات فوق هذه الحلقات هي مودولات يمينية. لأجل أي مودول M فوق R سنرمز لحلقة الإندومورفيزمات للمودول M بالشكل $S = \text{End}_R(M)$.

تعريف 1-1. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $a \in R$ إنه منتظم، إذا وجد عنصر $b \in R$ يحقق $a = aba$ ، ونقول عن الحلقة R إنها منتظمة إذا كان كل عنصر من الحلقة R هو عنصر منتظم، [4].

تعريف 1-2. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $e \in R$ إنه جامد إذا كان $e^2 = e$ ، ونقول عن العنصر الجامد $e \in R$ إنه مركزي إذا كان $eR = Re$ ، [1].

تعريف 1-3. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر المغاير للصفر $a \in R$ إنه قابل للقلب جزئياً في R ، إذا وجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ يحقق $b = bab$ ، ونقول عن الحلقة R إنها شبه منتظمة إذا كان كل عنصر من R قابل للقلب جزئياً في R ، [5].

تعريف 1-4. نقول عن الحلقة R إنها محلية إذا كان لأجل كل عنصر $a \in R$ ، إما a أو $1 - a$ قابل للقلب في R ، [8].

تعريف 1-5. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $x \in R$ إنه نظيف إذا أمكن كتابته على الشكل $x = a + e$ حيث $a \in R$ عنصر قابل للقلب في R و $e \in R$ عنصر جامد، ونقول عن الحلقة R إنها نظيفة إذا كانت جميع عناصرها نظيفة، [3].

تعريف 1-6. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $x \in R$ إنه r -نظيف إذا أمكن كتابته على الشكل $x = a + e$ حيث $a \in R$ عنصر منتظم و $e \in R$ عنصر جامد، ونقول عن الحلقة R إنها r -نظيفة إذا كانت جميع عناصرها r -نظيفة، [2] و [6].

تعريف 1-7. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $a \in R$ إنه كامل في R ، إذا وجد عنصرين $s, t \in R$ بحيث $sat = 1$. ونقول عن العنصر $x \in R$ إنه f -نظيف إذا أمكن كتابته على الشكل $x = a + e$ حيث $a \in R$ عنصر كامل و $e \in R$ عنصر جامد. ونقول عن الحلقة R إنها f -نظيفة إذا كانت جميع عناصرها f -نظيفة، [7].

أمثلة.

1 - في أي حلقة R ، كل عنصر جامد مغاير للصفر، منتظم مغاير للصفر، كامل، قابل للقلب، هو عنصر قابل للقلب جزئياً في الحلقة R .

2 - في حلقة الأعداد الصحيحة $Z_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس 8، كل من 1, 3, 5, 7 هي عناصر قابلة للقلب جزئياً في Z_8 .

الدراسة البحثية.

2 - الحلقات شبه محلية.

تعريف 2-1.

لتكن R حلقة. نقول عن الحلقة R إنها شبه محلية إذا كان لأجل كل عنصر $a \in R$ ، إما a أو $1 - a \in R$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R .

أمثلة.

1 - حلقة الأعداد الصحيحة $Z_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بالمقاس 8 هي حلقة شبه محلية. لأنه إذا كان $a \in Z_8$ ، عندئذ:

- إذا كان $a = 0$ ، عندئذ $1 - a = 1$ عنصر قابل للقلب جزئياً في Z_8 .

- إذا كان $a = 1, 3, 5, 7$ ، عندئذ a عنصر قابل للقلب في Z_8 وبالتالي فإن a عنصر قابل للقلب جزئياً في Z_8 .

- إذا كان $a = 2$ ، عندئذ $1 - a = 1 - 2 = 1 + (8 - 2) = 7$ عنصر قابل للقلب جزئياً في Z_8 .

- إذا كان $a = 4$ ، عندئذ $1 - a = 1 - 4 = 1 + (8 - 4) = 5$ عنصر قابل للقلب جزئياً في Z_8 .

- إذا كان $a = 6$ ، عندئذ $1 - a = 1 - 6 = 1 + (8 - 6) = 3$ عنصر قابل للقلب جزئياً في Z_8 .

مما سبق نجد أن الحلقة Z_8 شبه محلية.

2 - حلقة الأعداد الصحيحة $Z_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ بالنسبة لعمليات الجمع والضرب بالمقاس 12 هي حلقة شبه محلية. لأنه إذا كان $a \in Z_{12}$ ، عندئذ:

- إذا كان $a = 0$ ، عندئذ $1 - a = 1$ عنصر قابل للقلب جزئياً في Z_{12} .

- إذا كان $a = 1, 5, 7, 11$ ، عندئذ a عنصر قابل للقلب في Z_{12} وبالتالي a عنصر قابل للقلب جزئياً في Z_{12} .

- إذا كان $a = 4, 9$ ، عندئذ a عنصر جامد في Z_{12} وبالتالي فإن a عنصر قابل للقلب جزئياً في Z_{12} .

- إذا كان $a = 2$ ، عندئذ $1 - a = 1 - 2 = 1 + (12 - 2) = 11$ عنصر قابل للقلب جزئياً في Z_{12} .

- إذا كان $a = 6$ ، عندئذ $1 - a = 1 - 6 = 1 + (12 - 6) = 7$ عنصر قابل للقلب جزئياً في Z_{12} .

- إذا كان $a = 8$ ، عندئذ $1 - a = 1 - 8 = 1 + (12 - 8) = 5$ عنصر قابل للقلب جزئياً في Z_{12} .

- إذا كان $a = 3$ ، ولما كان $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3$ نجد أن a عنصر قابل للقلب جزئياً في Z_{12} .

- إذا كان $a = 10$ ، ولما كان $4 \cdot 10 \cdot 4 = 4$ نجد أن a عنصر قابل للقلب جزئياً في Z_{12} .
مما سبق نجد أن الحلقة Z_{12} شبه محلية.

تمهيدية 2-2

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1 - الحلقة R شبه محلية.

2 - لأجل كل $a \in R$ ، إما aR أو $(1-a)R$ يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر.

3 - لأجل كل $a \in R$ ، إما Ra أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر.

4 - لأجل كل $a \in R$ ، إما aR أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر.

5 - لأجل كل $a \in R$ ، إما Ra أو $(1-a)R$ يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R شبه محلية وليكن $a \in R$ ، عندئذ حسب التعريف إما a

أو $1-a$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R . وهنا نميز حالتين:

- إذا كان العنصر $a \in R$ قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر

$b \in R$ بحيث إن $b = bab$ ومنه فإن $ab \in aR$ عنصر جامد مغاير للصفر في R .

- إذا كان العنصر $1-a \in R$ قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير

للصفر $d \in R$ بحيث إن $d = d(1-a)d$ ، ومنه فإن $(1-a)d \in (1-a)R$ عنصر جامد

مغاير للصفر في R .

(2) $\Leftrightarrow$ (1). ليكن $a \in R$ ، عندئذ حسب الفرض إما aR أو $(1-a)R$ يحوي عنصر

جامد مغاير للصفر $e \in R$. وهنا نميز حالتين:

- إذا كان $e \in aR$ ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $x \in R$ ، بحيث إن $e = ax$. لنضع

$b = xax$ ، فنجد أن $b \in R$ عنصر مغاير للصفر، وأن:

$$bab = (xax)a(xax) = xax = b$$

وهذا يبين أن العنصر $a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R .

- إذا كان $e \in (1-a)R$ ، عندئذ يوجد عنصر $y \in R$ ، $0 \neq y$ ، بحيث إن $e = (1-a)y$. لنضع

$d = y(1-a)y$ ، فنجد أن $d \in R$ عنصر مغاير للصفر، وأن:

$$d(1-a)d = y(1-a)y(1-a)y(1-a)y = y(1-a)y = d$$

وهذا يبين أن العنصر $1-a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R ، ومنه الحلقة R شبه محلية.

التكافؤ (1) $\Leftrightarrow$ (3) يبرهن بطريقة مشابهة للتكافؤ (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(1) $\Leftrightarrow$ (4). لنفرض أن الحلقة R شبه محلية وليكن $a \in R$ ، عندئذ حسب التعريف إما a أو $1-a$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R . وهنا نميز حالتين:

- إذا كان العنصر $a \in R$ قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث إن $b = bab$ ، ومنه فإن $ab \in aR$ عنصر جامد مغاير للصفر في R .

- إذا كان العنصر $1-a \in R$ قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $d \in R$ بحيث إن $d = d(1-a)d$ ، ومنه فإن $d(1-a) \in R(1-a)$ عنصر جامد مغاير للصفر في R .

(4) $\Leftrightarrow$ (1). ليكن $a \in R$ ، عندئذ حسب الفرض إما aR أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً جامداً مغيراً للصفر $e \in R$. وهنا نميز حالتين:

- إذا كان aR ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $x \in R$ بحيث إن $e = ax$. لنضع $b = xax$ فنجد أن $b \in R$ عنصر مغاير للصفر، وأن:

$$bab = (xax)a(xax) = xax = b$$

وهذا يبين أن العنصر $a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R .

- إذا كان $e \in R(1-a)$ ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $y \in R$ بحيث إن $e = y(1-a)$. لنضع $d = y(1-a)y$ فنجد أن $d \in R$ عنصر مغاير للصفر، وأن:

$$d(1-a)d = y(1-a)y(1-a)y(1-a)y = y(1-a)y = d$$

وهذا يبين أن العنصر $1-a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R .

مما سبق نجد أن الحلقة R شبه محلية.

التكافؤ (1) $\Leftrightarrow$ (5) يبرهن بطريقة مشابهة للتكافؤ (1) $\Leftrightarrow$ (4).

مبرهنة 2-3.

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1 - الحلقة R شبه محلية.

2 - لأجل كل $a \in R$ ، إما aR أو $(1-a)R$ يحوي عنصراً منتظماً مغيراً للصفر.

3 - لأجل كل $a \in R$ ، إما Ra أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً منتظماً مغيراً للصفر.

4 - لأجل كل $a \in R$ ، إما aR أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً منتظماً مغيراً للصفر.

5 - لأجل كل $a \in R$ ، إما Ra أو $(1-a)R$ يحوي عنصراً منتظماً مغايراً للصفر.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R شبه محلية وليكن $a \in R$ ، عندئذ حسب التمهيدية (2-2) إما aR أو $(1-a)R$ يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر في R . ولما كان كل عنصر جامد في R هو عنصر منتظم نجد أنه إما aR أو $(1-a)R$ يحوي عنصراً منتظماً مغايراً للصفر في R .

(2) $\Leftrightarrow$ (1). ليكن $a \in R$ ، عندئذ حسب الفرض إما aR أو $(1-a)R$ يحوي عنصراً منتظماً $b \in R$ مغايراً للصفر في R . لما كان العنصر $b \in R$ منتظماً فإنه يوجد عنصر مغاير للصفر $c \in R$ بحيث إن $b = bcb$. وهنا نميز حالتين:

- إذا كان $b \in aR$ ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $x \in R$ بحيث إن $b = ax$ ، ومنه نجد أن $bc = axc \in aR$ وأن $bc \in R$ عنصر جامد مغاير للصفر في R .

- إذا كان $b \in (1-a)R$ ، عندئذ يوجد عنصر $0 \neq y \in R$ بحيث إن $b = (1-a)y$ ، ومنه نجد أن $bc = (1-a)yc \in (1-a)R$ ، وأن $bc \in R$ عنصر جامد مغاير للصفر في R . مما سبق وحسب التمهيدية (2-2) نجد أن الحلقة R شبه محلية.

التكافؤ (1) $\Leftrightarrow$ (3) يبرهن بطريقة مشابهة للتكافؤ (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(1) $\Leftrightarrow$ (4). لنفرض أن الحلقة R شبه محلية وليكن $a \in R$ ، عندئذ حسب التمهيدية (2-2) إما aR أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر في R . ولما كان كل عنصر جامد في R هو عنصر منتظم نجد أنه إما aR أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً منتظماً مغايراً للصفر في R .

(4) $\Leftrightarrow$ (1). ليكن $a \in R$ ، عندئذ حسب الفرض إما aR أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً منتظماً $b \in R$ مغايراً للصفر في R . لما كان العنصر $b \in R$ منتظماً فإنه يوجد عنصر مغاير للصفر $c \in R$ بحيث إن $b = bcb$. وهنا نميز حالتين:

- إذا كان $b \in aR$ ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $x \in R$ بحيث إن $b = ax$ ، ومنه نجد أن $bc = axc \in aR$ ، وأن $bc \in R$ عنصر جامد مغاير للصفر في R .

- إذا كان $b \in R(1-a)$ ، عندئذ يوجد عنصر $0 \neq y \in R$ بحيث إن $b = y(1-a)$ ، ومنه نجد أن $cb = cy(1-a) \in R(1-a)$ ، وأن $cb \in R$ عنصر جامد مغاير للصفر في R .
 مما سبق وحسب التمهيدية (2-2) نجد أن الحلقة R شبه محلية.
 التكافؤ (1) $\Leftrightarrow$ (5) يبرهن بطريقة مشابهة للتكافؤ (1) $\Leftrightarrow$ (4).

تمهيدية 2-4.

لتكن R حلقة و $0 \neq e \in R$ عنصراً جامداً في R . القضيتان الآتيتان صحيحتان:
 1 - إذا كانت الحلقة R شبه محلية وأن العنصر $e \in R$ مركزي، عندئذ تكون الحلقة eR شبه محلية.
 2 - إذا كانت الحلقة eRe شبه محلية، عندئذ تكون الحلقة R شبه محلية.

البرهان.

1 - لنفرض أن الحلقة R شبه محلية وأن العنصر $e \in R$ مركزي. ليكن $a \in eR$ ، لما كان $a \in R$ ، عندئذ حسب الفرض إما a أو $1-a$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R . وهنا نميز حالتين:

- إذا كان العنصر a قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث إن $b = bab$ ، ومنه $(eb)a(eb) = eb$. فضلاً عن ذلك، إن $eb \in eR$ عنصر مغاير للصفر، وهذا يبين أن العنصر a قابل للقلب جزئياً في eR .

- إذا كان العنصر $1-a$ قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $d \in R$ بحيث إن $d = d(1-a)d$ ، ومنه فإن $(ed)(e-a)(ed) = ed$.

فضلاً عن ذلك، إن $ed \in eR$ عنصر مغاير للصفر، وهذا يبين لنا أن العنصر $e-a$ قابل للقلب جزئياً في الحلقة eR .

مما سبق نجد أن الحلقة eR شبه محلية.

2 - لنفرض أن الحلقة eRe شبه محلية وليكن $a \in R$ ، عندئذ فإن $ea \in eRe$ ، ومنه إما $ea \in eR$ أو $e - ea \in eR$ عنصر قابل للقلب جزئياً في الحلقة eRe . وهنا نميز حالتين:

- إذا كان العنصر ea قابلاً للقلب جزئياً في الحلقة eRe ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصف $b \in eRe$ بحيث $b = b(eae)b$ ، ومنه فإن $b = bab$. فضلاً عن ذلك، إن $b \in R$ عنصر مغاير للصف، وهذا يبين أن العنصر a قابل للقلب جزئياً في R .

- إذا كان العنصر $e - eae$ قابلاً للقلب جزئياً في الحلقة eRe ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصف $d \in eRe$ بحيث $d = d(e - eae)d$ ، ومنه فإن $d = d(1 - a)d$. فضلاً عن ذلك إن $d \in R$ عنصر مغاير للصف، وهذا يبين أن العنصر $1 - a$ قابل للقلب جزئياً في R .

مما سبق نجد أن الحلقة R شبه محلية.

اعتماداً على التمهيدية (2-4) يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة 2-5.

لتكن R حلقة و $0 \neq e \in R$ عنصر جامد مركزي. الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة R شبه محلية.

2 - الحلقة eRe شبه محلية.

مبرهنة 2-6.

لأجل أي حلقة R الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة R محلية.

2 - الحلقة R شبه محلية وعناصرها الجامدة هي $0, 1$ فقط.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R محلية وليكن $e \in R$ عنصراً جامداً، عندئذ حسب التعريف

إما e أو $1 - e$ عنصر قابل للقلب في R .

- إذا كان العنصر e قابلاً للقلب في R ، عندئذ يوجد عنصر $b \in R$ بحيث $eb = 1$ ، ومنه

$$e = e(eb) = eb = 1$$

- إذا كان العنصر $1 - e$ قابلاً للقلب في R ، عندئذ يوجد عنصر $d \in R$ بحيث إن

$$d(1 - e) = 1 \text{ ومنه فإن } d(1 - e)e = d(e - e) = 0, \text{ وهذا يبين أن العناصر الجامدة}$$

في R هي $0, 1$ فقط.

بالإضافة لذلك، أيًا يكن $a \in R$ ، عندئذ بحسب الفرض إما a أو $1-a$ عنصر قابل للقلب في R . وهنا نميز حالتين:

- إذا كان العنصر a قابلاً للقلب في R ، عندئذ $aR = R$ يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر في R .

- إذا كان العنصر $1-a$ قابلاً للقلب في R ، عندئذ $(1-a)R = R$ يحوي عنصراً جامداً مغايراً للصفر في R .

مما سبق نجد أن حلقة شبه محلية وعناصرها الجامدة $0, 1$ فقط.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة R شبه محلية وعناصرها الجامدة هي $0, 1$ فقط. ليكن

$a \in R$ ، عندئذ بحسب الفرض إما a أو $1-a$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R .

- إذا كان العنصر a قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث $b = bab$ ، ومنه كل من ab و ba عنصر جامد مغاير للصفر في R ،

وحسب الفرض نجد أن $ba = ab = 1$ ، وهذا يبين أن العنصر a قابل للقلب في R .

- إذا كان العنصر $1-a$ قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $d \in R$ بحيث $d = d(1-a)d$ ، ومنه كل من $(1-a)d$ و $d(1-a)$ عنصر جامد مغاير

للصفر في R ، وحسب الفرض نجد أن $d(1-a) = (1-a)d = 1$ ، وهذا يبين أن العنصر $1-a$ قابل للقلب في R .

مما سبق نجد أن الحلقة R محلية.

اعتماداً على المبرهنة (2-6) يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة 2-7.

ليكن M مودولاً غير قابل للتحويل فوق حلقة R و $S = \text{End}_R(M)$. عندئذ الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة S محلية هو أن تكون الحلقة S شبه محلية.

مبرهنة 2-8.

لنكن R حلقة عناصرها الجامدة هي $0, 1$ فقط. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة R نظيفة.

2 - الحلقة R شبه محلية.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R نظيفة وليكن $x \in R$ ، عندئذ $x = a + e$ حيث $a \in R$ عنصر قابل للقلب في R وأن $e \in R$ عنصر جامد في R . وحسب الفرض إما $e = 0$ أو $e = 1$.

- إذا كان $e = 0$ ، عندئذ $x = a$ عنصر قابل للقلب في R ، ومنه فإن العنصر x قابل للقلب جزئياً في R .

- إذا كان $e = 1$ ، عندئذ $a = x - 1$ عنصر قابل للقلب في R ، ومنه فإن العنصر $x - 1$ قابل للقلب جزئياً في R ، وبالتالي العنصر $1 - x$ قابل للقلب جزئياً في R .
مما سبق نجد أن الحلقة R شبه محلية.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة R شبه محلية وليكن $a \in R$ ، عندئذ حسب الفرض إما a أو $1 - a$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R . وهنا نميز حالتين:

- إذا كان العنصر a قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث إن $b = bab$ ، ومنه كل من ab و ba عنصر جامد مغاير للصفر في R ، وحسب الفرض $ab = ba = 1$ ، وهذا يبين أن العنصر a قابل للقلب في R ، ولما كان $a = a + 0$ نجد أن العنصر a نظيف.

- إذا كان العنصر $1 - a$ قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يكون العنصر $a - 1$ قابلاً للقلب جزئياً في R ، ومنه يوجد عنصر مغاير للصفر $d \in R$ بحيث $d = d(a - 1)d$ ، ومنه كل من $(a - 1)d$ و $d(a - 1)$ عنصر جامد مغاير للصفر في R ، وحسب الفرض نجد أن $(a - 1)d = d(a - 1) = 1$ ، وهذا يبين أن العنصر $a - 1$ قابل للقلب في R ، ولما كان $a = (a - 1) + 1$ نجد أن العنصر a نظيف.
مما سبق تكون الحلقة R نظيفة.

مبرهنة 2-9.

لتكن R حلقة عناصرها الجامدة هي 0, 1 فقط. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة R شبه محلية.

2 - الحلقة R هي f -نظيفة.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R شبه محلية وليكن $a \in R$ ، عندئذ حسب الفرض إما

أو $1-a$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R . وهنا نميز حالتين:

- إذا كان العنصر a قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث إن $b = bab$ ، ومنه فإن ab عنصر جامد مغاير للصفر في R ، وحسب الفرض $ab = 1$ ، وهذا يبين أن العنصر a كامل، ولما كان $a = a + 0$ نجد أن العنصر a هو f -نظيف.

- إذا كان العنصر $1-a$ قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ فإن العنصر $a-1$ قابل للقلب جزئياً في R ، ومنه يوجد عنصر مغاير للصفر $d \in R$ بحيث إن $d = d(a-1)d$ ، ومنه فإن $(a-1)d$ عنصر جامد مغاير للصفر في R ، وحسب الفرض نجد أن $(a-1)d = 1$ ، وهذا يبين أن العنصر $a-1$ كامل في R ، ولما كان $a = (a-1) + 1$ نجد أن العنصر a هو f -نظيف.

مما سبق نجد أن الحلقة R هي f -نظيفة.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة R هي f -نظيفة وليكن $a \in R$ ، عندئذ $a = x + e$

حيث $x \in R$ عنصر كامل وأن $e \in R$ عنصر جامد في R ، وحسب الفرض إما $e = 0$ أو $e = 1$.

- إذا كان $e = 0$ ، عندئذ $a = x$ عنصر كامل، وبالتالي يوجد $s, t \in R$ بحيث $sat = 1$ ، ومنه نجد أن $(ts)a(ts) = ts$ و $ts \in R$ عنصر مغاير للصفر، وهذا يبين أن العنصر a قابل للقلب جزئياً في R .

- إذا كان $e = 1$ ، عندئذ $a = x + 1$ ، ومنه فإن $x = a - 1$ وبالتالي $a - 1$ عنصر كامل، ومنه نجد أن العنصر $a - 1$ قابل للقلب جزئياً في R ، وبالتالي العنصر $1 - a$ قابل للقلب جزئياً في R .

مما سبق نجد أن الحلقة R شبه محلية.

مبرهنة 2-10.

لتكن R حلقة عناصرها الجامدة هي $0, 1$ فقط. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة R شبه محلية.

2 - الحلقة R هي r -نظيفة.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R شبه محلية وليكن $a \in R$ ، عندئذ حسب الفرض إما a أو $1-a$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R . وهنا نميز حالتين:

- إذا كان العنصر a قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث إن $b = bab$ ، ومنه فإن ab عنصر جامد مغاير للصفر في R ، وحسب الفرض $ab = 1$ ومنه $a = aba$ ، وهذا يبين أن العنصر a منتظم، ولما كان $a = a + 0$ نجد أن العنصر a هو r -نظيف.

- إذا كان العنصر $1-a$ قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ فإن العنصر $a-1$ قابل للقلب جزئياً في R ، ومنه يوجد عنصر مغاير للصفر $d \in R$ بحيث إن $d = d(a-1)d$ ، ومنه $(a-1)d$ عنصر جامد مغاير للصفر في R ، وحسب الفرض فإن $(a-1)d = 1$ ومنه نجد أن $(a-1)d(a-1) = (a-1)$ ، وهذا يبين أن العنصر $a-1$ منتظم في R ، ولما كان $a = (a-1) + 1$ نجد أن العنصر a هو r -نظيف.

مما سبق نجد أن الحلقة R هي r -نظيفة.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة R هي r -نظيفة وليكن $a \in R$ ، عندئذ فإن $a = x + e$ حيث $x \in R$ عنصر منتظم وأن $e \in R$ عنصر جامد في R ، وحسب الفرض إما $e = 0$ أو $e = 1$.

- إذا كان $e = 0$ ، عندئذ $a = x$ عنصر منتظم ومنه نجد أن العنصر a قابل للقلب جزئياً في R .

- إذا كان $e = 1$ ، عندئذ $a = x + 1$ ، ومنه $x = a - 1$ وبالتالي $a - 1$ عنصر منتظم، ومنه نجد أن العنصر $a - 1$ قابل للقلب جزئياً في R وبالتالي العنصر $1 - a$ قابل للقلب جزئياً في R .

مما سبق نجد أن الحلقة R شبه محلية.

3 - حلقة المصفوفات شبه المحلية.

في هذه الفقرة سنستخدم الرموز الآتية:

لتكن R حلقة ولنفرض أن $D_2(R)$ حلقة المصفوفات القطرية من المرتبة 2×2 فوق الحلقة R ، و $T_2(R)$ حلقة المصفوفات المثلثية العليا من المرتبة 2×2 فوق الحلقة R ، و $M_n(R)$ حلقة المصفوفات المربعة من المرتبة n فوق الحلقة R .

تمهيدية 3-1.

لتكن R حلقة، عندئذ لأجل أي عنصر مغاير للصفر $a \in R$ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 - إذا كان العنصر a قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ العنصر $\alpha = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ يكون قابلاً للقلب جزئياً في الحلقة $D_2(R)$ ، وذلك أيأ كان $x \in R$.

2 - إذا كان العنصر a قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ العنصر $\alpha = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ يكون قابلاً للقلب جزئياً في الحلقة $D_2(R)$ ، وذلك أيأ كان $x \in R$.
البرهان.

1 - لنفرض أن العنصر a قابل للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث إن $b = bab$ ، ومنه فإن $\beta = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in D_2(R)$ عنصر مغاير للصفر ويحقق أن $\beta = \beta\alpha\beta$ ، وهذا يبين أن العنصر α قابل للقلب جزئياً في $D_2(R)$. بالمثل يمكننا إثبات صحة (2).

مبرهنة 3-2.

لأجل أي حلقة R الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة R شبه محلية.

2 - الحلقة $D_2(R)$ شبه محلية.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R شبه محلية، وليكن $\alpha = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in D_2(R)$ حيث

$a, b \in R$. لما كان $a \in R$ ، عندئذ حسب الفرض إما a أو $1-a$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R ، وحسب التمهيديّة (1-3) نجد أنه إما α أو $1-\alpha$ عنصر قابل للقلب جزئياً في $D_2(R)$ ، وهذا يبين أن الحلقة $D_2(R)$ شبه محلية.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة $D_2(R)$ شبه محلية، وليكن $a \in R$ ، عندئذ

$w = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in D_2(R)$ وحسب الفرض إما w أو $1-w$ عنصر قابل للقلب جزئياً في

الحلقة $D_2(R)$.

- إذا كان العنصر w قابلاً للقلب جزئياً في $D_2(R)$ ، عندئذ يوجد عنصر $\beta \in D_2(R)$

بحيث $\beta \neq 0$ ويحقق أن $\beta = \beta w \beta$. إن $\beta = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ حيث $x, y \in R$ ، ومنه فإن:

$$\beta w \beta = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \beta$$

وبالتالي فإن $\begin{bmatrix} xax & 0 \\ 0 & yay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ وهذا يبين أن $xax = x$ و $yay = y$. لما كان

$\beta \neq 0$ نجد أنه إما $x \neq 0$ أو $y \neq 0$ وهكذا فإن العنصر a قابل للقلب جزئياً في R .

- إذا كان العنصر $1-w$ قابلاً للقلب جزئياً في $D_2(R)$ ، عندئذ يوجد $\beta \in D_2(R)$

بحيث $\beta \neq 0$ ويحقق أن $\beta = \beta(1-w)\beta$. إن $\beta = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ حيث $x, y \in R$ ، ومنه نجد

أن:

$$\beta(1-w)\beta = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1-a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \beta$$

وبالتالي يكون:

$$\begin{bmatrix} x(1-a)x & 0 \\ 0 & y(1-a)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

وهذا يبين أن $x(1-a)x = x$ و $y(1-a)y = y$. لما كان $\beta \neq 0$ نجد أنه إما $x \neq 0$

أو $y \neq 0$ ، وهكذا نجد أن العنصر $1-a$ قابل للقلب جزئياً في R .
 مما سبق نجد أن الحلقة R شبه محلية.

تمهيدية 3-3.

لتكن R حلقة، عندئذ لأجل أي عنصر مغاير للصفر $a \in R$ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 - إذا كان العنصر a قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ العنصر $\alpha = \begin{bmatrix} a & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$ يكون قابلاً للقلب جزئياً في الحلقة $T_2(R)$ ، وذلك أياً كان $x, y \in R$.

2 - إذا كان العنصر a قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ العنصر $\alpha = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix}$ يكون قابلاً للقلب جزئياً في الحلقة $T_2(R)$ ، وذلك أياً كان $x, y \in R$.
البرهان.

1 - لنفرض أن العنصر a قابل للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث إن $b = bab$ ، ومنه فإن $\beta = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in T_2(R)$ عنصر مغاير للصفر ويحقق أن $\beta = \beta\alpha\beta$ ، وهذا يبين أن العنصر α قابل للقلب جزئياً في $T_2(R)$. بالمثل يمكننا إثبات صحة (2).

مبرهنة 4-3.

لأجل أي حلقة R الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة R شبه محلية.

2 - الحلقة $T_2(R)$ شبه محلية.

البرهان.

(1) $\Leftrightarrow$ (2). لنفرض أن الحلقة R شبه محلية، وليكن $\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in T_2(R)$ حيث

$a, b, c \in R$. لما كان $a \in R$ ، عندئذ حسب الفرض إما a أو $1-a$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R ، حسب التمهيدية (3-3) نجد أنه إما α أو $1-\alpha$ عنصر قابل للقلب

جزئياً في $T_2(R)$ ، وهذا يبين أن الحلقة $T_2(R)$ شبه محلية.

(2) $\Leftrightarrow$ (1). لنفرض أن الحلقة $T_2(R)$ شبه محلية وليكن $a \in R$ ، عندئذ:

$$\alpha = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in T_2(R)$$

لما كانت الحلقة $T_2(R)$ شبه محلية فإنه إما α أو $1-\alpha$ عنصر قابل للقلب جزئياً في الحلقة $T_2(R)$.

- إذا كان العنصر α قابلاً للقلب جزئياً في $T_2(R)$ ، عندئذ يوجد عنصر $\beta \in T_2(R)$

بحيث $\beta \neq 0$ يحقق أن $\beta = \beta\alpha\beta$. إن $\beta = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & r \end{bmatrix}$ حيث $x, y, r \in R$ ، ومنه فإن:

$$\beta\alpha\beta = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & ya \\ 0 & ra \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & r \end{bmatrix} = \beta$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{bmatrix} xax & xay + yar \\ 0 & rar \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

وهذا يبين أن $xax = x$ و $xay + yar = y$ و $rar = r$.

- إذا كان $x = y = 0$ نجد أن $r \in R$ عنصر مغاير للصفر ويحقق أن $rar = r$.

- إذا كان $y = r = 0$ نجد أن $x \in R$ عنصر مغاير للصفر ويحقق أن $xax = x$.

- إذا كان $x = r = 0$ نجد أن $y = 0$ وهذا غير ممكن، لأن $\beta \neq 0$.

مما سبق نجد العنصر $a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R .

- إذا كان $1-\alpha$ قابلاً للقلب جزئياً في $T_2(R)$ ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر

$\beta = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & r \end{bmatrix} \in T_2(R)$ حيث $x, y, r \in R$ ويحقق أن $\beta = \beta(1-\alpha)\beta$ ومنه فإن:

$$\begin{aligned} \beta(1-\alpha)\beta &= \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1-a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & r \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x(1-a) & y(1-a) \\ 0 & r(1-a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & r \end{bmatrix} = \beta \end{aligned}$$

وبالتالي يكون:

$$\begin{bmatrix} x(1-a)x & x(1-a)y + y(1-a)r \\ 0 & r(1-a)r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

وهذا يبين أن $x(1-a)x = x$ و $x(1-a)y + y(1-a)r = y$ و $r(1-a)r = r$.
 - إذا كان $x = y = 0$ فإن $r \in R$ عنصر مغاير للصفر ويحقق أن $r(1-a)r = r$.
 - إذا كان $y = r = 0$ فإن $x \in R$ عنصر مغاير للصفر ويحقق أن $x(1-a)x = x$.
 - إذا كان $x = r = 0$ نجد أن $y = 0$ وهذا غير ممكن، لأن $\beta \neq 0$.
 مما سبق نجد العنصر $1-a \in R$ قابل للقلب جزئياً في R . بالتالي تكون الحلقة R شبه محلية.

مبرهنة 3-5.

لتكن R حلقة. إذا كانت الحلقة R شبه محلية، عندئذ فإن الحلقة $M_n(R)$ تكون شبه محلية أيضاً.
البرهان.

نفرض أن الحلقة R شبه محلية، وليكن $\alpha = [a_{ij}] \in M_n(R)$ حيث $a_{ij} \in R$. لما كانت الحلقة R شبه محلية فإنه إما a_{11} أو $1-a_{11}$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R .
 - إذا كان العنصر a_{11} قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث $b = ba_{11}b$ ومنه فإن $\beta = [b_{ij}] \in M_n(R)$ حيث $b_{11} = b$ ، و $b_{ij} = 0$ عدا ذلك، عنصر مغاير للصفر ويحقق أن $\beta \cdot \alpha \cdot \beta = \beta$.
 - إذا كان العنصر $1-a_{11}$ قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $d \in R$ بحيث $d = d(1-a_{11})d$ ، ومنه يوجد عنصر $\beta = [b_{ij}] \in M_n(R)$ حيث $b_{11} = d$ وأن $b_{ij} = 0$ عدا ذلك، ويحقق أن $\beta \cdot (1-\alpha) \cdot \beta = \beta$.
 مما سبق نجد أن الحلقة $M_n(R)$ شبه محلية.

اعتماداً على المبرهنة (3-5) يمكننا صياغة المبرهنة الآتية:

مبرهنة 3-6.

ليكن F مودولاً حراً منتهي التوليد فوق حلقة R وأن $S = \text{End}_R(F)$. إذا كانت الحلقة R شبه محلية، عندئذ تكون الحلقة S شبه محلية أيضاً.

البرهان.

لنفرض أن R حلقة شبه محلية وأن F مودولاً حراً منتهي التوليد فوق الحلقة R مولداً بـ n عنصر، عندئذ فإن $F \cong R^n$. ولما كانت الحلقة R شبه محلية فإنه حسب المبرهنة (3-5) تكون الحلقة $M_n(R)$ شبه محلية أيضاً، ولما كان:

$$M_n(R) \cong \text{End}_R(R^n) \cong \text{End}_R(F) = S$$

نجد أن الحلقة S شبه محلية.

المراجع العلمية.

- [1] – Anderson, F. W. and Fuller, K. R., " Rings and Categories of Modules ", New York. Springer (1973).
- [2] – Ashrafi, N. and Nasibi, E., " Rings in Which Elements are Sum of an Idempotent and Regular Element ", Bulletin of the Iranian Mathematical Society. **Vol. 39**, No. 3, (2013), p.p 579 – 588.
- [3] – Chen, W. and Cui, S., " On Clean Rings and Clean Elements ", South. Asian Bull. Math. **Vol. 32**, No. 5, (2008), pp. 855 – 861.
- [4] – Goodearl, K. R., " Von Neumann Regular Rings ", Pitman 1979 .
- [5] – Hamza, H., " I_0 –Rings and I_0 –Module", Math. J. Okayama Univ. **Vol. 40**, (1998), p. 91 – 97.
- [6] – Hamza, H., " r –Clean Rings Relative to Right Ideals ", Journal of Algebraic Systems. **Vol. 9**, No. 2, (2022), pp. 1 – 19.
- [7] – Handam, A., "On f-Clean Rings and f-Clean Elements ", Proyecciones Journal of Mathematics. **Vol. 30**, No 2, (2011), pp. 277 – 284.
- [8] – Lambek, J., " Lectures on Rings and Modules ", Blaisdell, Mass. 1966.