

## دراسة استقرار المعادلة التفاضلية اللاخطية ذات تأخير

### زمني

المشرف الدكتور سامح العرجة

الاسم: وفاء خضر شحادة

#### ملخص البحث:

في هذا البحث سندرس الاستقرار التقاربي للحل الصفري والحلول الدورية بتطبيق نظرية النقطة الثابتة للمعادلات التفاضلية اللاخطية من الشكل:

$$\dot{x}(t) = -a(t, x_t)x(t) + F(t, x_t) \quad (1.1)$$

أو من الشكل

$$\dot{x}(t) = -g(t, x(t)) + F(t, x_t) \quad (1.2)$$

حيث  $a(t, x_t), F(t, x_t) \in C(R^+ \times \mathbb{C}, R)$  و  $g(t, x(t)) \in C^1(R \times R, R)$  و

$$\mathbb{C} = C[[-r, 0], R]$$

.  $r > 0$  و  $\theta \in [-r, 0]$  من أجل  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$

كلمات مفتاحية: معادلات تفاضلية، استقرار تقاربي، نظرية النقطة الثابتة، تأخير زمني

## Study of stability of a nonlinear differential equation with delay

### Abstract

First, we consider the nonlinear differential equation with bounded delay by using the fixed point theory:

$$\dot{x}(t) = -a(t, x_t)x(t) + F(t, x_t)$$

Or

$$\dot{x}(t) = -g(t, x(t)) + F(t, x_t)$$

where  $g(t, x(t)) \in a(t, x_t), F(t, x_t) \in C(R^+ \times \mathbb{C}, R), C^1(R \times R, R),$

$x_t(\theta) = x(t + \theta)$  any  $\theta \in [-r, 0], r > 0$

$\mathbb{C} = C([-r, 0], R)$

**Key words:** asymptotic stability, variable delay, fixed-point theory, differential equation.

## المشكلة وأهمية البحث:

وجدنا صعوبة بدراسة الاستقرار باستخدام تابع لبيانوف للمعادلات التفاضلية من الشكل:

$$\dot{x}(t) = -a(t, x_t)x(t) + F(t, x_t)$$

$$\dot{x}(t) = -g(t, x(t)) + F(t, x_t)$$

وجدنا أن استخدام مبرهنة النقطة الثابتة أسهل لدراسة الاستقرار لهذا النوع من المعادلات.

مقدمة :

يلعب الاستقرار دورا مهما في نظرية النظم الديناميكية حيث كانت طريقة لبيانوف المباشرة قبل أكثر من مئة سنة الأداة الأساسية للتعامل مع مسائل الاستقرار [11,14,22] إلا أن بناء تابع لبيانوف يعتمد على التجريب وليس له تقنية محددة، وعادة تتطلب شروط نقطية بينما العديد من النماذج الديناميكية في الواقع لها شروط على شكل معدلات، وقد تم تجاوز هذه العقبات باستخدام نظرية النقطة الثابتة حيث كان بورتن أول من درس الاستقرار باستخدام نظرية النقطة الثابتة [2,3,5]، حيث توضع الشروط على شكل معدلات [5]. للمقارنة بين الطريقتين يمكن رؤية [4] و [5] وقد تم دراسة الاستقرار على المعادلات النصف خطية بتطبيق نظرية لبيانوف.

تعريف ليكن  $(M, d)$  فضاء مترى نقول عن التطبيق  $A: M \rightarrow M$  أنه تطبيق ضاغط أي كان  $x, y$  تنتمي الى  $M$  إذا وجد عدد  $0 < \alpha < 1$  بحيث  $d(Bx, By) < \alpha d(x, y)$ .

مبرهنة النقطة الثابتة لباناخ: بفرض  $M$  مجموعة مغلقة غير خالية في فضاء باناخ  $B$  على الحقل  $K$  وليكن المؤثر  $A: M \rightarrow M$  مؤثر ضاغط عندئذ يملك نقطة ثابتة وحيدة في المجموعة  $M$ .

**تعريف** نقول عن نقطة التوازن  $X_e$  أنها مستقرة تقاربياً إذا تحقق الشرط :

$$\forall \delta > 0; \|X(t_0) - X_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = X_e$$

1- طريقة مبدأ التطبيق الضاغط: نبدأ بالمعادلة التفاضلية (1.1).

أولا الفرضيات:

$H_1$  يوجد التوابع المستمرة  $a_1, a_2 \in C(R, R)$  بحيث  $a_1(t) \leq a(t, x_t) \leq a_2(t)$ .

$H_2$ : بفرض  $F(t, 0) = 0$  و  $L$  عدد موجب والتابع المستمرة  $b_1 \in C(R, R^+)$  بحيث

$$\emptyset, \psi \in \mathbb{C}_L := \{x \in \mathbb{C}: |x| \leq L\} \text{ من أجل } |F(t, \emptyset) - F(t, \psi)| \leq b_1 |\emptyset - \psi|$$

### مبرهنة 1.1

بفرض  $H_1, H_2$  محققة إذا وجد عدد ثابت  $\alpha \in ]0, 1[$  بحيث

$$\int_0^t e^{-\int_s^t a_1(u) du} b_1(s) ds \leq \alpha, t \geq 0: H_3$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t a_1(s) ds \rightarrow +\infty: H_4$$

عندئذ الحل الصفري للمعادلة (1.1) مستقر تقاربياً.

البرهان:

من أجل  $t_0 > 0$  نجد  $\delta_0 \geq 0$  بحيث  $\delta_0 \leq L$  و  $\delta_0 K_1 + \alpha L \leq L$  بحيث:

$$K_1 := \text{SUP} \left\{ e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} \right\}$$

ينتج من ( $H_2$ ) أنه من أجل  $\emptyset \in \mathbb{C}$  يوجد حل وحيد للمعادلة (1.1).

بمعنى أن:

$$\psi \in \mathbb{C}_{\delta_0} := \{x \in \mathbb{C} : |x| \leq \delta_0\}$$

ليكن  $u(t) = u(t, t_0, \psi)$  الحل الوحيد للمعادلة (1,1)

من أجل  $(t_0, \psi)$  على اعتبار مسألة القيمة الحدية

$$\dot{x}(t) = -a(t, u_t)x(t) + F(t, x_t) \quad ; \quad x_{t_0} = \psi \dots (1,3)$$

نضرب طرفي المعادلة (1,3) بـ  $e^{\int_{t_0}^t a(s, u_s) ds}$  ثم نكامل من  $t_0$  الى  $t$  عندئذ حل المعادلة (1,3) يكتب بالشكل:

$$x(t) = \psi(0)e^{-\int_{t_0}^t a(s, u_s) ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(\tau, u_\tau) d\tau} F(s, x_s) ds$$

ليكن

$$\Omega = \left\{ x \in C([t_0-r, +\infty[, R) : x_0 = \psi, |x_t| \leq L ; t \geq t_0 ; \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \right\}$$

نعرف التطبيق  $p: \Omega \rightarrow C([t_0-r, +\infty[, R)$  بحيث

$$(px)(t) = \begin{cases} \psi(t - t_0) & t_0 - r \leq t \leq t_0 \\ \psi(0)e^{-\int_{t_0}^t a(s, u_s) ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(\tau, u_\tau) d\tau} F(s, x_s) ds & t \geq t_0 \end{cases}$$

عندئذ  $\Omega$  فضاء متري حيث القياس:  $\rho(x, y) = \sup_{t \geq t_0-r} |x(t) - y(t)|$

بعد ذلك نرى بأن  $p$  تطبيق من  $\Omega$  الى  $\Omega$  وإن  $x \in \Omega$  و  $px$  مستمر و  $(px)(t) = \psi(t - t_0)$  من أجل  $t \in [t_0 - r, t_0]$

$$|(px)(t)| \leq |\psi(0)|e^{-\int_{t_0}^t a(s,u_s)ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau)d\tau} b_1(s)|x_s|ds$$

$$\leq \delta_0 K_1 + \alpha|x_s| \leq \delta_0 K_1 + \alpha L \leq L \quad , t \geq t_0$$

ليكن  $(px)(t) \in C_L$  من أجل  $t \geq t_0$  نرى بأن  $(px)(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$  باستخدام  $H_4$  لدينا

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds} = 0$$

وبالتالي الحد الأول من الطرف الأيمن لـ  $(px)(t)$  يسعى نحو لصفر، بقي أن نثبت أن الحد الثاني من الطرف الأيمن لـ  $(px)(t)$  يسعى نحو الصفر.

إن  $x \in \Omega$  تؤدي الى أن  $|x(t)| < L$  من أجل  $t \geq t_0$  ومن أجل أي  $\varepsilon > 0$  يوجد  $t_1 > t_0$  بحيث  $|x(t)| < \varepsilon$  من أجل  $t \geq t_1$  ينتج من  $(H_4)$  أنه يوجد  $t_2 > t_1$  بحيث أن

$$e^{-\int_{t_1+r}^t a_1(s)ds} < \frac{\varepsilon}{\alpha L}$$

من أجل  $t > t_2$  لدينا:

$$\left| \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(\tau,u_\tau)d\tau} F(s,x_s)ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t_1+r} e^{-\int_s^t a(\tau,u_\tau)d\tau} |F(s,x_s)|ds$$

$$+ \int_{t_1+r}^t e^{-\int_s^t a(\tau,u_\tau)d\tau} |F(s,x_s)|ds \leq$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_0}^{t_1+r} e^{-\int_s^t a_1(\tau) d\tau} b_1(s) |x_s| ds + \int_{t_1+r}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau) d\tau} b_1(s) |x_s| ds \\
 & \leq e^{-\int_{t_1+r}^t a_1(\tau) d\tau} \int_{t_0}^{t_1+r} e^{-\int_s^{t_1+r} a_1(\tau) d\tau} b_1(s) |x_s| ds \\
 & + \int_{t_1+r}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau) d\tau} b_1(s) |x_s| ds \\
 & \leq L e^{-\int_{t_1+r}^t a_1(\tau) d\tau} \int_{t_0}^{t_1+r} e^{-\int_s^{t_1+r} a_1(\tau) d\tau} b_1(s) ds \\
 & + \varepsilon \int_{t_1+r}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau) d\tau} b_1(s) ds \leq \alpha L e^{-\int_{t_1+r}^t a_1(\tau) d\tau} + \alpha \varepsilon \\
 & < \varepsilon + \alpha \varepsilon = (1 + \alpha) \varepsilon
 \end{aligned}$$

لذلك  $\lim_{t \rightarrow +\infty} px(t) = 0$  و  $(px) \in \Omega$ .

لنثبت أن  $(px)(t)$  تطبيق ضاغط من اجل  $x, y \in \Omega$ :

$$\begin{aligned}
 |(px)(t) - (py)(t)| & \leq \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(\tau, u_\tau) d\tau} |F(s, x_s) - F(s, y_s)| ds \\
 & \leq \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau) d\tau} |F(s, x_s) - F(s, y_s)| ds \\
 & \leq \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau) d\tau} b_1(s) |x_s - y_s| ds \leq \alpha \rho(x, y)
 \end{aligned}$$

باستخدام مبدأ التطبيق الضاغط يملك  $p$  نقطة ثابتة وحيدة في  $\Omega$  والتي هي حل للمعادلة (1,3) والتي تسعى نحو الصفر عندما  $t \rightarrow +\infty$ .

من الواضح أن الحل الوحيد للمعادلة (1,3) هو  $u(t)$  لذلك

$\lim_{t \rightarrow +\infty} (u, t, t_0, \psi) = 0$  للحصول على الاستقرار التقاربي نحتاج أن نرى أن الحل الصفري لـ (1,1) مستقر من أجل كل  $\varepsilon > 0$  يمكن أن نختار  $\delta > 0$  بحيث  $\delta < \varepsilon$  عندئذ نحصل:

$$|u(t)| \leq |\psi(0)| e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau) d\tau} b_1(s) |u_s| ds$$

$$\leq K_1 |\psi| + \alpha \|u\| \quad , t \geq t_0$$

حيث  $\|u\| = \sup_{t \geq t_0-r} |u(t)|$  ، عندئذ  $|\psi| < \delta$  يؤدي الى  $\varepsilon < \frac{\delta K_1}{1-\alpha}$  لذلك نحصل على أن الحل الصفري للمعادلة (1,1) مستقر تقاربياً.

### مبرهنة 1,2

بفرض الشروط  $H_1, H_2, H_3$  محققة من أجل (1,1) و

$$(H_5) \liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t a_1(s) ds > -\infty$$

إذا كان الحل الصفري لـ (1,1) مستقر تقاربياً عندئذ

$$(H_6) \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t a_2(s) ds = +\infty$$

البرهان: سنثبت المبرهنة بالفرض الجدلي

بفرض  $(H_6)$  غير محقق. بما أن  $a_1(t) \leq a(t, x_t) \leq a_2(t)$  عندئذ من  $(H_5)$  يؤدي

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf \int_0^t a_2(s) ds > -\infty$$

ويوجد متتالية  $\{t_n\}$  حيث  $t_n \rightarrow +\infty$  و  $n \rightarrow +\infty$  بحيث  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{t_n} a_2(s) ds =$  من أجل  $l \in R$  نختار عدد موجب ثابت  $q$  بحيث

$$-q \leq \int_0^{t_n} a_2(s) ds \leq q \quad n = 1, 2, \dots$$

إذا كانت  $H_6$  غير محققة فإن  $H_4$  غير محققة أيضاً. باستخدام  $H_5$  من أجل المتتالية  $\{t_n\}$  المعرفة سابقاً يمكن أن نختار عدد موجب  $R$  يحقق:  $-R \leq \int_0^{t_n} a_1(s) ds \leq R$  لذلك يؤدي الى

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} e^{\int_0^s a_1(u) du} b_1(s) ds &= e^{\int_0^{t_n} a_1(s) ds} \int_0^{t_n} e^{-\int_s^{t_n} a_1(u) du} b_1(s) ds \\ &\leq \alpha e^{\int_0^{t_n} a_1(s) ds} < e^R \end{aligned}$$

فالممتتالية  $\left\{ \int_0^{t_n} e^{\int_0^s a_1(u) du} b_1(s) ds \right\}$  محدودة لذلك توجد متتالية جزئية متقاربة للايجاز في التقييم نفرض المتتالية  $\left\{ \int_0^{t_n} e^{\int_0^s a_1(u) du} b_1(s) ds \right\}$  متقاربة. نختار عدد صحيح موجب  $k$  كبير جدا بحيث

$$\int_{t_k}^{t_n} e^{\int_0^s a_1(u) du} b_1(s) ds \leq \frac{1 - \alpha}{2K_1^2 e^{2q}} \quad ; n \geq k$$

يمكن أن نعتبر الحل  $x(t) = x(t, t_k, \psi)$  بحيث أن  $\delta_0 \equiv \psi(s - t_k)$  من أجل  $s \in$

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \delta_0 e^{-\int_{t_k}^s a_1(u) du} + \int_{t_k}^t e^{-\int_s^t a_1(u) du} b_1(s) |x_s| ds \leq \delta_0 K_1 + \alpha |x_t| \end{aligned}$$

لدينا  $|x_t| < \frac{\delta_0 K_1}{1 - \alpha}$  من أجل  $t \geq t_k$ .

من ناحية أخرى من أجل  $n$  كبيرة بقدر كاف لدينا:

$$x(t_n) = x(t_k) e^{-\int_{t_k}^{t_n} a(s, u_s) ds} + \int_{t_k}^{t_n} e^{-\int_s^{t_n} a(\tau, u_\tau) d\tau} F(s, x_s) ds$$

$$\begin{aligned}
 |x(t_n)| &\geq \delta_0 e^{-\int_{t_k}^{t_n} a_2(s) ds} - \left| \int_{t_k}^{t_n} e^{-\int_s^{t_n} a(\tau, u_\tau) d\tau} F(s, x_s) ds \right| \\
 &\geq \delta_0 e^{-\int_{t_k}^{t_n} a_2(s) ds} - \int_{t_k}^{t_n} e^{-\int_s^{t_n} a(\tau, u_\tau) d\tau} |F(s, x_s)| ds \\
 &\geq \delta_0 e^{-\int_{t_k}^{t_n} a_2(s) ds} - \int_{t_k}^{t_n} e^{-\int_s^{t_n} a_1(\tau) d\tau} b_1(s) |x_s| ds \\
 &\geq \delta_0 e^{-\int_{t_k}^{t_n} a_2(s) ds} \\
 &\quad - \frac{\delta_0 K_1}{1 - \alpha} e^{-\int_0^{t_n} a_1(\tau) d\tau} \int_{t_k}^{t_n} e^{\int_0^s a_1(\tau) d\tau} b_1(s) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{-\int_{t_k}^{t_n} a_2(s) ds} &= e^{\int_{t_n}^0 a_2(s) ds} e^{\int_0^{t_k} a_2(s) ds} = \text{لكن} \\
 e^{-\int_0^{t_n} a_2(s) ds} e^{\int_0^{t_k} a_2(s) ds} &\geq e^{-2q}
 \end{aligned}$$

$$K_1 \leq e^{-\int_0^{t_n} a_1(s) ds}$$

لذلك

$$|x(t_n)| \geq \delta_0 e^{-2q} - \frac{\delta_0 K_1}{1 - \alpha} K_1 \frac{1 - \alpha}{2K_1^2 e^{2q}} = \frac{1}{2} \delta_0 e^{-2q}$$

يؤدي الى أن  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \neq 0$  وهذا يناقض الفرض وبذلك يتم المطلوب.

### نتيجة 1,1

إذا كان  $a(t) \equiv a(t, x_t)$  و  $H_2, H_3, H_5$  محققة عندئذ الحل الصفري (1,1) مستقر

تقاربيا إذا فقط إذا كان  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t a(s) ds \rightarrow +\infty$

ندرس المعادلة التفاضلية ذات التأخير الزمني لـ (1,2). وبشكل مشابه لـ (1,1) إذا فرضنا أن

$$(H_7) \dots g(t, 0) = 0$$

يوجد تابعان مستمران  $a_1, a_2 \in C(R, R)$  بحيث:

$$a_1(t) \leq \frac{\partial g(t, x)}{\partial x} \leq a_2(t)$$

عندئذ لدينا المبرهنة:

### مبرهنة 1,3

بفرض  $H_2, H_4, H_7$  محققة عندئذ الحل الصفري لـ (1,2) مستقر تقاربياً.

البرهان: من أجل  $g \in C^1$  و  $g(t, 0) = 0$  عندئذ:

$$g(t, x) = \left[ \int_0^1 \frac{\partial g(t, sx)}{\partial x} ds \right] x$$

يمكن أن نكتب المعادلة (1,2) كما المعادلة (1,1) بحيث:

$$a_1(t) \leq a(t, x_t) \leq a_2(t)$$

عندئذ بالاعتماد على المبرهنة (1.1) يكون الحل الصفري للمعادلة (1,2) مستقر تقاربياً.

### المبرهنة 1,4

بفرض  $H_2, H_3, H_5, H_7$  محققة إذا كان الحل الصفري للمعادلة (1,2) مستقر تقاربياً  
عندئذ  $H_6$  محققة.

### 2- طريقة مبرهنة النقطة الثابتة لشاوور:

بفرض أن حلول (1,1) و (1,2) موجودة ووحيدة ويوجد تابع  $b_2(t) \in C(R, R)$   
بحيث:

$$H_8 : |F(t, \emptyset)| \leq |b_2(t)| |\emptyset|$$

$$H_9 : \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (a_1(s) - b_2(s)) ds = +\infty$$

مثال تطبيقي على المعادلة (1,1) لتكن المعادلة الخطية:

$$\dot{q}(t) = [-a_1(t) + |b_2(t)|]q(t) \dots \dots (2,4)$$

من أجل كل  $t \geq 0$  نرى بأن الحل الوحيد للمعادلة (2,4) ويكتب:

$$q(t) = \beta e^{\int_{t_0}^t (b_2(s) - a_1(s)) ds} \quad t \geq t_0 \dots (2,5)$$

$$q(t_0) = \beta > 0 \text{ حيث}$$

ينتج من  $(H_9)$  أن  $q(t) \rightarrow 0$  حيث  $t \rightarrow \infty$  و

$$0 \leq q(t) \leq \beta e^{\sigma} := \gamma \quad t \geq t_0$$

$$\sigma = \sup \left\{ \int_{t_0}^t (b_2(s) - a_1(s)) ds ; t \geq t_0 \right\} \leq +\infty$$

من البديهي أن نرى بأن الحل الصفري لـ (2,4) مستقر تقريبا.

**تعريف 2,1** (متساوي التقارب) نسمي المجموعة  $S$  من التتابع ذات القيم الحقيقية على المجال  $[-r, +\infty[$  متساوية التقارب نحو الصفر إذا وفقط إذا كان التابع  $q: R^+ \rightarrow R^+$  بحيث أن  $q(t) \rightarrow 0$  وذلك من أجل  $\varphi \in S$  و  $t \in R^+$  و  $|\varphi(t)| \leq q(t)$  محققة.

**تمهيدية 2,1** [5] إذا كانت المجموعة  $\{\varphi_k(t)\}$  للتتابع ذات القيمة الحقيقية على  $[-r, +\infty[$  متساوية التقارب نحو الصفر فيما يتعلق بالتابع المستمر  $q: R^+ \rightarrow R^+$  عندئذ المتتالية  $\{\varphi_k(t)\}$  تحوي على متتالية جزئية متقاربة بانتظام على  $R^+$  نحو التابع المستمرة  $\varphi(t)$  بحيث  $|\varphi(t)| \leq q(t)$  على  $R^+$ .

### مبرهنة 3,1

من أجل المعادلة (1.1) إذا كانت  $H_9, H_8, H_1$  محققة عندئذ الحل الصفري للمعادلة (2,4) مستقر،

البرهان:

من أجل كل  $\varepsilon \in ]0, \gamma[$  و  $t_0 \in R^+$  يوجد  $\eta = \eta(\varepsilon, t_0) \in ]0, \beta[$  بحيث من أجل أي  $q_0$

$|q_0| \leq \eta$  بحيث  $|q(t, t_0, q_0)| < \varepsilon$  من أجل كل  $t \geq t_0$  من أجل  $\psi \in \mathbb{C}_\eta$  نعرف

$$S = \{u \in C([t_0 - r, +\infty[, R) ; u_{t_0} = \psi ; |u(t)| \leq q(t) \quad , t \geq t_0\}$$

بحيث

$$|u(t_1) - u(t_2)| \leq L|t_1 - t_2| ; t_1, t_2 \in R^+ , t_0 \leq \tau_1 \leq t_1 , t_2 \leq \tau_2$$

$$L = L(\tau_1, \tau_2) = \max_{t \in [\tau_1, \tau_2]} \{|a_1(t)|\gamma + |a_2(t)|\gamma + |b_2(t)|\gamma\} \text{ حيث}$$

$q(t)$  معرفة بالعلاقة (2,5)

$$|q(t)| \leq \gamma \text{ حيث } \beta = \eta$$

$$|\dot{q}(t)| \leq |a_1(t)|\gamma + |b_2(t)|\gamma \leq L, t \geq t_0 \dots (2,6)$$

نعرف:

$$\xi(t) := \begin{cases} \psi(t - t_0) & ; t_0 - r \leq t \leq t_0 \\ \frac{\psi(0)q(t)}{\eta} & ; t \geq t_0 \end{cases}$$

$$|\xi(t)| \leq \frac{|\psi(0)||q(t)|}{\eta} \leq \frac{|\psi||q(t)|}{\eta} \leq |q(t)| ; t \geq t_0 \text{ عندئذ}$$

ينتج من (2,6) أن:

$$|\xi(t_1) - \xi(t_2)| = \frac{\psi(0)}{\eta} |q(t_1) - q(t_2)| \leq L|t_1 - t_2| ;$$

من أجل  $\tau_1 \leq t_1, t_2 \leq \tau_2$  يوجد  $\xi \in S$  من التمهيدية 2,1 نستطيع أن نرى أن  $S$  مجموعة جزئية غير خالية متراسة ومحدبة من  $C([t_0 - r, +\infty[, R)$ .

ليكن  $u(t)$  حل وحيد للمعادلة (1,1) بحيث  $u_{t_0} = \psi$  ونعتبر أن المعادلة:

$$\dot{x}(t) = -a(t, x_t)x(t) + f(t, u_t) \dots (2,7)$$

عندئذ  $u(t)$  حل وحيد للمعادلة (2,7) و  $u(t)$  تكتب بالشكل:

$$u(t) = \psi(0)e^{-\int_{t_0}^t a(s, u_s)ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(\tau, u_\tau)d\tau} F(s, u_s)ds ; t \geq t_0$$

نعرف التطبيق  $p$  على  $S$  بالشكل:

$$(pu)(t) = \psi(t - t_0), t_0 - r \leq t \leq t_0$$

$$(pu)(t) = \psi(0)e^{-\int_{t_0}^t a(s, u_s) ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(\tau, u_\tau) d\tau} F(s, u_s) ds; t \geq t_0$$

من الواضح أن حل (1,1) مكافئ لإيجاد النقطة الثابتة للتابع  $p$  في  $S$ .

نرى بأن التابع  $p$  يطبق من  $S$  الى  $S$  نلاحظ أن:

$$(pu)(t) = \psi(t - t_0) \quad , t_0 - r \leq t \leq t_0$$

$$\begin{aligned} |(pu)(t)| &\leq |\psi(0)| e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau) d\tau} |F(s, u_s)| ds \\ &\leq \eta e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau) d\tau} |b_1(s)| |u(s)| ds \\ &\leq \eta e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau) d\tau} |b_2(s)| |q(s)| ds \\ &= \eta e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau) d\tau} (\dot{q}(s) - a_1(s)q(s)) ds \\ &= q(t) \quad ; t \geq t_0 \end{aligned}$$

حيث  $\dot{q}(t) = -a_1(t)q(t) + |b_2(t)|q(t)$  وبالتالي

$$(pu)'(t) = -a(t, u_t)(pu)(t) + f(t, u_t)$$

والذي يؤدي الى أن:

$$\begin{aligned} |(pu)'(t)| &\leq |a(t, u_t)|q(t) + |b_2(t)|q(t) \\ &\leq |a_1(t)|\gamma + |a_2(t)|\gamma + |b_2(t)|\gamma \leq L; t \geq t_0 \end{aligned}$$

لذلك التطبيق  $p$  يطبق من  $S$  الى  $S$ . من الواضح أن  $p$  مستمر. باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة لساوور فإن التطبيق  $p$  له نقطة ثابتة  $u$  في  $S$  يحقق  $|u(t)| \leq q(t)$  حيث  $t \geq t_0$  والتي تؤدي الى أن الحل  $(u(t, t_0, \psi))$  ل (1,2) يحقق:

$$|u(t, t_0, \psi)| \leq q(t) = q(t, t_0, \eta) < \varepsilon \quad ; t \geq t_0$$

الحل الصفري ل (1,1) مستقر. ينتج من أن  $q(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  و  $u(t, t_0, \psi) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  وبذلك يتم الاثبات.

### مبرهنة 2.2

إذا كان  $H_9, H_8, H_7$  محققة عندئذ الحل الصفري للمعادلة (1,2) مستقر تقاربياً.

### 3- التطبيقات

في هذا القسم وباستخدام المعايير في القسمين الثاني والثالث سندرس الاستقرار لعدة معادلات وبشكل خاص استقرار التذبذبات في نموذج الخلايا الدم الحمراء. أولاً سنبدأ في المثال:

#### مثال 3.1 لتكن المعادلة

$$\dot{x}(t) = -\gamma(t) \left( \beta(t) + \frac{1}{\beta(t) + x^2(t - \tau(t))} \right) x(t) + \gamma(t) \beta(t) x(t) - \tau(t) \dots (3,8)$$

انظر [24]

حيث  $\tau(t), \beta(t), \gamma(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$  و  $\tau(t)$  محدود من الأعلى بعدد موجب.

المعادلة (3,8) حالة خاصة من المعادلة (1,1) حيث

$$a(t, x_t) = \gamma(t) \left( \beta(t) + \frac{1}{\beta(t) + x^2(t - \tau(t))} \right)$$

يمكن أن نأخذ  $a_1(t) = \gamma(t) \beta(t)$ ,  $a_2(t) = \gamma(t) \left( \beta(t) + \frac{1}{\beta(t)} \right)$  عندئذ

$$.a_1(t) \leq a(t, x_t) \leq a_2(t)$$

إذا كانت  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \gamma(s) \beta(s) ds = +\infty$  عندئذ نختار  $b_1(t) = \gamma(t) \beta(t)$  نلاحظ

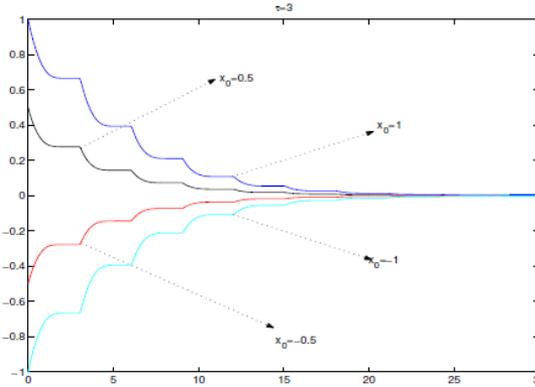
أن

$$\int_0^t e^{-\int_s^t a_1(u)du} b_1(s) ds = \int_0^t e^{-\int_s^t \gamma(u)\beta(u)du} \gamma(s)\beta(s) ds$$

$$= 1 - e^{-\int_0^t \gamma(u)\beta(u)du} < 1$$

$$\int_s^t a_1(s) ds = \int_s^t \gamma(s)\beta(s) ds \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

إن  $H_4, H_2$  محققة. ينتج من المبرهنة (1,3) بأن الحل الصفري لـ (3,8) مستقر تقاربياً. في (3,8) إذا أخذنا  $\gamma(t) = 1 + t^2$  عندئذ كما نرى بالشكل 3,1 أن الحل الصفري لـ (3,8) مستقر تقاربياً.



الشكل (3,1): الحل الصفري (3.8) مستقر تقاربياً. هنا  $\theta \in [0, \tau]$ ,  $x(\theta) = x_0$ ,  $r = 3$ .

### بديهية 3,1:

إذا كان  $0 \leq t < \infty$ ;  $\int_0^t e^{-\int_s^t \gamma(u)du} |\alpha(s)| |\beta(s)| ds \leq \alpha < 1$  عندئذ الحل الموجب الدوري  $w$ -مستقر تقاربياً.  
البرهان:

لدراسة لاستقرار التقاربي للحل الدوري غير الابتدائي  $x^*(t)$  نجعل

عندئذ:  $y(t) = x(t) - x^*(t)$

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}^*(t) \dots (3.9)$$

$$= -\gamma(t)y(t) + \alpha(t)e^{-\beta(t)x^*(t-\tau(t))}(e^{-\beta(t)y(t-\tau(t))} - 1)$$

من الواضح أن الاستقرار التقاربي لـ  $x^*(t)$  مكافئ للاستقرار التقاربي للحل الصفري للمعادلة (3.9) بأخذ

$$f(t, \phi) = \alpha(t)e^{-\beta(t)x^*(t-\tau(t))}(e^{-\beta(t)\phi(-\tau(t))} - 1)$$

عندئذ

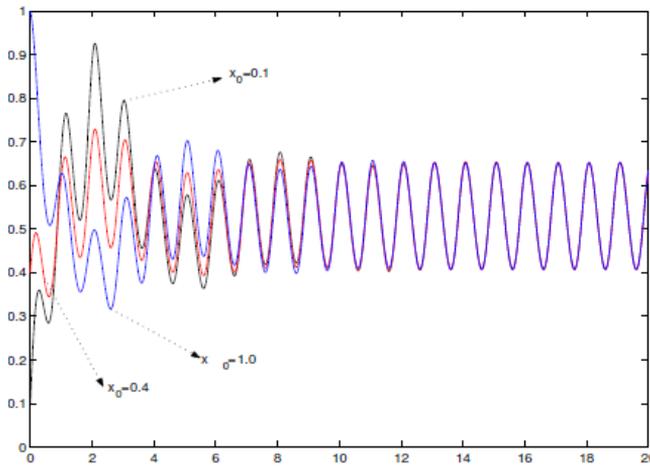
$$\begin{aligned} |f(t, \phi) - f(t, \psi)| &\leq |\alpha(t)| |e^{-\beta(t)\phi(-\tau(t))} - e^{-\beta(t)\psi(-\tau(t))}| \\ &\leq |\alpha(t)\beta(t)| |\phi - \psi| \end{aligned}$$

بالإضافة الى أن  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \gamma(s) ds = +\infty$

حيث  $\gamma(t)$  تابع غير سالب دوري ودوره  $w$ .

بجعل  $b_1(t) = |\alpha(t)\beta(t)|$  عندئذ باستخدام المبرهنة 1.1 الحل الموجب الدوري -  $w$  و  $x^*(t)$  مستقر تقاربيا.

**مثال 3.3** لدراسة التعميم نشكل عناصر خلية الدم في الجسم. درس جلاس و ميكي [16] نموذج المعادلة التفاضلية ذات التأخير الزمني حيث يعتبر تعميم للأصل،



الشكل 3.2: الحل الصفري للمعادلة (1.1) مستقرة تقاربياً. حيث  $\gamma(t) = 1 + \sin 2\pi t$  و  $\alpha(t) = 4 + \cos 2\pi t$ ,

و  $\beta(t) \equiv 1$ ،  $\tau = 2$ ، حيث  $x(\theta) = x_0$ ،  $\theta \in [-\tau, 0]$ .

وقد عممت المعاملات من ثوابت موجبة الى توابع غير سالبة

$$\dot{x}(t) = -\gamma(t)x(t) + \frac{\beta(t)\theta^n x(t - \tau(t))}{\theta^n + x^n(t - \tau(t))} \quad (3.10)$$

حيث  $\gamma, \beta, \tau \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$  و  $\theta$  ثابت موجب و  $n$  عدد صحيح موجب. في (3,10) التأخير الزمني  $\tau$  هو الزمن بين انتاج الخلايا الغير ناضجة في نخاع العظم ونضوجهم للاطلاق في مجرى الدم و  $x(t)$  يدل على كثافة الخلايا في الدم.

### بديهية 3.2

إذا كانت:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t (\gamma(s) - \beta(s)) ds = +\infty$$

عندئذ الحل الصفري لـ (3,10) مستقر تقاربياً .

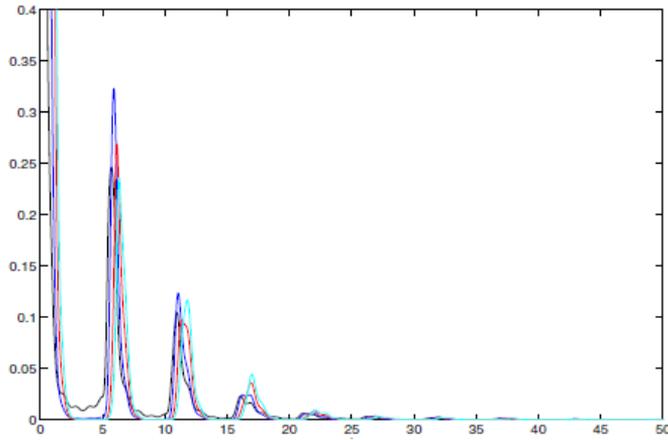
$$f(t, \emptyset) = \frac{\beta(t)\theta^n \emptyset(-\tau(t))}{\theta^n + \emptyset^n(-\tau(t))} \text{ نلاحظ أن}$$

$$|f(t, \emptyset)| = \left| \frac{\beta(t)\theta^n \emptyset(-\tau(t))}{\theta^n + \emptyset^n(-\tau(t))} \right| \leq \beta(t) |\emptyset(-\tau(t))| \leq \beta(t) |\emptyset|$$

يمكن أن نأخذ  $b_2(t) = \beta(t)$  عندئذ

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t (a_1(s) - |b_2(s)|) ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t (\gamma(s) - \beta(s)) ds = +\infty$$

الاستقرار التقاربي ينتج من المبرهنة 2.1.



الشكل 3.3: الحل الصفري ل (3.10) مستقر تقاربياً  $\beta(t) = 2 + \cos t$  و  $\gamma(t) = 0.4 + \sin 2\pi t$   
 $n = 5, \tau = 3$   
 $x(\theta) = 5, 15, 50, 100 > 0$  حيث  $\theta \in [-r, 0]$ .

#### مثال 3.4 نموذج نيكلسن بلونز

$$\dot{x}(t) = -\gamma(t)x(t) + \beta(t - \tau(t))e^{ax(t-\tau(t))} \dots (3.11)$$

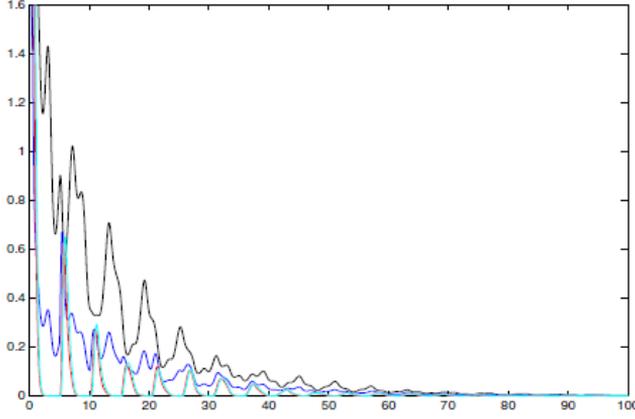
حيث  $\gamma, \beta, \tau \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$  و  $a$  عدد موجب، عندها جميع المعاملات ثابتة موجبة ، المعادلة (3,11) تخفض الى النموذج الأصلي المطور بواسطة جورني لوصف سكان لوسيدا كاربينا الاسترالية الذي يوافق جيداً بالبيانات التجريبية لنيكلسن بينما ديناميكية المعادلة تقابل بشكل جيد بيانات نيكلسن لضربة المعادلة والتي نسميها نموذج ضربات نكلسن والذي درس على نطاق واسع . بتنفيذ البرهان بالضبط كما البديهية 3.2 نصل الى النتائج الآتية:

بديهية 3.3 إذا كانت  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\gamma(s) - \beta(s))ds = +\infty$  عندئذ الحل الصفري

للمعادلة (3,11) مستقر تقاربياً. اختلاف البيئة يلعب دوراً مهماً في العديد من الأنظمة الديناميكية البيئية و الحيوية. اقترح نيكلسن أن أي تغير دوري في المناخ يسعى الى فرض دوريته على تذبذبات الأصل الداخلي أو لتسبب مثل هذه التذبذبات بأن تكون لها علاقة متناسقة بالتغيرات المناخية الدورية.

نظراً لهذا في الواقع من الطبيعي أن نفرض بأن المعاملات النماذج هي دورية.

المحاكات العددية تقوم بأخذ  $\gamma(t) = 4 + \cos \pi t$  و  $\beta(t) = 3 + \sin t$  كما في الشكل 3.4 الحل الصفري للنموذج (3.11) مستقر تقاربياً.  $\tau = 5, a = 0.25$ .



الشكل 3.4 : الحل الصفري ل (3.11) مستقر تقاربياً  $\gamma(t) = 4 + \cos \pi t$  و  $\beta(t) = 3 + \sin t$   $a = 0.25, \tau = 5$

$$x(\theta) = 5, 15, 50, 100 ; \theta \in [-r, 0]$$

### المراجع

1. O. Arino and M. Kimmel, Stability analysis of models of cell production system, *Math. Modelling* 17 (1986), 1269-1300.
2. T. A. Burton and T. Furumochi, Fixed points and problems in stability theory for ordinary and functional differential equations, *Proc. Dynamic Syst. Appl.* 10 (2001), 89-116.
3. T. A. Burton and T. Furumochi, Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by fixed point theorems, *Proc. Dynamic Syst. Appl.* 11 (2002), 499-519.
4. T. A. Burton, Stability by fixed point theory or Liapunov theory: a comparison, *Fixed Point Theory* 4 (2003), 15-32.
5. T. A. Burton, *Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations*, Dover Publications Inc., 2006.
6. S. N. Chow, Existence of periodic solutions of autonomous functional differential equations, *J. Diff. Equ.* 15 (1974), 350-378.
7. K. Gopalsamy, *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Springer-Verlag, 1992.
8. K. Gopalsamy and S. Trofimchuk, Almost periodic solutions of Lasota-Wazewaska type delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 237 (1999), 106-127.
9. J. R. Graef, C. Qian and P. W. Spikes, Oscillation and global attractivity in a periodic delay equation, *Canad. Math. Bull.* 38 (1996), 275-283.
10. W. S. Gurney, S. P. Blythe and R. M. Nisbet, Nicholson's blowies revisited, *Nature* 287 (1980), 17-21.
11. J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.
12. Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Applications to Population Dynamics*, Academic Press, 1994.
13. M. R. S. Kulenovic and G. Ladas, Linearized oscillations in population dynamics, *Bull. Math. Biol.* 49 (1987), 615-627.

14. V. Lakshmikantham, S. Sivasundaram and B. Kaymakcalan, Dynamic Systems on Measure Chains, Kluwer Academic Publishers, 1996.
15. G. Liu, A. Zhao and J. Yan, Existence and global attractivity of unique positive periodic solution for a Lasota-Ważewska model, Nonlinear Anal. 64 (2006), 1737-1746.
16. M. C. Mackey and L. Glass, Oscillation and chaos in physiological control system, Science 197 (1977), 287-289.
17. A. J. Nicholson, The self adjustment of population to change, Cold Spring Harbor Symposium Quantitative Biol. 22 (1957), 153-173.
18. A. J. Nicholson, The balance of animal population, J. Animal Ecol. 2 (1993), 132-178.
19. H. Y. Wang, Positive periodic solutions of functional differential equations, J. Di. Equ. 202(2) (2004), 354-366.
20. M. Wazewska-Czyżewska and A. Lasota, Mathematical problems of the dynamics of the red blood cells system, Annals of the Polish Mathematical Society Series III, Appl. Math. 17 (1976), 23-40.
21. D. Ye, M. Fan and H. Y. Wang, Periodic solutions for scalar functional differential equations, Nonlinear Anal. TMA 62(7) (2005), 1157-1181.
22. T. Yoshizawa, Stability Theory by Liapunov's Second Method, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.
23. M. B. Mesmouli, A. Ardjouni, A. Djoudi Study of Stability in Nonlinear Neutral Differential Equations with Variable Delay Using Krasnoselskii–Burton's Fixed- Point (2016).
24. MENG FAN, ZHINAN XIA AND HUAIPING ZHU, ASYMPTOTIC STABILITY OF DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS VIA FIXED POINT THEORY AND APPLICATIONS Volume 18, Number 4 (2010).