استخدام مبدأ غاوس لحساب التكاملات المضاعفة اللانهائية

إعداد الباحثة : ورود محمّد ابراهيم **بإشراف : أ.د. حامد عباس**

ملخص البحث:

يهتم هذا البحث بدراسة التكاملات المضاعفة اللانهائية للدوال اعتمادا على مبدأ غاوس، والذي يعتمد على جذور كثيرات الحدود المتعامدة لـ هرميت في الفضاء R^n ، ودالة الوزن $\omega(x)=e^{-r^2};\ \ r^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$،حيث أوجدنا كثيرات الحدود المتعامدة من نوع هرميت في الفضاء R^n:

$$H_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x)=(-1)^{\alpha}e^{r^2}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}}e^{-x_i^2}\right)\quad ,\left|\begin{array}{l}\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ \ ,r^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\\ x=(x_1.x_2,\ldots,x_n)\end{array}\right.$$

ثم أوجدنا جذورها وعددها N، وفرضنا بأن هذه الجذور هي النقاط التكاملية للعلاقات التكعيبية، والتي من خلالها حسبنا القيم التقريبية للتكاملات المضاعفة اللانهائية، وأوجدنا المبرهنات اللازمة مع الاثبات، التي أعطتنا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية التالية:

$$C_j=2^{\alpha+n}\beta\pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\partial^n H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x^j)}{\prod_{i=1}^{n}\partial x_i}\right)^{-2}\quad ;\beta=\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i!),\ j=1,2,\ldots,N$$

التي كانت تحسب من خلال حل جمل من المعادلات غير الخطية، حيث إن لكل منطقة تكاملية ثوابت خاصة بها .

الكلمات المفتاحية: العلاقات التكعيبية، دوال هرميت المتعامدة، التكاملات المضاعفة اللانهائية التقريبية.

Using Gauss's principle To Calculate Infinite Iterated Integrals

Abstract

This research is concerned with the study 0f infinite iterated integrals of functions based on Gauss's principle, which is based on the roots of orthogonal Hermite polynomials in space R^n ,the weight function $\omega(x)=e^{-r^2}$; $r^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$,we found the orthogonal Hermite polynomials in space R^n :

$$H_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x)=(-1)^{\alpha}e^{r^2}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}}e^{-x_i^2}\right) \quad , \left| \begin{array}{l} \alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \ \ , r^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{array} \right.$$

then we found its roots and their number is N, and assumed that they are the integration points of the cubic relations, through which we calculated the approximate values of the infinite repeated integrals, and we found the necessary theorems with proof, which gave us the constants of the following approximate integration relations:

$$C_j=2^{\alpha+n}\beta\pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\partial^n H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x^j)}{\prod_{i=1}^{n}\partial x_i}\right)^{-2} \quad ;\beta=\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i\,!),\ j=1,2,\ldots,N$$

which were calculated by solving sets of nonlinear equations, where each integral region has its own constants.

keywords: Cubic relations, orthogonal Hermite functions, approximate infinite iterated integrals.

1- مقدمة البحث:

تعريف:[2,5]

نقول عن الدالتين $f(x), g(x)$ الحقيقيتين المعرفتين والقابلتين للمكاملة على المنطقة Ω أنهما متعامدتان على تلك المنطقة إذا كان:

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{\Omega} \omega(\mathrm{x}) f(\mathrm{x}) g(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} = 0 \tag{1}$$

بدالة وزن $\omega(\mathrm{x})$.

تم حساب التكاملات التقريبية الاحادية للدوال بطرائق متعددة أخرى **[3,6]**، حيث استخدم غاوس الطرائق التقريبية لحساب التكاملات على المجال $[-1,+1]$ واعتبر كثيرات حدود ليجندر بدالة وزن $\omega(\mathrm{x})$، حيث إن علاقة غاوس التربيعية من الصيغة الآتية [4,7]:

$$\int_{-1}^{+1} \omega(x) f(x) dx \cong \sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i) \tag{2}$$

سُميت النقاط x_i عقد العلاقة التربيعية، أو نقاط استكمال العلاقة التربيعية، وأحيانا تدعى نقاط ارتكاز العلاقة التربيعية، و C_i هي الثوابت الموافقة لتلك النقاط x_i، و $\omega(x)$ دالة الوزن. يتم تحديد الثوابت $C_i \; ; i = 1,2,...,n$, حيث تتحول العلاقة (2) الى مساواة مضبوطة (صحيحة تماما) من أجل كل كثيرة حدود جبرية درجتها لا تتجاوز 2n−1، أي من أجل: $f(x) = 1, x, x^2, ..., x^{2n-1}$ حيث إن المجال التكاملي هو $[-1,+1]$ ولدينا 2n من المجاهيل هي: $X_i \; , C_i \; ; \quad i = 1,2,3,...,n$.

1-1-استخدام كثيرات حدود ليجندر في التكاملات الأحادية:

يعتمد مبدأ غاوس في التكامل التقريبي على أن النقاط x_i هي جذور كثيرات حدود ليجندر $p_n(x)$ ، والتي تعرف بالصيغة الآتية **[4,8]** :

$$p_n(x) = \frac{1}{n!.2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{3}$$

يمكن حساب الثوابت C_i بطريقة الأمثال غير المعينة، على اعتبار أن العلاقة (2) صحيحة تماما من أجل كل كثيرة حدود درجتها لا تتجاوز $2n-1$ ، فينتج لدينا جملة من المعادلات غير الخطية، بحلها نحصل على الثوابت المطلوبة، ولكن جملة المعادلات

(غير الخطية) الناتجة قد تكون أحيانا معقدة وصعبة الحل من أجل ذلك تم اثبات المبرهنة التالية:

مبرهنة1:[9] بفرض أن $P_n(x)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-1,+1]$ ، وكانت $i=1,2,3,...,n\ ;\ x_i$ هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $P_n(x)=0$ ، فعند ذلك ثوابت العلاقة التربيعية (2) تكتب بالصيغة الآتية:

$$C_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[p_n'(x_i)]^2} \tag{4}$$

ملاحظة: كما هو واضح من خلال العلاقة (4) أن الثوابت C_i مرتبطة فقط بكثيرات حدود ليجندر ، ولا علاقة لها بالدالة المكاملة $f(x)$ ، وتم الوصول الى الحالة العامة لطريقة غاوس التربيعية، أي عندما يكون المجال اختياري من الشكل $[a,b]$ ودالة وزن $\omega(\mathrm{x})=1$ ، وفي هذه الحالة اصبح بالإمكان حساب التكاملات التقريبية ضمن الشكل التالي: $\int_a^b f(x)dx$

حيث تم اجراء التحويل الاتي : $x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}u$

وتم الحصول على : $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} f(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}u)du$

استناداً إلى العلاقة (2)، نجد:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i) \tag{5}$$

حيث إن: $x_i = \frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}u_i$ و u_i هي جذور كثيرات حدود ليجندر الموافقة ل n.

2-1 استخدام كثيرات حدود هرميت:

تعريف:

نرمز لكثيرات حدود هرميت من الدرجة n بمتحول واحد بالرمز $H_n(x)$ وهي كثيرات حدود متعامدة على المجال $(-\infty,+\infty)$ ودالة وزن $\omega(x)=e^{-x^2}$ ، وتعطى وفق صيغة رودريغ الآتية: [1,2]

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \qquad (6)$$

تم اعتبار x_j هي جذور كثيرات حدود هرميت وبناءاً على ذلك تم التوصل الى العلاقة التقريبية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j) \qquad (7)$$

حيث الثوابت هي:[9]

$$C_j=\frac{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}}{\left[H'_n(x_j)\right]^2} \quad ,j=1,2,.....n \qquad (8)$$

2- هدف البحث وطريقته:

يهدف هذا البحث الى:

- حساب التكاملات المضاعفة اللانهائية بشكل تقريبي اعتمادا على مبدأ غاوس، باستخدام جذور كثيرات الحدود المتعامدة لـ هرميت في المنطقة R^n ودالة الوزن $\omega(x)=e^{-r^2};\ r^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$, من خلال ايجاد كثيرات الحدود المتعامدة من نوع هرميت في فضاءات متعددة الأبعاد وحساب جذورها، والتي نعتبرها النقاط التكاملية للعلاقات التكعيبية .
- التوصل الى الصيغ التي تعطينا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية، بالاعتماد على مجموعة من المبرهنات والتي تم ايجادها مع الاثبات.

3-مشكلة البحث:

- ايجاد كثيرات الحدود المتعامدة من نمط هرميت في فضاءات متعددة الأبعاد.
- حساب جذور كثيرات الحدود المذكورة واعتبارها نقاط العلاقة التكعيبية.
- التوصل الى مبرهنات تعطينا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية واثباتها.

4- النتائج ومناقشتها:

4-1- مفاهيم أساسية [4] :

العلاقة التقريبية لحساب التكاملات المضاعفة تسمى العلاقة التكعيبية (والتي تعطى بالصيغة الآتية):

$$\int_{\Omega} \omega(x) f(x) dx \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x^j) \qquad (9)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) \;, dx = dx_1 dx_2 dx_3 \ldots dx_n$$

حيث أن Ω منطقة في الفضاء R^n ، و $\omega(x)$ دالة الوزن و $f(x)$ الدالة المكاملة واشارة التكامل على المنطقة Ω تعني التكامل المضاعف n مرة من الفضاء R^n على المنطقة Ω، و C_j الثوابت الموافقة للنقاط x^j التي هي جذور كثيرات الحدود المتعامدة في المنطقة Ω و N عدد هذه الجذور، العلاقة السابقة صحيحة من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2n-1$.

2-4- حساب التكاملات باستخدام جذور كثيرات الحدود هرميت المتعامدة بمتحولين على الفضاء R^2.

تُعطى كثيرات حدود هرميت المتعامدة بمتحولين على الفضاء R^2 بالصيغة الآتية : [3]

$$H_{nm} = (-1)^{n+m} e^{x^2+y^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \frac{d^m}{dy^m}(e^{-y^2}) = H_n(x).\, H_m(y) \qquad (10)$$

حيث أن دالة الوزن $\omega(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

نقوم بإيجاد جذور كثيرات الحدود هذه على اعتبار أن جذور كثيرات الحدود هذه بمتحول واحد معلومة بدلالة x وعلى أساسها نحسب y، ثم نحدد النقاط التكاملية (x, y) ،ونوجد الثوابت الموافقة بالاعتماد على المبرهنة التالية:

مبرهنة2 : بفرض أن $H_{n,m}(x,y)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على المنطقة $[-\infty,+\infty]^2$، وكانت (x_j, y_j) هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $H_{n,m}(x,y) = 0$ ، تُكتب ثوابت العلاقة التكعيبية (9) تكتب بالصيغة الآتية:

$$C_{ij} = \frac{2^{m+n+2} m!n!\pi}{\left[\dfrac{\partial^2 H_{nm}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y}\right]^2} \qquad (11)$$

الاثبات: العلاقة (9) في هذه الحالة تصبح على الشك الآتي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} f(x,y) dx dy \cong \sum_{i=1, j=1}^{m,n} C_{ij} f(x_i, y_j) \qquad (12)$$

ننطلق من التكامل الايسر من التكامل واستناداً إلى العلاقة (7):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x,y)dx\right]dy \cong \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\left[\sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i,y)\right]dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}}{[H_n'(x_i)]^2} f(x_i,y)\right]dy \quad = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}}{[H_n'(x_i)]^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(x_i,y)dy\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}}{[H_n'(x_i)]^2}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{2^{m+1}m!\sqrt{\pi}}{[H_m'(y_j)]^2} f(x_i,y_j)\right]\right]$$

$$= \sum_{i=1,j=1,}^{n,m}\frac{2^{m+n+2}m!n!\pi}{\left[\frac{\partial^2 H_{nm}(x_i,y_j)}{\partial x\,\partial y}\right]^2} f(x_i,y_j)$$

منه (ومنه) نستنتج أن :

$$C_{ij} = \frac{2^{m+n+2}m!n!\pi}{\left[\frac{\partial^2 H_{nm}(x_i,y_j)}{\partial x\,\partial y}\right]^2}$$

ملاحظة: كما هو واضح أن الثوابت $C_{ij}\ ;i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,m$ مرتبطة فقط بكثيرات حدود هرميت ولا علاقة لها بالدالة $f(x,y)$.

مثال 1 : استخدم العلاقة التكعيبية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية لتكامل الدالة $f(x,y)=1$ على الفضاء R^2 معتبرا $n=m=1$.

الحل: استناداٌ إلى العلاقة (12)، نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy \cong C_{11} f(x_1,y_1)$$

وباعتبار أن $n=m=1$ نستخدم كثيرة حدود هرميت H_{11}، نجد:

$$H_{11}(x,y)=4xy$$

و جذر كثيرة الحدود السابقة هو:

$$(x_1,y_1)=(0,0)$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد: $f(0,0)=1$

و بالاعتماد على العلاقة (11) فإنالثابت المقابل لنقطة العلاقة التكعيبية هو:

$$c_{11}=\pi$$

و أخيرا فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I=1(\pi)=\pi$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy=\pi$$

العلاقة صحيحة تماما من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2(m+n)-1=3$ و $f(x,y)$ وفي تمريننا هذا هي كثيرة حدود من الدرجة الصفرية مما يؤكد صحة كلامنا.

3-4- حساب التكاملات الثلاثية باستخدام جذور كثيرات حدود هرميت المتعامدة بثلاث متحولات على الفضاء R^3.

اعتمادا على العلاقتين (6)و (10) يمكننا كتابة كثيرات الحدود المتعامدة لهرميت بثلاث متحولات على الفضاء R^3 بالشكل التالي :

$$\begin{aligned}H_{nmL}&=(-1)^{n+m+L}e^{x^2+y^2+Z^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\frac{d^m}{dy^m}(e^{-y^2})\frac{d^L}{dy^L}(e^{-Z^2})\\&=H_n(x).H_m(y).H_m(y)\end{aligned}\tag{13}$$

نوجد جذور كثيرات الحدود هذه واعتبارها هي النقاط التكاملية (x_i,y_j,z_k) ،ونوجد الثوابت الموافقة.

مبرهنة3 : بفرض أن $H_{n,m,L}(x,y,z)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على الفضاء R^3 ، وكانت (x_j,y_j,z_j) هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $H_{n,m,L}(x,y,z)=0$ ، فعند ذلك ثوابت العلاقة التكعيبية (9) تكتب بالشكل التالي:

$$C_{ijk}=\frac{2^{m+n+L+3}m!n!L!\pi^{\frac{3}{2}}}{\left[\dfrac{\partial^3 H_{nmL}(x_i,y_j,z_k)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right]^2}\tag{14}$$

الاثبات: العلاقة (9) في هذه الحالة تُكتب بالصيغة الآتية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2-z^2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \cong \sum_{i=1,j=1,k=1}^{m,n,L} C_{ijk} f(x_i,y_j,z_k) \qquad (15)$$

ننطلق من التكامل الايسر من التكامل واستناداً إلى العلاقتين (12) و (7)، نجد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2-z^2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dx\,dy\right]dz$$

$$\cong \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\left[\sum_{i=1,j=1}^{n.m}\frac{2^{m+n+2}m!n!\pi}{\left[\frac{\partial^2 H_{nm}(x_i,y_j,z}{\partial x\,\partial y}\right]^2} f(x_i,y_j,z)\right]dz =$$

$$\sum_{i=1,j=1}^{n.m}\left[\frac{2^{m+n+2}m!n!\pi}{\left[\frac{\partial^2 H_{nm}(x_i,y_j,z}{\partial x\,\partial y}\right]^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} f(x_i,y_j,z)\,dz\right]$$

$$= \sum_{i=1,j=1}^{n,m}\left[\frac{2^{m+n+2}m!n!\pi}{\left[\frac{\partial^2 H_{nm}(x_i,y_j,z}{\partial x\,\partial y}\right]^2}\sum_{k=1}^{L}\frac{2^{k+1}k!\sqrt{\pi}}{\left[H'_L(z_k)\right]^2} f(x_i,y_j,z_k)\right]$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n,m,L}\frac{2^{m+n+L+3}m!n!L!\pi^{\frac{3}{2}}}{\left[\frac{\partial^3 H_{nmL}(x_i,y_j,z_k)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right]^2} f(x_i,y_j,z_k)$$

ومنه نستنتج أن :

$$C_{ijk} = \frac{2^{m+n+L+3}m!n!L!\pi^{\frac{3}{2}}}{\left[\frac{\partial^3 H_{nmL}(x_i,y_j,z_k)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right]^2}$$

ملاحظة :كما هو واضح أن الثوابت $C_{ijk}\,; i=1,2,...,n, j=1,2,...,m, k=1,2,...,L$ مرتبطة فقط بكثيرات حدود هرميت ولا علاقة لها بالدالة $f(x,y,z)$.

مثال2:استخدم العلاقة التكعيبية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية لتكامل الدالة $f\left(x,y,z\right)=1$ على الفضاء R^3 معتبرا $n=m=k=1$.

الحل: استناداً إلى العلاقة التكعيبية(15):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}1e^{-x^2-y^2-z^2}dx\,dydz\cong C_{111}f\ (x_1,y_1,z_1)$$

نجد:

وباعتبار أن $n=m=k=1$ نستخدم كثيرة حدود هرميت H_{111} أي:

$$H_{111}(x,y,z)=8xyz$$

و جذر كثيرة الحدود السابقةهو:

$$(x_1,y_1,z)=(0,0,0)$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد: $f\ (0,0,0)=1$

و بالاعتماد على العلاقة(14) يكون الثابت المقابل لنقطة العلاقة التكعيبية هو:

$$c_{111}=\pi\sqrt{\pi}$$

و أخيرا فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I=1\left(\pi\sqrt{\pi}\right)=\pi\sqrt{\pi}$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}1e^{-x^2-y^2-z^2}f\ (x,y,z)dx\,dydz\cong\left(\sqrt{\pi}\right)\left(\sqrt{\pi}\right)\left(\sqrt{\pi}\right)=\pi\sqrt{\pi}$$

العلاقة صحيحة تماما من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2(m+n+k)-1=5$ و $f\ (x,y,z)$ وفي تمريننا هذا هو تابع ثابت مما يؤكد صحة كلامنا.

4-4- حساب التكاملات المضاعفة في الحالة العامة على الفضاء R^n .

اعتمادا على العلاقات (6)و (10)و (13) يمكننا كتابة كثيرات الحدود المتعامدة من نوع هرميت بـ n من المتحولات على على الفضاء R^n .بالشكل التالي :

$$H_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x)=(-1)^{\alpha}e^{r^2}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}}e^{-x_i^2}\right)\quad ,\left|\begin{array}{l}\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ \ ,r^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\\ x=(x_1.x_2,\ldots,x_n)\end{array}\right. \qquad (16)$$

وتصبح العلاقة التكعيبية في هذه الحالة:

$$\int_{\Omega}e^{-x^2}f(x)dx=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}C_{i_1i_2,\ldots,i_n}f(x^i)\ ;x=(x_1,x_2,x_3,\ldots x_n) \qquad (17)$$

قونم

$$;\ dx=dx_1dx_2dx_3\ldots dx_n\ \ ,\Omega=R^n$$

بإيجاد جذور كثيرات الحدود هذه واعتبارها هي النقاط التكاملية $x^i=\left(x_1^{i_1},x_2^{i_2},\ldots,x_n^{i_n}\right)$ ،ونوجد الثوابت الموافقة.

مبرهنة 4: بفرض أن $H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x)\quad ;x=(x_1,x_2,x_3,\ldots x_n)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على الفضاء R^n ، وكانت $(x^i)\ \ ;\ i=1,2,\ldots,N$ هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $H_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(x)=0$ ، فعند ذلك ثوابت العلاقة التكعيبية (17) تكتب بالصيغة الآتية:

$$C_i=\frac{2^{\alpha+n}\beta\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\dfrac{\partial^n H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x^i)}{\prod_{i=1}^{n}\partial x_i}\right)^2}\quad ;\left|\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,,\beta=\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i\,!)\right. \qquad (18)$$

$$;i=1,2,\ldots,N$$

حيث أن Nهو عدد جذور كثيرات حدود هرميت.

الاثبات: بنفس طريقة اثبات المبرهنات السابقة.

ملاحظة :كما هو واضح أن الثوابت C_iمرتبطة فقط بكثيرات حدود هرميت ولا علاقة لها بالدالة $f(x)$.

مثال3:استخدم العلاقة التكعيبية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية لتكامل الدالة $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=1$على الفضاء R^4 معتبرا $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=1$.

الحل: استناداً إلى العلاقة التكعيبية(17):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 1e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2}dx_1dx_2dx_3dx_4 \cong C_{1111}f\left(x_1^1,x_2^1,x_3^1,x_4^1\right)$$

نجد:

وباعتبار أن $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=1$ فإننا نستخدم كثيرة حدود هرميت H_{1111} أي:

$$H_{1111}(x_1,x_2,x_3,x_4)=16x_1x_2x_3x_4$$

و جذر كثيرة الحدود السابقةهو:

$$(x_1^1,x_2^1,x_3^1,x_4^1)=(0,0,0,0)$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد: $f(0,0,0,0)=1$

و بالاعتماد على العلاقة(18) يكون الثابت المقابل لنقطة العلاقة التكعيبية هو:

$$c_{1111}=\pi^2$$

و أخيرا فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I=1\left(\pi^2\right)=\pi^2$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 1e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2}dx_1dx_2dx_3dx_4 \cong \left(\sqrt{\pi}\right)\left(\sqrt{\pi}\right)\left(\sqrt{\pi}\right)\left(\sqrt{\pi}\right)=\pi^2$$

نلاحظ أن العلاقة صحيحة تماما.

الاقتراحات والتوصيات:

1-تشكيل علاقات تقريبية للدوال المثلثية باستخدام الدوال العقدية.

2-العلاقات التقريبية للتكاملات المضاعفة بمتحولات عقدية.

3- البحث عن مناطق تكاملية أخرى للدوال مثل المناطق الكروية و الناقصية.

المراجع المستخدمة:

المراجع العربية:

[1]-**د. حامد عباس، التحليل العددي2، جامعة حمص، مديرية الكتب والمطبوعات، 2018.**

[2]-**د. إبراهيم ابراهيم، الدوال الخاصة، جامعة حمص، 2018.**

المراجع الاجنبية:

[3]. Richard L. Burden, J. Douglas Fairs Numerical Analysis ,
9th_edition,2005.

[4]. Mysovskikh.I.P. Interpolation cubature formulas Nowak . 1981
Mowscou.336.p.

[5].cege.g.1962 orthogonal polynomials Mowscou.500.p.

[6].Krilov . _approximation Numerical for integration. Nawka
Mowscou.500p-1967

[7].Orive, R., santos, C.J., & Spalevic, M. M.,(2020). Cubature formulae for the Gaussian weight some old and new rules . Electronic Transitions on Numerical Analysis, 5(2020), 426-438.

[8].Kolmogorof A.N, (1989) principles of function theory and functional analysis, Moscow.

[9]. Mysovskikh.I.P , (2000) Lectures in Numerical Analysis ,sant peterpurg unver.