حساب التكاملات المضاعفة بالاعتماد على كثيرات حدود تشيبيشيف

إعداد الباحثة : ورود محمّد ابراهيم بإشراف : أ.د. حامد عباس

ملخص البحث:

يهتم هذا البحث بدراسة التكاملات المضاعفة للدوال اعتمادا على مبدأ غاوس، والذي يعتمد على جذور كثيرات الحدود المتعامدة لـ تشيبيشيف في منطقة المكعب $\left[-1,+1\right]^n$ في الفضاء R^n، ودالة الوزن $\omega(x)=\frac{1}{r};\ \ r=\sqrt{\prod_{i=1}^{n}\left(1-x_i^{\,2}\right)}$ ،حيث أوجدنا كثيرات الحدود المتعامدة من نوع تشيبيشيف في فضاءات متعددة الأبعاد:

$$T_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\left(x\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{\alpha_i}{2}\right\rfloor}(-1)^k\,\frac{\alpha_i}{\alpha_i-k}\begin{pmatrix}\alpha_i-k\\ k\end{pmatrix}2^{\alpha_i-2k-1}x_i^{\,\alpha_i-2k}\right)\quad ,x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$$

ثم أوجدنا جذورها وعددها N، وفرضناها هي النقاط التكاملية للعلاقات التكعيبية، والتي من خلالها حسبنا القيم التقريبية للتكاملات المتكررة، وأوجدنا المبرهنات اللازمة مع الاثبات، التي أعطتنا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية التالية:

$$C_j=\frac{\pi^n}{T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n-1}(x^j)\beta}\quad ;\beta=\frac{\partial^n T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x^j)}{\prod_{i=1}^{n}\partial x_i},\ j=1,2,\ldots,N$$

التي كانت تحسب من خلال حل جمل من المعادلات غير الخطية، حيث إن لكل منطقة تكاملية ثوابت خاصة بها .

الكلمات المفتاحية: العلاقات التكعيبية، دوال تشيبيشيف المتعامدة، التكاملات المضاعفة التقريبية.

Computing mulipleed integrals based on Chebyshev polynomials

Abstract

This research is concerned with studying the mulipleed integrals of functions based on Gauss's principle, which is based on the roots of chebyshev's orthogonal polynomials in the cubic $[-1,+1]^n$ space R^n ,and the weight function $\omega(x)=\frac{1}{r};\ r=\sqrt{\prod_{i=1}^{n}\left(1-x_i^{\ 2}\right)}$,where we found the orthogonal polynomials of the chebyshev type in multidimensional spaces:

$$T_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x)=\prod_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{\alpha_i}{2}\right\rfloor}(-1)^k\frac{\alpha_i}{\alpha_i-k}\binom{\alpha_i-k}{k}2^{\alpha_i-2k-1}x_i^{\ \alpha_i-2k}\Big)\quad ,x=\left(x_1.x_2,\ldots,x_n\right)$$

then we found their roots, and their number is N, and assumed that they are the integral points of the cubic relations, from which we calculated the approximate values of the mulipleed integrals, and found the necessary theorems with proof, which gave us the constants of the following approximate integral relations:

$$C_j=\frac{\pi^n}{T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n-1}(x^j)\beta}\quad ;\beta=\frac{\partial^n T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x^j)}{\prod_{i=1}^{n}\partial x_i},\ j=1,2,\ldots,N$$

which were calculated by solving sets of nonlinear equations, since each e integral region has its own constants.

keywords: Cubic relations, orthogonal Chebyshev functions, approximate mulipleed integrals.

1-مقدمة البحث:

تعريف:[2,5]

نقول عن الدالتين $f(x), g(x)$ الحقيقيتين المعرفتين والقابلتين للمكاملة على المنطقة Ω أنهما متعامدتان على تلك المنطقة إذا كان:

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{\Omega} \omega(\mathrm{x}) f(\mathrm{x}) g(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} = 0 \qquad (1)$$

$\omega(\mathrm{x})$ بدالة وزن .

تم حساب التكاملات التقريبية الاحادية للدوال بطرائق متعددة أخرى **[3,6]**، حيث استخدم غاوس الطرائق التقريبية لحساب التكاملات على المجال $[-1,+1]$ واعتبر كثيرات حدود ليجندر بدالة وزن $\omega(\mathrm{x})$، حيث إن علاقة غاوس التربيعية من الشكل التالي [1,4,7]:

$$\int_{-1}^{+1} \omega(x) f(x) dx \cong \sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i) \qquad (2)$$

سُميت النقاط x_i عقد العلاقة التربيعية، أو نقاط استكمال العلاقة التربيعية، وأحيانا تدعى نقاط ارتكاز العلاقة التربيعية، و C_i هي الثوابت الموافقة لتلك النقاط x_i، و $\omega(x)$ دالة الوزن. يتم تحديد الثوابت $C_i \; ; i = 1, 2, ..., n$, حيث تتحول العلاقة (2) الى مساواة مضبوطة (صحيحة تماما) من أجل كل كثيرة حدود جبرية درجتها لا تتجاوز 2n−1، أي من أجل: $f(x) = 1, x, x^2, ..., x^{2n-1}$ حيث إن المجال التكاملي هو $[-1,+1]$ ولدينا 2n من المجاهيل هي: $X_i \; , C_i \; ; \quad i = 1, 2, 3, ..., n$.

1-1.استخدام كثيرات حدود تشيبيشيف:

<u>تعريف:</u>

نرمز لكثيرات حدود تشيبيشيف من الدرجة n بمتحول واحد بالرمز $T_n(x)$ وهي كثيرات حدود متعامدة على المجال $[-1,+1]$ ودالة وزن $\omega(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، وتعطى وفق بالشكل الاتي: [10,8]

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(-1)^k\ \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k-1}x^{n-2k} \qquad (3)$$

حيث إن: $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ و $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$تعني أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي n.

تم اعتبار x_j هي جذور كثيرات حدود تشيبيشيف وبناءاً على ذلك تم التوصل الى العلاقة التقريبية:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx \cong \sum_{j=1}^{n}C_j f(x_j) \qquad (4)$$

حيث الثوابت هي:[9]

$$C_j=\frac{\pi}{T_{n-1}(x_j)T_n'(x_j)} \qquad ;\ j=1,2,\dots.n \qquad (5)$$

2-.هدف البحث وطريقته:

يهدف هذا البحث الى:

- حساب التكاملات المضاعفة للدوال بشكل تقريبي اعتمادا على مبدأ غاوس، باستخدام جذور كثيرات الحدود المتعامدة لـ تشيبيشيف في منطقة المكعب $[-1,+1]^n$ في الفضاء R^n، ودالة الوزن , من خلال ايجاد كثيرات الحدود المتعامدة من نوع تشيبيشيف في

فضاءات متعددة الأبعاد وحساب جذورها، والتي نعتبرها النقاط التكاملية للعلاقات التكعيبية .

- التوصل الى الصيغ التي تعطينا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية، بالاعتماد على مجموعة من المبرهنات والتي يتم ايجادها مع الاثبات.

3-.مشكلة البحث:

- ايجاد كثيرات الحدود المتعامدة من نمط تشيبيشيف في فضاءات متعددة الأبعاد.
- حساب جذور كثيرات الحدود المذكورة واعتبارها نقاط العلاقة التكعيبية.
- التوصل الى مبرهنات تعطينا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية واثباتها.
- طرح بعض التطبيقات العددية.

4-.النتائج ومناقشتها:

4-1.مفاهيم أساسية[4] :

العلاقة التقريبية لحساب التكاملات المضاعفة تسمى العلاقة التكعيبية و تكتب بالشكل التالي :

$$\int_{\Omega} \omega(x) f(x) dx \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x^j) \qquad (6)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3 .... x_n) \ , dx = dx_1 dx_2 dx_3 .. dx_n$$

حيث إن Ω منطقة في الفضاء R^n ، و $\omega(x)$ دالة الوزن و $f(x)$ الدالة المكاملة واشارة التكامل على المنطقة Ω تعني التكامل المضاعف n مرة من الفضاء R^n على المنطقة Ω، و C_j الثوابت الموافقة للنقاط X^j التي هي جذور كثيرات الحدود المتعامدة في المنطقة Ω و N عدد هذه الجذور، العلاقة السابقة صحيحة من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2n-1$.

4-2.حساب التكاملات باستخدام جذور كثيرات الحدود تشيبيشيف المتعامدة بمتحولين على الفضاء R^2.

ان كثيرات حدود تشيبيشيف المتعامدة بمتحولين على المربع $[-1,+1]^2$ **الفضاء** R^2 تعطى بالصيغة التالية: [3]

$$T_{nm}(x,y)=\left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k-1}x^{n-2k}\right)\times$$
$$\left(\sum_{L=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2}\right\rfloor}(-1)^L\frac{m}{m-L}\binom{m-L}{L}2^{m-2L-1}y^{m-2L}\right)$$
$$=T_n(x).T_m(y) \qquad (7)$$

حيث إن دالة الوزن هي : $\omega(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}}$.

نقوم بإيجاد جذور كثيرات الحدود هذه على اعتبار أن جذور كثيرات الحدود هذه بمتحول واحد معلومة بدلالة x وعلى أساسها نحسب y، ثم نحدد النقاط التكاملية (x,y) ،ونوجد الثوابت الموافقة بالاعتماد على المبرهنة التالية:

مبرهنة1: بفرض أن $T_{n,m}(x,y)$ هي دوال مستمرة وقابلة **للاشتقاق** الجزئي على المنطقة $[-1,+1]^2$ ، وكانت (x_j,y_j) هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $T_{n,m}(x,y)=0$، فعند ذلك ثوابت العلاقة التكعيبية (6) تكتب بالشكل التالي:

$$C_{ij}=\frac{\pi^2}{T_{n-1}(x_i,y_j)\dfrac{\partial^2 T_{nm}(x_i,y_j)}{\partial x\,\partial y}} \qquad (8)$$

الاثبات: العلاقة (6) في هذه الحالة تصبح على الشكل التالي:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{\left(1-x^{2}\right)\left(1-y^{2}\right)}}f\,(x,y)dx\,dy \cong \sum_{i,j=1}^{n,m}C_{ij}f\,(x_i,y_j) \qquad (9)$$

ننطلق من التكامل الايسر من التكامل وحسب العلاقة(4)

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{\left(1-x^{2}\right)\left(1-y^{2}\right)}}f\,(x,y)dx\,dy\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-y^{2}}}\left[\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}f\,(x,y)dx\right]dy$$

$$\cong\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-y^{2}}}\left[\sum_{i=1}^{n}C_i f\,(x_i,y)\right]dy$$

$$=\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-y^{2}}}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{T_{n-1}(x_i)T_n'(x_i)}f\,(x_i,y)\right]dy$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\pi}{T_{n-1}(x_i)T_n'(x_i)}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-y^{2}}}f\,(x_i,y)dy\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\pi}{T_{n-1}(x_i)T_n'(x_i)}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\pi}{T_{m-1}(y_j)T_m'(y_j)}f\,(x_i,y_j)\right]\right]$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n,m}\frac{\pi^{2}}{T_{nm-1}(x_i,y_j)\dfrac{\partial^{2}T_{nm}(x_i,y_j)}{\partial x\,\partial y}}f\,(x_i,y_j)$$

منه نستنتج أن :

$$C_{ij}=\frac{\pi^{2}}{T_{nm-1}(x_i,y_j)\dfrac{\partial^{2}T_{nm}(x_i,y_j)}{\partial x\,\partial y}}$$

ملاحظة :كما هو واضح أن الثوابت $C_{ij}\,;i=1,2,...,n,\,j=1,2,...,m$ مرتبطة فقط بكثيرات حدود تشيبيشف ولا علاقة لها بالدالة $f\,(x,y)$.

مثال1: استخدم العلاقة التكعيبية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية لتكامل الدالة $f(x,y)=3$ على المربع $[-1,+1]^2$ في الفضاء R^2 معتبرا $n=m=1$.

الحل: حسب العلاقة التكعيبية(9) نجد:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{3}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}}dx\,dy \cong C_{11}f(x_1,y_1)$$

وباعتبار أن $n=m=1$ فإننا نستخدم كثيرة حدود تشيبيشيف T_{11} أي:

$$T_{11}(x,y)=xy$$

و جذر كثيرة الحدود هذه هو:

$$(x_1,y_1)=(0,0)$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد: $f(0,0)=3$

و بالاعتماد على العلاقة(8) يكون الثابت المقابل لنقطة العلاقة التكعيبية هو:

$$c_{11}=\pi^2$$

و أخيرا فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I=3\left(\pi^2\right)=3\pi^2$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{3}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}}dx\,dy=3\pi^2$$

العلاقة صحيحة تماما من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2(m+n)-1=3$ و $f(x,y)$ وفي تمريننا هذا هي كثيرة حدود من الدرجة الصفرية مما يؤكد صحة كلامنا.

4-3.حساب التكاملات الثلاثية باستخدام جذور كثيرات حدود تشيبيشيف المتعامدة بثلاث متحولات على الفضاء R^3.

اعتمادا على العلاقتين (3)و (7) يمكننا كتابة كثيرات الحدود المتعامدة تشيبيشيف بثلاث متحولات على الفضاء R^3 بالشكل التالي :

$$T_{nmL}=\left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}2^{n-2k-1}x^{n-2k}\right)\times$$

$$\left(\sum_{r=0}^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}(-1)^r\frac{m}{m-r}\binom{m-r}{r}2^{m-2r-1}y^{m-2r}\right)\times\left(\sum_{w=0}^{\left\lfloor\frac{L}{2}\right\rfloor}(-1)^w\frac{L}{L-w}\binom{L-w}{w}2^{L-2w-1}z^{L-2w}\right)$$

$$=T_n(x).T_m(y).T_L(z) \qquad (10)$$

حيث إن دالة الوزن هي : $\omega(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}}$.

نقوم بإيجاد جذور كثيرات الحدود هذه واعتبارها هي النقاط التكاملية (x_i,y_j,z_k) ،ونوجد الثوابت الموافقة.

مبرهنة2 : بفرض أن $T_{n,m,L}(x,y,z)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على المنطقة $[-1,+1]^3$، وكانت (x_i,y_j,z_k) هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $T_{n,m,L}(x,y,z)=0$، فعند ذلك ثوابت العلاقة التكعيبية (6) تكتب بالشكل التالي:

$$C_{ijk}=\frac{\pi^3}{T_{mnL-1}(x_j,y_j,z_k)\dfrac{\partial^3 T_{nmL}(x_i,y_j,z_k)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}} \qquad (11)$$

الاثبات: العلاقة (6) في هذه الحالة تصبح على الشكل التالي:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}}f(x,y,z)dxdydz$$
$$\cong\sum_{i=1,j=1,k=1}^{m,n,L}C_{ijk}f(x_i,y_j,z_k)\quad(12)$$

ننطلق من التكامل الايسر من التكامل وحسب العلاقتين(4و9)

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}}f(x,y,z)dxdydz=$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left[\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}f(x,y,z)dxdy\right]dz$$

$$\cong\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left[\sum_{i=1,j=1}^{n.m}\frac{\pi^2}{T_{mn-1}(x_i,y_j)\frac{\partial^2 T_{nm}(x_i,y_j)}{\partial x\,\partial y}}f(x_i,y_j,z)\right]dz=$$

$$\sum_{i=1,j=1}^{n.m}\left[\frac{\pi^2}{T_{mn-1}(x_j,y_j)\frac{\partial^2 T_{nm}(x_i,y_j)}{\partial x\,\partial y}}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}f(x_i,y_j,z)dz\right]$$

$$=\sum_{i=1,j=1}^{n,m}\left[\frac{\pi^2}{T_{mn-1}(x_j,y_j)\frac{\partial^2 T_{nm}(x_i,y_j)}{\partial x\,\partial y}}\sum_{k=1}^{L}\frac{\pi}{T_{L-1}(z_k)T_L'(z_K)}f(x_i,y_j,z_k)\right]$$

$$=\sum_{i,j,k=1}^{n,m,L}\frac{\pi^3}{T_{mnL-1}(x_i,y_j,z_k)\frac{\partial^3 T_{nmL}(x_i,y_j,z_k)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}}f(x_i,y_j,z_k)$$

منه نستنتج أن :

$$C_{ijk}=\frac{\pi^3}{T_{mnL-1}(x_i,y_j,z_k)\dfrac{\partial^3 T_{nmL}(x_i,y_j,z_k)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}}$$

ملاحظة :كما هو واضح أن الثوابت مرتبطة فقط بكثيرات حدود تشيبيشيف ولا علاقة لها بالدالة $f(x,y,z)$.

مثال2:استخدم العلاقة التكعيبية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية لتكامل الدالة $f(x_1,x_2,x_3)=7$ على المكعب $[-1,+1]^3$ في الفضاء R^3 معتبرا $n=m=L=1$.

الحل: حسب العلاقة التكعيبية(12):

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{7}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}}dx\,dy\,dz\cong C_{111}f(x_1,y_1,z_1)$$

وباعتبار أن $n=m=L=1$ فإننا نستخدم كثيرة حدود تشيبيشيف T_{111}

$$T_{111}(x,y,z)=xyz$$

و جذر كثيرة الحدود هذه هو:

$$(x,y,z)=(0,0,0)$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد: $f(0,0,0)=7$

و بالاعتماد على العلاقة(11) يكون الثابت المقابل لنقطة العلاقة التكعيبية هو:

$$c_{111}=\pi^3$$

و أخيرا فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I = 7\left(\pi^3\right) = 7\pi^3$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{7}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}} dx\,dy\,dz = 7\pi^3$$

نلاحظ أن العلاقة صحيحة تماما.

4-4.حساب التكاملات المضاعفة في الحالة العامة على الفضاء R^n .

اعتمادا على العلاقات (3)و (7)و (10) يمكننا كتابة كثيرات الحدود المتعامدة من نوع تشيبيشيف بـ n من المتحولات على على الفضاء R^n. بالشكل التالي :

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{\alpha_i}{2} \right\rfloor} (-1)^k \frac{\alpha_i}{\alpha_i - k} \binom{\alpha_i - k}{k} 2^{\alpha_i - 2k - 1} x_i^{\alpha_i - 2k} \right) \quad , x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} T_{\alpha_i}(x_i). \qquad (13)$$

حيث إن دالة الوزن هي : $r = \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\left(1 - x_i^2\right)}$; $\omega(x) = \frac{1}{r}$.

وتصبح العلاقة التكعيبية في هذه الحالة:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n}\left(1 - x_i^2\right)}} f(x)dx = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n = 1}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} C_{i_1 i_2 \dots i_n} f(x^i) \;; x = (x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$$
$$;\; dx = dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n \quad , \Omega = [-1, +1]^n \qquad (14)$$

نقوم بإيجاد جذور كثيرات الحدود هذه واعتبارها هي النقاط التكاملية $x^i = \left(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_n^{i_n}\right)$ ،ونوجد الثوابت الموافقة.

مبرهنة3 : بفرض أن $T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x) \quad ; x=(x_1,x_2,x_3,\ldots x_n)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على المنطقة $[-1,+1]^n$، وكانت $(x^i) \quad ; i=1,2,\ldots,N$ هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $T_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(x)=0$، فعند ذلك ثوابت العلاقة التكعيبية (14) تكتب بالشكل التالي:

$$C_i = \frac{\pi^n}{T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n-1}(x^i)\left(\dfrac{\partial^n T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x^i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\partial x_i}\right)^2} \quad ; i=1,2,\ldots,N \tag{15}$$

حيث إن Nهو عدد جذور كثيرة حدود تشيبيشيف.

الاثبات: بنفس طريقة اثبات المبرهنات السابقة.

ملاحظة :كما هو واضح أن الثوابت C_i مرتبطة فقط بكثيرات حدود تشيبيشيف ولا علاقة لها بالدالة $f(x)$.

مثال3:استخدم العلاقة التكعيبية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية لتكامل الدالة $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=5$ على المكعب $[-1,+1]^4$ الفضاء R^4 معتبرا $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=1$.

الحل: حسب العلاقة التكعيبية(14):

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{5}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)(1-x_4^2)}}dx_1dx_2dx_3dx_4 \cong C_{1111}f(x_1^1,x_2^1,x_3^1,x_4^1)$$

وباعتبار أن $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=1$ فإننا نستخدم كثيرة حدود تشيبيشيف T_{1111}

$$T_{1111}(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2x_3x_4$$

و جذر كثيرة الحدود هذه هو:

$$(x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1) = (0,0,0,0)$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد: $f\,(0,0,0,0) = 5$

و بالاعتماد على العلاقة(15) يكون الثابت المقابل لنقطة العلاقة التكعيبية هو:

$$c_{1111} = \pi^4$$

و أخيرا فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I = 5\left(\pi^4\right) = 5\pi^4$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{5}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_3^2)(1-x_4^2)}} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 5\pi^4$$

نلاحظ أن العلاقة صحيحة تماما.

الاقتراحات والتوصيات:

1–تشكيل علاقات تقريبية للدوال المثلثية.

2–العلاقات التقريبية للتكاملات المضاعفة بمتحولات عقدية.

3– استخدام مبدأ غاوس في المناطق التكاملية الكروية و الناقصية.

المراجع المستخدمة:

المراجع العربية:

[1]–د. حامد عباس، التحليل العددي2، جامعة حمص، مديرية الكتب والمطبوعات، 2018.

[2]–د. إبراهيم ابراهيم، الدوال الخاصة، جامعة حمص، 2018.

المراجع الاجنبية:

[3]. Richard L. Burden, J. Douglas Fairs Numerical Analysis ,
9th_edition,2005.

[4]. Mysovskikh.I.P. Interpolation cubature formulas Nowak . 1981
Mowscou.336.p.

[5].cege.g.1962 orthogonal polynomials Mowscou.500.p.

[6].Krilov . _approximation Numerical for integration. Nawka
Mowscou.500p−1967

[7].Orive, R., santos, C.J., & Spalevic, M. M.,(2020). Cubature formulae for the Gaussian weight some old and new rules . Electronic Transitions on Numerical Analysis, 5(2020), 426−438.

[8].Kolmogorof A.N, (1989) principles of function theory and functional analysis, Moscow.

[9]. Mysovskikh.I.P , (2000) Lectures in Numerical Analysis ,sant peterpurg unver.

[10].Stefan Paszkowski , (1975) Numerical applications of polynomials and Chebyshev series ,warsow.