استقرار حل جملة معادلات تفاضلية عشوائية من مرتبة كسرية

ايمان احمد حسين[1] أ.د. سامح العرجه[2]

ملخص البحث:

قدمنا في هذا البحث بعض المفاهيم والتعاريف الأساسية حول موضوع التفاضل والتكامل الكسري، حيث عرفنا مشتق كابتو الكسري، تكامل ريمان–ليوفيل الكسري، كما ذكرنا بعض الخواص التي يحققها كل منهما.

ذكرنا تعريف الاستقرار العشوائي، الاستقرار العشوائي بشكل تقاربي، الاستقرار الأسي بشكل شبه أكيد، الاستقرار الأسي بالعزوم من المرتبة p للحل الصفري لجملة معادلات تفاضلية عشوائية كسرية.

عرفنا صيغة إيتو التفاضلية لمشتق كابتو من أجل المعادلات التفاضلية العشوائية الكسرية، ومن أجل جملة معادلات تفاضلية عشوائية كسرية.

كلمات مفتاحية: مشتق كابتو، تكامل ريمان– ليوفيل، الاستقرار العشوائي، الاستقرار بالعزوم، المؤثر المولّد، العملية العشوائية، الحركة البراونية، التوقع.

Stability Solution of System of Fractional Stochastic Differential Equations

Abstract

In this research, we introduced some basic concepts and definitions on the topic of fractional calculus, where we defined the Caputo fractional derivative, the Riemann- Liouville fractional integral, and we mentioned some of the properties that each of them holds.

We mentioned the definition of stochastically stable, stochastically asymptotically stable, almost surely exponentially stable, pth moment exponentially stable for trivial solution of system of fractional stochastic differential equations.

We defined Ito's formula of Caputo derivative for fractional stochastic differential equations and for system of fractional stochastic

Keywords: Caputo derivative, Riemann-Liouville integral, stochastically stable, moment stable, generator of, stochastic process, Brownian motion, expectation.

1- مقدمة:

على مر السنوات، بحثت نتائج عديدة في نظرية وتطبيقات المعادلات التفاضلية العشوائية. النماذج المعينة التي يتم اختيارها للدراسة غالباً تتذبذب نتيجة عامل الضجيج المؤثر عليها. إن تمديد هذه النماذج أساسي للنماذج العشوائية المعتبرة والتي تحوي على حركة براونية وعمليات عشوائية. إن نمذجة معظم المسائل في الحياة الواقعية باستخدام المعادلات التفاضلية العشوائية الكسرية يكون أفضل من المعادلات العادية. وهكذا توجد أهمية كبيرة لشرح التأثيرات العشوائية في الجمل الكسرية. بعد إيجاد حل جملة معادلات تفاضلية عشوائية، يجب التأكد من كون هذا الحل مستقراً أم لا، حيث أن خاصية الاستقرار من أهم خواص حل الجملة المدروسة إذ تبنى عليه نتائج عدة فيما بعد.

سندرس في هذا البحث استقرار حل جملة معادلات تفاضلية عشوائية من مرتبة كسرية من الشكل:

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\mathrm{X}(t)=\mathrm{A}\,\mathrm{X}(t)+g\left(t,\mathrm{X}(t)\right)\dfrac{dW(t)}{dt} & ;t>0\ ,\ \alpha\in(0,1] \\ \mathrm{X}(0)=\mathrm{X}_0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

حيث $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$، $g:[0,+\infty[\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ تابع قابل للقياس، $\{W(t)\ \ ;t\in[0,+\infty)\}$ الحركة البراونية السلمية المعيارية على الفضاء الاحتمالي التام $(\Omega,\mathcal{F},P)$ مع الترشيح $F=\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty[}$

وذلك بالاعتماد على مبدأ ليبانوف في الاستقرار. وضعنا عدة مبرهنات لإثبات الاستقرار العشوائي، الاستقرار العشوائي التقاربي، الاستقرار الأسي بشكل شبه أكيد، الاستقرار الأسي بالعزوم من المرتبة P للحل الصفري للجملة (3.1). وقد اعتمدنا في إثبات صحة هذه المبرهنات على طريقة ليبانوف المطورة، والتي تم تطويرها لتلائم دراسة استقرار حل جمل المعادلات التفاضلية العشوائية. تنص هذه الطريقة على أن حل الجملة (3.1) يكون مستقر عشوائياً إذا وجد تابع موجب تحديداً وكان المؤثر المولّد للعملية العشوائية المتعلقة بهذا التابع سالب تحديداً.

2- أهمية البحث:

إن المعادلات التفاضلية العشوائية تعد أداة رياضية قوية لنمذجة الأنظمة المعقدة التي تخضع للضوضاء العشوائية، وإن دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية عشوائية كسرية أمر صعب ومعقد، نقدّم من خلال هذا البحث طريقة عملية لدراسة استقرار حل هذه الجملة.

3- مشكلة البحث:

يتم استخدام المعادلات التفاضلية العشوائية الكسرية في مجالات تطبيقية عديدة مثل نمذجة الأسعار في الأسواق المالية، وصف حركة جزيء في السائل، أنظمة التحكم، نمذجة الطقس، نمذجة السكان، نمذجة انتشار الأمراض وغير ذلك. تأتي مشكلة البحث لتوضح أهمية دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية عشوائية كسرية نتيجة التطبيقات الهائلة لمثل هكذا جمل معادلات في الحياة العملية.

4- هدف البحث:

يهدف هذا البحث إلى تقديم علاقة نستطيع من خلالها حساب صيغة إيتو التفاضلية لجملة معادلات تفاضلية عشوائية كسرية، وإيجاد صيغة للمؤثر المولّد للعملية العشوائية، وتوظيف هاتين الصيغتين بالإضافة إلى توظيف طريقة ليبانوف المطورة لدراسة استقرار حل الجملة المدروسة.

5- أساسيات

تعريف (1): [3] يعرّف تكامل ريمان- ليوفيل لتابع $f \in L^1([t_0,T],\mathbb{R})$ بالشكل:

$$\mathrm{I}_{0^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} f(\tau)\big(t-\tau\big)^{\alpha-1} d\tau$$

حيث $0<\alpha\le 1 \quad , \quad T\ , t_0\ , t \in \mathbb{R}^+$

خواص تكامل ريمان-ليوفيل: [5]

$$1)\ \mathrm{I}_{0^+}^{0} f(t) = f(t) \qquad ; \qquad \mathrm{I}_{0^+}^{0} = \mathrm{I}$$

$$2)\ \mathrm{I}_{0^+}^{\alpha}\big(\lambda f(t) \pm \beta g(t)\big) = \lambda \mathrm{I}_{0^+}^{\alpha} f(t) \pm \beta \mathrm{I}_{0^+}^{\alpha} g(t) \quad ; \quad \lambda\ , \beta \in \mathbb{R}$$

حيث: $f(t), g(t) \in L^1([t_0,T],\mathbb{R})$ ، $t_0,t,T \in \mathbb{R}^+$ ، $n-1<\alpha<n \ , \ n \in \mathbb{N}$

تعريف (2): [4] من أجل $f(t)\in L^1([0,T],\mathbb{R})$ فإننا نعرف مشتق كابتو للتابع $f(t)$ بالعلاقة:

$$ {}^{c}D_{0^+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau $$

حيث: $0<\alpha\le 1 \quad , \quad T\ ,t\in\mathbb{R}^+$

خواص مشتق كابتو: [5]

1) ${}^{c}D_{0^+}^{\alpha}f(t)=f(t)$

2) ${}^{c}D_{0^+}^{\alpha}\left(\lambda f(t)+\gamma g(t)\right)=\lambda\,{}^{c}D_{0^+}^{\alpha}f(t)+\gamma\,{}^{c}D_{0^+}^{\alpha}g(t) \qquad ; \quad \lambda\ ,\gamma\in\mathbb{R}$

حيث: $f(t),g(t)\in L^1([0,T],\mathbb{R})$ ، $0<\alpha\le 1 \quad , \quad T\ ,t\in\mathbb{R}^+$

ملاحظة (1): [5] يمكن تعريف مشتق كابتو لتابع $f(t)\in L^1([0,T],\mathbb{R})$بالعلاقة:

$$ {}^{c}D_{0^+}^{\alpha}f(t)=\mathrm{I}_{0^+}^{n-\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) \qquad ; n-1<\alpha<n $$

بحالة خاصة من أجل $0<\alpha<1$ نحصل على:

$$ {}^{c}D_{0^+}^{\alpha}f(t)=\mathrm{I}_{0^+}^{1-\alpha}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) $$

ملاحظة (2): [5] إنّ مشتق كابتو لتكامل تابع ما $f(t)$ يعطي التابع نفسه أي أنّ:

$$ {}^{c}D^{\alpha}\mathrm{I}^{\alpha}f(t)=f(t) $$

حيث: $f\in L^1([t_0,T],\mathbb{R})$ ، $t_0,t,T\in\mathbb{R}^+$ ، $n<\alpha<n-1$ ، $n\in\mathbb{N}$.

مبرهنة (1): [5] من أجل $f(t)\in L^1([0,T],\mathbb{R})$ تتحقق العلاقة التالية:

$$ \mathrm{I}_{0^+}^{\alpha}\,{}^{c}D_{0^+}^{\alpha}f(t)=f(t)-\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{t^{\kappa}f^{(\kappa)}(0)}{\Gamma(\kappa+1)} $$

حيث: $t,T\in\mathbb{R}^+$

5- نتائج أساسية:

لتكن لدينا جملة معادلات تفاضلية عشوائية كسرية من الشكل:

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\mathrm{X}(t) = \mathrm{A}\,\mathrm{X}(t) + g\left(t, \mathrm{X}(t)\right)\dfrac{dW(t)}{dt} & ; t > 0 \,,\ \alpha \in (0,1] \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

حيث $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ، $g : [0,+\infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابع قابل للقياس، $\{W(t)\ ; t \in [0,+\infty)\}$ الحركة البراونية السلمية المعيارية على الفضاء الاحتمالي التام $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ مع الترشيح $F = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty[}$

ملاحظة (3): [1]

إن $\chi_L = L^2(\Omega, \mathcal{F}_L, P)$ يمثل فضاء كل التوابع $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ،التي تكون قابلة للقياس على الترشيح $\mathcal{F}_L$ والقابلة للمكاملة بالوسط التربيعي، والتي نظيمها يعطى بالشكل $\|u\|^2 = \mathrm{E}|u|^2$ حيث $t \in [0,+\infty)$.

تعريف ترشيح الجبر التام (3): [2]

ليكن $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضاءً احتمالياً تاماً ولتكن $\{\mathcal{F}_t, \quad t \in \mathbb{R}^+\}$ جماعة من الجبور الجزئية التامة من $\mathcal{F}$ ، بحيث أن $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ و $s \le t$. عندئذٍ نسمي $\{\mathcal{F}_t\}$ جماعة متزايدة من الجبور الجزئية التامة المعرفة على $(\Omega, \mathcal{F})$ أو ترشيح الجبور التامة على $(\Omega, \mathcal{F})$.

تعريف (4): [1] العملية $X: [0,\infty[\longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ تدعى عملية متكيفة مع الجبر التام $\mathcal{F}$ إذا كان $X(t) \in \chi_t$ حيث $t \in [0,+\infty)$

تعريف (5): [1] من أجل كل $X_0 \in \chi_0$ إن العملية X والتي هي متكيفة مع الجبر التام $\mathcal{F}$ تدعى حل لـ (3.1) إذا حققت من أجل كل $t \in [0,+\infty)$ المعادلة التكاملية:

$$(t)=\mathrm{X}(t,\mathrm{X}_0)=\mathrm{X}_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{X}(\tau)\,d\tau+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, g\left(\tau,\mathrm{X}(\tau)\right)dW(\tau)\right) \quad (3.2)$$

تمهيدية (1): [1] بفرض أن الشروط التالية محققة:

1) يوجد ثابت $L>0$ بحيث أنه من أجل جميع $\mathrm{X},\hat{\mathrm{X}}\in\mathbb{R}^n$ ، $t\in[0,+\infty)$

$$\left|g(t,\mathrm{X})-g(t,\hat{\mathrm{X}})\right|\le L\left|\mathrm{X}-\hat{\mathrm{X}}\right|$$

2) التابع $g(.,0)$ محدود بالقيمة العظمى:

$$\left\|g(t,0)\right\|_\infty=\underset{t\in[0,+\infty)}{ess\ \sup}\left|g(t,0)\right|<\infty$$

التابع $g(.,0)$ قابل للمكاملة في L^2 أي $\int_0^\infty \left|g(t,0)\right|^2 dt<\infty$

عندئذٍ الجملة (3.1) تملك حل وحيد $X(t)\in\chi_t=L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ المعطى بالعلاقة (3.2) من أجل كل $\alpha\in(0,1)$.

تعريف (6): [1] الحل الصفري للمعادلة (3.3) يكون مستقر عشوائياً إذا وجد من أجل كل $\varepsilon\in(0,1)$ ، $r>0$ عدد $\delta=\delta(\varepsilon,r,0)>0$ بحيث إن: $\mathrm{P}\left\{\left|\mathrm{X}(t)\right|<r\right\}\ge 1-\varepsilon$; $t\ge 0$ طالما أن $\left|\mathrm{X}_0\right|<\delta$.

تعريف (7): [1] الحل الصفري للمعادلة (3.3) يكون مستقر عشوائياً وبشكل تقاربي إذا كان مستقر عشوائياً ومن أجل كل $\varepsilon\in(0,1)$ يوجد $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)>0$ بحيث إن $\mathrm{P}\left\{\lim_{t\to\infty}\mathrm{X}(t)=0\right\}\ge 1-\varepsilon$ طالما أن $\left|\mathrm{X}_0\right|<\delta_0$.

تعريف (8): [1] يكون الحل الصفري للمعادلة (3.3) مستقر أسياً بشكل شبه أكيد إذا كان $\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left|\mathrm{X}(t)\right|<0$.

تعريف (9): [1] يكون الحل الصفري للمعادلة (3.3) مستقر أسياً بالعزوم من المرتبة p إذا حققت الثوابت الموجبة λ, c العلاقة $\mathrm{E}\left(\left|\mathrm{X}(t)\right|^{p}\right) \le c\left|\mathrm{X}_0\right|^{p} e^{-\lambda t}$ من أجل جميع $\mathrm{X}_0 \in \mathbb{R}, t \ge 0$

تمهيدية (2): [1] ليكن $\mathcal{F}$ جبر تام ولتكن $\mathcal{F} \ni \{A_k\}$ و $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_k) <$ عندئذٍ $\mathrm{P}\left\{\limsup_{k\to\infty} \mathrm{A}_k\right\} = 0$.

صيغة ايتو لمشتق كابتو: [1] لتكن $t \ge 0; W(t)$ حركة براون السلمية المعيارية ولتكن $Y \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ يرمز لأسرة جميع التوابع الحقيقية $Y(\mathrm{Z}(.),.)$ المعرفة على $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ والتي تكون قابلة للمفاضلة مرتين بالنسبة لـ Z وقابلة للمفاضلة مرة واحدة بالنسبة لـ t. ليكن $t \ge 0 ; \mathrm{Z}(t)$ عملية ايتو لـ: $d\mathrm{Z}(t) = \tilde{f}(t)dt + \tilde{g}(t)dW(t)$

حيث $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ، $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

تمهيدية (3): [1] لتكن $Y(\cdot) = Y(\mathrm{Z}(.),.) \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ عندئذٍ عملية ايتو لـ $t \ge 0; Y(t)$ تعطى بالشكل:

$$dY(t) = \left[Y_t(\mathrm{Z}(t),t) + Y_{\mathrm{Z}}(\mathrm{Z}(t),t)\tilde{f}(t) + \frac{1}{2}Y_{\mathrm{ZZ}}(\mathrm{Z}(t),t)\tilde{g}^2(t)\right]dt$$
$$+ Y_{\mathrm{Z}}(\mathrm{Z}(t),t)\tilde{g}(t)dW(t)$$

نتيجة (1): [1] من أجل $T > 0$ وبفرض $\tilde{\mathrm{X}}(t)$ عملية ايتو لـ:

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\tilde{\mathrm{X}}(t) = f(t) + g(t)\dfrac{dW(t)}{dt} \\ \tilde{\mathrm{X}}(0) = \mathrm{X}_0 \end{cases} \qquad (3.3)$$

حيث: $t \in [0,T], \alpha \in (0,1)$ ، $f, g : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابع قابلة للقياس

حسب التمهيدية (1) فإن (3.3) تملك حل وحيد من أجل $t \in [0,T]$

$$\tilde{X}(t)=X_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}g(\tau)dW(\tau)\right) \qquad (3.4)$$

إن (3.4) تملك شكل مكافئ

$$d\tilde{X}(t)=\tilde{X}'(t)=\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-2}f(\tau)d\tau+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-2}g(\tau)dW(\tau)\right)dt \qquad (3.5)$$

حيث $f(\cdot)(t-\cdot)^{\alpha-2}\in L^1[0,T]$ ، $g(\cdot)(t-\cdot)^{\alpha-2}\in L^2[0,T]$.

مبرهنة (2): [1] لتكن $Y(\cdot)=Y(\tilde{X}(.),.)\in C^{2,1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ عندئذٍ عملية ايتو لـ $Y(\cdot)$ تعطى بالشكل

$$dY(\tilde{X}(t),t)=Y_t(\tilde{X}(t),t)dt+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}Y_{\tilde{X}}(\tilde{X}(t),t)\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-2}f(\tau)d\tau dt$$
$$+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}Y_{\tilde{X}}(\tilde{X}(t),t)\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-2}g(\tau)dW(\tau)dt$$

البرهان: حسب التمهيدية (3) والعلاقة (3.5) لدينا:

$$dY(\tilde{X}(t),t)=\frac{\partial Y(\tilde{X}(t),t)}{\partial t}dt+\frac{\partial Y(\tilde{X}(t),t)}{\partial\tilde{X}}d\tilde{X}(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial Y^2(\tilde{X}(t),t)}{\partial\tilde{X}^2}\left(d\tilde{X}(t)\right)^2$$
$$dY(\tilde{X}(t),t)=Y_t(\tilde{X}(t),t)dt+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}Y_{\tilde{X}}(\tilde{X}(t),t)\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-2}f(\tau)d\tau dt$$
$$+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}Y_{\tilde{X}}(\tilde{X}(t),t)\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-2}g(\tau)dW(\tau)dt$$

نتيجة (2): من أجل $T>0$ وبفرض $\widehat{X}(t)$ عملية ايتو لـ:

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\widehat{\mathrm{X}}(t)=\mathrm{A}\widehat{\mathrm{X}}(t)+g(t)\dfrac{dW(t)}{dt} \\ \widehat{\mathrm{X}}(0)=\mathrm{X}_0 \end{cases} \qquad (3.6)$$

حيث: $t\in[0,T], \alpha\in(0,1)$.

حسب التمهيدية (1) فإن (3.6) تملك حل وحيد من أجل $t\in[0,T]$

$$\widehat{\mathrm{X}}(t)=\mathrm{X}_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{A}\widehat{\mathrm{X}}(\tau)d\tau+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}g(\tau)dW(\tau)\right) \qquad (3.7)$$

إن (3.7) تملك شكل مكافئ

$$d\widehat{\mathrm{X}}(t)=\widehat{\mathrm{X}}'(t)=\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\mathrm{A}\widehat{\mathrm{X}}(\tau)d\tau+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}g(\tau)dW(\tau)\right)dt \qquad (3.8)$$

حيث $g(\cdot)(t-\cdot)^{\alpha-2}\in L^2[0,T]$.

مبرهنة (3): لتكن $Y(\cdot)=Y\left(\widehat{\mathrm{X}}(.),.\right)\in C^{2,1}\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n\right)$ عندئذٍ عملية ايتو لـ $Y(\cdot)$ تعطى بالشكل

$$dY\left(\widehat{\mathrm{X}}(t),t\right)=Y_t\left(\widehat{\mathrm{X}}(t),t\right)dt+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}Y_{\widehat{\mathrm{X}}}\left(\widehat{\mathrm{X}}(t),t\right)\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\mathrm{A}\widehat{\mathrm{X}}(\tau)d\tau dt$$
$$+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}Y_{\widehat{\mathrm{X}}}\left(\widehat{\mathrm{X}}(t),t\right)\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}g(\tau)dW(\tau)dt$$

البرهان: حسب التمهيدية (3) والعلاقة (3.8) لدينا:

$$dY\left(\hat{X}(t),t\right)=\frac{\partial Y\left(\hat{X}(t),t\right)}{\partial t}dt+\frac{\partial Y\left(\hat{X}(t),t\right)}{\partial \hat{X}}d\hat{X}(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial Y^{2}\left(\hat{X}(t),t\right)}{\partial \hat{X}^{2}}\left(d\hat{X}(t)\right)^{2}$$

$$dY\left(\hat{X}(t),t\right)=Y_{t}\left(\hat{X}(t),t\right)dt+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}Y_{\hat{X}}\left(\hat{X}(t),t\right)\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-2}A\hat{X}(\tau)d\tau dt$$

$$+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}Y_{\hat{X}}\left(\hat{X}(t),t\right)\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-2}g(\tau)dW(\tau)dt$$

ملاحظة (4): [1] ليكن $\kappa>0$ ، $S_{\kappa}=\left\{X(\cdot)\quad ;\left|X(\cdot)\right|<\kappa\right\}$ ، $a\wedge b$ يرمز لأصغر العددين a,b ، $a\vee b$ يرمز لأكبر العددين a,b ، $I_{\{\cdot\}}$ تابع المؤشر.

مبرهنة (4): بفرض أن الشروط الآتية محققة:

1) يوجد ثابت $L>0$ بحيث إنه من أجل جميع $X,\hat{X}\in\mathbb{R}^{n}$ ، $t\in[0,+\infty)$

$$\left|g(t,X)-g\left(t,\hat{X}\right)\right|\le L\left|X-\hat{X}\right|$$

2) التابع $g(.,0)$ محدود بالقيمة العظمى:

$$\left\|g(t,0)\right\|_{\infty}=\underset{t\in[0,+\infty)}{ess\sup}\left|g(t,0)\right|<\infty$$

التابع $g(.,0)$ قابل للمكاملة في L^{2} أي $\int_{0}^{\infty}\left|g(t,0)\right|^{2}dt<\infty$

3) يوجد تابع موجب تحديداً $V\in\left(S_{\kappa}\times[0,+\infty),\mathbb{R}^{+}\right)$ بحيث إنه من أجل جميع $\alpha\in(0,1)$ ، $\left(X(t),t\right)\in\left(S_{\kappa}\times[0,+\infty)\right)$ ، فإن المؤثر المولّد للعملية العشوائية $\left(X(t),t\right)$ يعطى بالشكل:

$$L^{\alpha}V\left(X(t),t\right)=V_{t}\left(X(t),t\right)+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}V_{X}\left(X(t),t\right)\int_{0}^{t}AX(\tau)(t-\tau)^{\alpha-2}d\tau\le 0 \qquad (3.9)$$

كما أن $V\left(0,t\right)=0$، يوجد تابع غير متناقص μ يحقق: $V\left(\mathrm{X}(t),t\right)\geq\mu\left(\left|\mathrm{X}(t)\right|\right)$ من أجل جميع $\left(\mathrm{X}(t),t\right)\in\left(S_{\kappa}\times[0,+\infty)\right)$.

عندئذٍ يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر عشوائياً.

البرهان: ليكن $\varepsilon\in(0,1)$ ، $r>0$ اختياري وبفرض أن $r<\kappa$. كون V مستمر و $V\left(0,t\right)=0$ نستطيع إيجاد $\delta=\delta(\varepsilon,r)>0$ يحقق:

$$\frac{1}{\varepsilon}\sup_{\mathrm{X}\in S_{\delta}}V\left(\mathrm{X}(t),t\right)\leq\mu(r) \tag{3.10}$$

واضح أن $\delta<r$. بتثبيت $\mathrm{X}_0\in S_{\delta}$، η وقت الخروج الأول لـ $\mathrm{X}(t)$ من S_r، أي

$$\eta=\inf\left\{t>0\qquad;\mathrm{X}(t)\notin S_r\right\}$$

حسب المبرهنة (3) من أجل أي $t>0$ لدينا صيغة إيتو التفاضلية لتابع ليبانوف:

$$dV\left(\mathrm{X}(\eta\wedge t),\eta\wedge t\right)=V_t\left(\mathrm{X}(t),t\right)+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}V_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{X}(t),t\right)\int_0^t \mathrm{A}\,\mathrm{X}(\tau)(t-\tau)^{\alpha-2}\,d\tau dt$$
$$+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}V_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{X}(t),t\right)\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}\,g\left(\mathrm{X}(\tau),\tau\right)dW(\tau)dt$$

بمكاملة طرفي العلاقة السابقة نحصل على:

$$V\left(\mathrm{X}(\eta\wedge t),\eta\wedge t\right)=V\left(\mathrm{X}_0,0\right)+\int_0^{\eta\wedge t}V_s\left(\mathrm{X}(s),s\right)ds$$
$$+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\eta\wedge t}V_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{X}(s),s\right)\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2}\,\mathrm{A}\,\mathrm{X}(\tau)\,d\tau ds$$
$$+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\eta\wedge t}V_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{X}(s),s\right)\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2}\,g\left(\mathrm{X}(\tau),\tau\right)dW(\tau)ds$$

$$
\begin{aligned}
V\left(\mathrm{X}(\eta\wedge t),\eta\wedge t\right) &= V\left(\mathrm{X}_0,0\right)+\int_0^{\eta\wedge t} L^{\alpha}V\left(\mathrm{X}(\tau),\tau\right)d\tau \\
&+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\eta\wedge t} V_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{X}(s),s\right)\int_0^{s}(s-\tau)^{\alpha-2}g\left(\mathrm{X}(\tau),\tau\right)dW(\tau)ds
\end{aligned}
\qquad (3.11)
$$

بأخذ التوقع لطرفي (3.11) مع ملاحظة أن $L^{\alpha}V\le 0$ من أجل أي $t>0$ و $\alpha\in(0,1)$ لدينا

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\left|\mathrm{E}\left(\int_0^{\eta\wedge t} V_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{X}(s),s\right)\int_0^{s}(s-\tau)^{\alpha-2}g\left(\mathrm{X}(\tau),\tau\right)dW(\tau)ds\right)\right| \\
&\le \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{E}\left|\int_0^{\eta\wedge t} V_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{X}(s),s\right)\left(\int_0^{s}(s-\tau)^{\alpha-2}g\left(\mathrm{X}(\tau),\tau\right)dW(\tau)\right)ds\right| \\
&\le 0
\end{aligned}
$$

لدينا:

$$
EV\left(\mathrm{X}(\eta\wedge t),\eta\wedge t\right)\le V\left(\mathrm{X}_0,0\right) \qquad (3.12)
$$

نلاحظ بأن:

$$
\left|\mathrm{X}(\eta\wedge t)\right|=\left|\mathrm{X}(\eta)\right|=r \quad ;\eta\le t
$$

حسب الشرط (3) من نص المبرهنة لدينا:

$$
EV\left(\mathrm{X}(\eta\wedge t),\eta\wedge t\right)\ge E\left[\mathrm{I}_{\{\eta\le t\}}V\left(\mathrm{X}(\eta),\eta\right)\right]\ge\mu(r)\mathrm{P}\{\eta\le t\}
$$

حسب (3.10) و (3.12) نحصل على أن $\mathrm{P}\{\eta\le t\}\le\varepsilon$ بجعل $t\to\infty$ نجد $\mathrm{P}\{\eta\le\infty\}\le\varepsilon$. بالتالي $\mathrm{P}\{\left|\mathrm{X}(t)\right|\le r\}\ge 1-\varepsilon$ من أجل جميع $t\ge 0$. حسب التعريف (6) يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر عشوائياً.

مثال (1): ليكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية العشوائية كسرية:

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha} X(t) = \mathrm{A}X(t) + g(\mathrm{X},t)\dfrac{dW(t)}{dt} \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$$

حيث: $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $g(\mathrm{X},t) = \left(b\sin X(t) \quad 0\right)^T$, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

والمطلوب ادرس استقرار حل الجملة المعطاة.

الحل: باختيار تابع ليبانوف بالصورة: $V(X,t) = \mathrm{X}^2(t)$ لدينا $V(X,t) \geq 0$

كما أنّ:

$$L^{\alpha}V(X(t),t) = V_t(X(t),t) + \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} V_{\mathrm{X}}(X(t),t)\int_0^t \mathrm{A}\,\mathrm{X}(\tau)(t-\tau)^{\alpha-2}\,d\tau$$

$$L^{\alpha}V(X(t),t) = \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{2}\mathrm{X}^2\right)\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\,d\tau = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\mathrm{X}^2\right)\left(\left[t-\tau\right]_0^t\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$L^{\alpha}V(X(t),t) = -\frac{1}{2}\mathrm{X}^2\,\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \leq 0$$

حسب المبرهنة (4) حل الجملة المعطاة مستقر عشوائياً.

مبرهنة (5): بفرض أن الشروط الآتية محققة:

1) يوجد ثابت $L > 0$ بحيث إنه من أجل جميع $\mathrm{X}, \hat{\mathrm{X}} \in \mathbb{R}^n$ ، $t \in [0,+\infty)$

$$\left|g(t,\mathrm{X}) - g(t,\hat{\mathrm{X}})\right| \leq L\left|\mathrm{X} - \hat{\mathrm{X}}\right|$$

2) التابع $g(.,0)$ محدود بالقيمة العظمى:

$$\left\|g(t,0)\right\|_{\infty} = \underset{t\in[0,+\infty)}{ess\ \sup}\left|g(t,0)\right| < \infty$$

التابع $g(.,0)$ قابل للمكاملة في L^2 أي $\int_0^\infty |g(t,0)|^2\,dt < \infty$

3) التابع المتناقص الموجب تحديداً $V \in (\mathbb{R}^n \times [0,+\infty), \mathbb{R}^+)$ يحقق $L^\alpha V < 0$ حيث $L^\alpha V$ معرف في (3.9)، $\alpha \in (0,1)$، $V(0,t)=0$، يوجد توابع غير متناقصة مستمرة μ_1, μ_2, μ_3 تحقق أن:

$$\mu_1(|X(t)|) \le V(X(t),t) \le \mu_2(|X(t)|)$$

$$L^\alpha V(X(t),t) \le -\mu_3(|X(t)|)$$

من أجل جميع $(X(t),t) \in (S_\kappa \times [0,+\infty))$.

عندئذٍ الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر عشوائياً بشكل تقاربي.

البرهان: حسب المبرهنة (4) لدينا الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر عشوائياً. لنثبت الآن أنه من أجل $\varepsilon \in (0,1)$، يوجد $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ بحيث إن $P\{\lim_{t\to\infty} X(t) = 0\} \ge 1-\varepsilon$ طالما أن $|X_0| < \delta_0$.

لدينا التابع $V(X,t)$ يحقق $V(0,t)=0$. كما أن توجد توابع $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in K$ تحقق أن:

$$\mu_1(|X(t)|) \le V(X(t),t) \le \mu_2(|X(t)|) \;\&\; L^\alpha V(X(t),t) \le -\mu_3(|X(t)|) \quad (3.13)$$

من أجل جميع $(X(t),t) \in (S_\kappa \times [0,+\infty))$. كون $\varepsilon \in (0,1)$ اختياري حسب المبرهنة (4) يوجد $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ يحقق أن:

$$P\left\{|X(t)| < \frac{h}{2}\right\} \ge 1 - \frac{\varepsilon}{4} \quad (3.14)$$

طالما $X_0 \in S_{\delta_0}$ بجعل $0 < \beta < |X_0|$ وباختيار $0 < \alpha < \beta$ صغير كفاية بحيث:

$$\frac{\mu_2(\alpha)}{\mu_1(\beta)} \le \frac{\varepsilon}{4} \qquad (3.15)$$

بتعريف زمن التوقف:

$$\tau_\alpha = \inf\left\{t \ge t_0 \ : |X(t)| \le \alpha\right\}$$
$$\&$$
$$\tau_\kappa = \inf\left\{t \ge t_0 \ : |X(t)| \ge \frac{\kappa}{2}\right\}$$

حسب صيغة إيتو التفاضلية والعلاقة (3.13)، نحصل على أنه من أجل $t \ge t_0$:

$$\begin{aligned}
0 &\le EV\left(X(\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa \wedge t), \tau_\alpha \wedge \tau_\kappa \wedge t\right)\\
&= V(X_0, 0) + E\int_0^{\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa \wedge t} L^\alpha V\left(X(\tau), \tau\right) ds\\
&\le V(X_0, 0) - \mu_3(\alpha) E\left(\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa \wedge t\right)
\end{aligned}$$

وبالتالي:

$$t\mathrm{P}\{\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa \wedge t\} \le E\left(\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa \wedge t\right) \le \frac{V(X_0, 0)}{\mu_3(\alpha)}$$

وهذا يقتضي مباشرة أن: $\mathrm{P}\{\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa < \infty\} = 1$

لكن حسب (3.14) لدينا $\mathrm{P}\{\tau_\kappa < \infty\} \le \frac{\varepsilon}{4}$. من هنا:

$$1 = \mathrm{P}\{\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa < \infty\} \le \mathrm{P}\{\tau_\alpha < \infty\} + \mathrm{P}\{\tau_\kappa < \infty\} \le \mathrm{P}\{\tau_\alpha < \infty\} + \frac{\varepsilon}{4}$$

مما ينتج:

$$\mathrm{P}\{\tau_\alpha < \infty\} \ge 1 - \frac{\varepsilon}{4} \qquad (3.16)$$

باختيار θ كبير كفاية بحيث:

$$\mathrm{P}\{\tau_\alpha < \theta\} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

من هنا:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{\tau_\alpha \wedge \tau_\kappa < \theta\} &\geq \left(\mathrm{P}\{\tau_\alpha < \theta\} \cap \mathrm{P}\{\tau_\kappa < \theta\}\right) \\ &\geq \mathrm{P}\{\tau_\alpha < \theta\} - \mathrm{P}\{\tau_\kappa < \theta\} \geq 1 - \frac{3\varepsilon}{4} \end{aligned} \tag{3.17}$$

لنعرف الآن زمني توقف:

$$\sigma = \begin{cases} \tau_\alpha & ; \ \tau_\alpha < \tau_\kappa \cap \theta \\ \infty & ; \ \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$\& \ \tau_\beta = \inf \ \{t > \sigma : |\mathrm{X}(t)| \geq \beta\}$$

باستخدام صيغة إيتو ومن أجل أي $t \geq \theta$:

$$EV\left(\mathrm{X}(\tau_\beta \wedge t), \tau_\beta \wedge t\right) \leq EV\left(\mathrm{X}(\sigma \wedge t), \sigma \wedge t\right)$$

لاحظ بأن: $EV\left(\mathrm{X}(\tau_\beta \wedge t), \tau_\beta \wedge t\right) = EV\left(\mathrm{X}(\sigma \wedge t), \sigma \wedge t\right) = V\left(\mathrm{X}(t), t\right)$ من أجل $\omega \in \{\tau_\alpha \geq \tau_\kappa \wedge \theta\}$

نحصل على:

$$E\left[\mathrm{I}_{\{\tau_\alpha < \tau_\kappa \wedge \theta\}} V\left(\mathrm{X}(\tau_\beta \wedge t), \tau_\beta \wedge t\right)\right] \leq E\left[\mathrm{I}_{\{\tau_\alpha < \tau_\kappa \wedge \theta\}} V\left(\mathrm{X}(\tau_\alpha), \tau_\alpha\right)\right]$$

باستخدام (3.14) وحقيقة كون: $\{\tau_\beta \leq t\} \subset \{\tau_\alpha < \tau_\kappa \wedge \theta\}$، نحصل على:

$$\mu_1(\beta)\mathrm{P}\{\tau_\beta \leq t\} \leq \mu_2(\alpha)$$

ومن (3.15)، ينتج:

$$\mathrm{P}\{\tau_\beta \leq t\} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

بجعل $t \to \infty$ نجد:

$$P\left\{\tau_\beta \le \infty\right\} \le \frac{\varepsilon}{4}$$

باستخدام (3.17)، ينتج أنّ:

$$P\left\{\sigma < \infty \,\&\, \tau_\beta = \infty\right\} \ge P\left\{\tau_\alpha < \tau_\kappa \wedge \theta\right\} - P\left\{\tau_\beta < \infty\right\} \ge 1-\varepsilon$$

لكن هذا يعني أن:

$$P\left\{\omega : \limsup_{t\to\infty}\left|X(t)\right| \le \beta\right\} \ge 1-\varepsilon$$

بما أن β اختياري، بالتالي يجب أن يكون:

$$P\left\{\omega : \limsup_{t\to\infty}\left|X(t)\right| = 0\right\} \ge 1-\varepsilon$$

إذاً الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر عشوائياً بشكل تقاربي.

مثال (2): ليكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية العشوائية كسرية:

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}X(t) = AX(t) + g(X,t)\dfrac{dW(t)}{dt} \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

حيث: $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}$, $g(X,t) = \begin{pmatrix} X_1(t) & X_2(t) \end{pmatrix}^T$, $\alpha = \frac{1}{4}$ ،

$$dW(t) = \begin{pmatrix} dW(t_1) & 0 \\ 0 & dW(t_2) \end{pmatrix}$$

والمطلوب ادرس استقرار حل الجملة المعطاة.

الحل: باختيار تابع ليبانوف بالشكل: $V(X,t) = X_1^2(t) + X_2^2(t)$ وهو موجب تحديداً.

كما أنّ: $\mu_1(|X|) \le V(X,t) \le \mu_2(|X|)$ ، لدينا:

$$L^{\alpha}V\left(X(t),t\right) = V_t\left(X(t),t\right) + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} V_X\left(X(t),t\right)\int_0^t A\,X(\tau)(t-\tau)^{\alpha-2}\,d\tau$$

$$L^{\alpha}V\left(X(t),t\right) = \frac{-\frac{3}{4}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{1}{3}X_1(t)X_2(t) + \frac{3}{4}X_1(t)X_2(t)\right)\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{7}{4}}\,d\tau$$

$$L^{\alpha}V\left(X(t),t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)X_1(t)X_2(t)\left(-t^{-\frac{3}{4}}\right)$$

$$L^{\alpha}V\left(X(t),t\right) \le \frac{13}{12}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\left[X_1^2(t)+X_2^2(t)\right]\left[-t^{-\frac{3}{4}}\right]$$

$$L^{\alpha}V\left(X(t),t\right) \le -\frac{13}{12}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\left[X_1^2(t)+X_2^2(t)\right]\left[t^{-\frac{3}{4}}\right] < -\mu_3(|X|)$$

حسب المبرهنة (5) حل الجملة المعطاة مستقر عشوائياً وبشكل تقاربي.

مبرهنة (6): بفرض أن الشروط الآتية محققة:

1) يوجد ثابت $L>0$ بحيث إنه من أجل جميع $X,\hat{X} \in \mathbb{R}^n$ ، $t \in [0,+\infty)$

$$\left|g(t,X) - g(t,\hat{X})\right| \le L\left|X-\hat{X}\right|$$

2) التابع $g(.,0)$ محدود بالقيمة العظمى:

$$\|g(t,0)\|_{\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,+\infty)} |g(t,0)| < \infty$$

التابع $g(.,0)$ قابل للمكاملة في L^2 أي $\int_0^{\infty} |g(t,0)|^2\,dt < \infty$

3) التابع $V \in \left(\mathbb{R}\times[0,+\infty),\mathbb{R}^+\right)$، يوجد ثوابت $c_1>1$,$c_2 \in \mathbb{R}$,$c_3 \ge 0$ تحقق:

$(i)\, c_1 \left|X(t)\right| \le V\left(X(t),t\right)$

$(ii)\, L^{\alpha} V\left(X(t),t\right) \le c_2 V\left(X(t),t\right)$

$(iii)\, \left|V_X\left(X(t),t\right)\right|^2 \int_0^t \left|g\left(X(t),t\right)(s-\tau)^{\alpha-2}\right| d\tau \ge c_3 V^2\left(X(t),t\right)$

من أجل جميع $X(t)\neq 0$ ، $\alpha\in(0,1)$ ، $t\ge 0$.

عندئذٍ تتحقق العلاقة الآتية:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left|X(t)\right| \le -\frac{1}{\ln c_1}\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}(c_2+c_3) \qquad (3.18)$$

بشكل خاص من أجل $c_2+c_3>0$، الحل الصفري لـ (3.1) يكون مستقر أسياً بشكل شبه أكيد.

البرهان: بتثبيت أي $X_0\neq 0$ من المبرهنة (3) والفرضيات (ii)، (iii) من الشرط (3)، ومن أجل $\alpha\in(0,1)$ لدينا

$$\ln V\left(\mathrm{X}(t),t\right)=\ln V\left(\mathrm{X}_0,0\right)+\int_0^t \frac{V_s\left(\mathrm{X}(s),s\right)}{V\left(\mathrm{X}(s),s\right)}ds$$

$$+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{V_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{X}(s),s\right)\int_0^s \mathrm{A}\,\mathrm{X}(\tau)(s-\tau)^{\alpha-2}d\tau}{V\left(\mathrm{X}(s),s\right)}ds$$

$$+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{V_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{X}(s),s\right)\int_0^s g\left(\mathrm{X}(\tau),\tau\right)(s-\tau)^{\alpha-2}dW(\tau)}{V\left(\mathrm{X}(s),s\right)}ds$$

$$\ln V\left(\mathrm{X}(t),t\right)\le \ln V\left(\mathrm{X}_0,0\right)+\int_0^t \frac{L^{\alpha}V\left(\mathrm{X}(s),s\right)}{V\left(\mathrm{X}(s),s\right)}ds$$

$$+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{V_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{X}(s),s\right)\int_0^s g\left(\mathrm{X}(\tau),\tau\right)(s-\tau)^{\alpha-2}dW(\tau)}{V\left(\mathrm{X}(s),s\right)}ds$$

بوضع:

$$M(t)=\int_0^t \frac{V_{\mathrm{X}}\left(\mathrm{X}(s),s\right)\int_0^s g\left(\mathrm{X}(\tau),\tau\right)(s-\tau)^{\alpha-2}dW(\tau)}{V\left(\mathrm{X}(s),s\right)}ds$$

عندئذٍ بجعل $n=1,2,\ldots$ ومن أجل $\varepsilon\in(0,1)$ اختياري حسب الفرضية (iii) من الشرط (3) نحصل على:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le n}\left|M(t)+\varepsilon\int_0^t \frac{V_{\mathrm{X}}^2\left(\mathrm{X}(s),s\right)\int_0^s \left|g\left(\mathrm{X}(\tau),\tau\right)(s-\tau)^{\alpha-2}\right|^2 d\tau}{V^2\left(\mathrm{X}(s),s\right)}ds\right|\ge c_3 t\right\}\le\varepsilon$$

حسب التمهيدية (2)

$$M(t) \le c_3 t - \varepsilon \int_0^t \frac{V_X^2\left(X(s),s\right)\int_0^s \left|g\left(X(\tau),\tau\right)(s-\tau)^{\alpha-2}\right|^2 d\tau}{V^2\left(X(s),s\right)} ds$$

$$M(t) \le (1-\varepsilon) c_3 t$$

حسب الفرضية (iii) من الشرط (3) والعلاقة (3.19) يكون لدينا:

$$\ln V\left(X(t),t\right) \le \ln V\left(X_0,0\right) - \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[c_2 + (1-\varepsilon)c_3\right]t$$

عندئذٍ نحصل:

$$\frac{1}{t}\ln V\left(X(t),t\right) \le -\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[c_2 + (1-\varepsilon)c_3\right] + \frac{\ln V\left(X_0,0\right)}{t}$$

هكذا

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln V\left(X(t),t\right) \le -\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[c_2 + (1-\varepsilon)c_3\right]$$

باستخدام الفرضية (i) من الشرط (3)

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln c_1\left|X(t)\right| \le \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln V\left(X(t),t\right) \le -\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[c_2 + (1-\varepsilon)c_3\right]$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln c_1\left|X(t)\right| \le -\frac{1}{\ln c_1}\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[c_2 + (1-\varepsilon)c_3\right]$$

كون ε اختياري، نحصل على (3.18)

ومن أجل $c_1 > 1$ عندئذٍ إذا كان $c_2 + c_3 > 0$ يكون لدينا $-\frac{1}{\ln c_1}\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(c_2 + c_3\right) < 0$

حسب التعريف (8) يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر أسياً بشكل شبه أكيد.

مثال (3): ليكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية العشوائية كسرية:

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}X(t) = \mathrm{A}X(t) + g(\mathrm{X},t)\dfrac{dW(t)}{dt} \\ \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0 \end{cases}$$

حيث: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $g(\mathrm{X},t) = \left(2\sin X_1(t) \quad 2\sin X_1(t)\right)^T \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = \frac{1}{5}$

والمطلوب ادرس استقرار حل الجملة المعطاة.

الحل: لنختار تابع ليبانوف بالشكل: $V(X,t) = e^{-\lambda}\mathrm{X}_1^2(t) + e^{-\lambda}\mathrm{X}_2^2(t) \quad ; \lambda \in \mathbb{R}^+$

إن: $V(0,t) = 0$ كما أن: $V(X,t) \le c_1\left|\mathrm{X}(t)\right| \quad ; c_1 > 1$، لدينا:

$$L^{\alpha}V(X(t),t) = V_t(X(t),t) + \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}V_{\mathrm{X}}(X(t),t)\int_0^t \mathrm{A}\,\mathrm{X}(\tau)(t-\tau)^{\alpha-2}\,d\tau$$

$$L^{\alpha}V(X(t),t) = \frac{-\frac{4}{5}}{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}e^{-\lambda}2\left(\frac{1}{2}\mathrm{X}_1^2(t) + \frac{1}{2}\mathrm{X}_2^2(t)\right)\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{9}{5}}\,d\tau$$

$$L^{\alpha}V(X(t),t) = \frac{e^{-\lambda}}{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}\left(\mathrm{X}_1^2(t) + \mathrm{X}_2^2(t)\right)\left(-t^{-\frac{4}{5}}\right) \le c_2V(X(t),t) \quad ; c_2 \in \mathbb{R}$$

كما أن:

$$\int_0^t \left|g(\mathrm{X}(\tau),\tau)(t-\tau)^{\alpha-2}\right|d\tau = \int_0^t \left|g(\mathrm{X}(\tau),\tau)\right|(t-\tau)^{-\frac{9}{5}}\,d\tau = \sqrt{8}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{9}{5}}\,d\tau$$

$$\int_0^t \left|g(\mathrm{X}(\tau),\tau)(t-\tau)^{\alpha-2}\right|^2 d\tau = 8\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{18}{5}}\,d\tau = \frac{8}{-\frac{13}{5}}\left(-t^{-\frac{13}{5}}\right) = -\frac{40}{5}\left(-t^{-\frac{13}{5}}\right)$$

$$\Rightarrow \left|V_{X}\left(X(t),t\right)\right|^{2}\int_{0}^{t}\left|g\left(X(\tau),\tau\right)(t-\tau)^{\alpha-2}\right|^{2}d\tau \geq c_{3}V\left(X(t),t\right) \quad ; c_{3}\geq 0$$

حسب المبرهنة (6) حل الجملة المعطاة مستقر أسياً بشكل شبه أكيد.

ملاحظة (5): بفرض أن الشروط الآتية محققة:

1) يوجد ثابت $L>0$ بحيث إنه من أجل جميع $X,\hat{X}\in\mathbb{R}^{n}$، $t\in[0,+\infty)$

$$\left|g(t,X)-g\left(t,\hat{X}\right)\right|\leq L\left|X-\hat{X}\right|$$

2) التابع $g(.,0)$ محدود بالقيمة العظمى:

$$\left\|g(t,0)\right\|_{\infty}=\underset{t\in[0,+\infty)}{ess\sup}\left|g(t,0)\right|<\infty$$

التابع $g(.,0)$ قابل للمكاملة في L^{2} أي $\int_{0}^{\infty}\left|g(t,0)\right|^{2}dt<\infty$

3) التابع $V\in C^{2,1}\left(\mathbb{R}\times[0,+\infty),\mathbb{R}^{+}\right)$، يوجد ثوابت $c_{1}>1$, $c_{2}\in\mathbb{R}$, $c_{3}\geq 0$ تحقق:

$$(i)\ c_{1}\left|X(t)\right|\geq V\left(X(t),t\right)>0$$
$$(ii)\ L^{\alpha}V\left(X(t),t\right)\geq c_{2}V\left(X(t),t\right)$$
$$(iii)\ \left|V_{X}\left(X(t),t\right)\right|^{2}\int_{0}^{t}\left|g\left(X(t),t\right)(s-\tau)^{p-1}\right|^{2}d\tau\leq c_{3}V^{2}\left(X(t),t\right)$$

من أجل جميع $X(t)\neq 0$، $\alpha\in(0,1)$، $t\geq 0$.

عندئذٍ تتحقق لدينا العلاقة التالية:

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left|X(t)\right|\geq-\frac{1}{\ln c_{1}}\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(c_{2}+c_{3}\right) \qquad (3.20)$$

إذا كان $c_2+c_3<0$ عندئذٍ $0<\left(c_2+c_3\right)\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\ln c_1}-$ وبالتالي $\lim_{t\to\infty}\mathrm{X}(t)=\infty$، أي أن الحل الصفري للجملة (3.1) يكون غير مستقر أسياً بشكل شبه أكيد.

مبرهنة (7): بفرض أن الشروط الآتية محققة:

1) يوجد ثابت $L>0$ بحيث إنه من أجل جميع $\mathrm{X},\hat{\mathrm{X}}\in\mathbb{R}^n$، $t\in[0,+\infty)$

$$\left|g\left(t,\mathrm{X}\right)-g\left(t,\hat{\mathrm{X}}\right)\right|\le L\left|\mathrm{X}-\hat{\mathrm{X}}\right|$$

2) التابع $g\left(.,0\right)$ محدود بالقيمة العظمى:

$$\left\|g\left(t,0\right)\right\|_\infty=\underset{t\in[0,+\infty)}{ess\ \sup}\left|g\left(t,0\right)\right|<\infty$$

التابع $g\left(.,0\right)$ قابل للمكاملة في L^2 أي $\int_0^\infty\left|g\left(t,0\right)\right|^2dt<\infty$

3) المتراجحة الآتية محققة:

$$\int_0^t\left\|\mathrm{A}\right\|\left(t-\tau\right)^{\alpha-2}d\tau\le\kappa$$

عندئذٍ يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر أسياً بالعزوم من المرتبة p (أيضاً يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر أسياً بشكل شبه أكيد)

البرهان: لتكن $n=1,2,...$ حسب المبرهنة (3) من أجل أي $n-1\le t\le n$ لدينا:

$$\left|\mathrm{X}(t)\right|^p=\left|\mathrm{X}_0\right|^p+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t p\left|\mathrm{X}(s)\right|^{p-1}\int_0^s\mathrm{AX}(\tau)(s-\tau)^{\alpha-2}d\tau ds$$

$$+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t p\left|\mathrm{X}(s)\right|^{p-1}\int_0^s g\left(\mathrm{X}(\tau),\tau\right)(s-\tau)^{\alpha-2}dW\left(\tau\right)ds$$

$$\le\left|\mathrm{X}_0\right|^p+p\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left|\mathrm{X}(s)\right|^p ds\int_0^s\mathrm{A}\left(s-\tau\right)^{\alpha-2}d\tau$$

$$+\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t p\left|\mathrm{X}(s)\right|^{p-1}\int_0^s g\left(\mathrm{X}(\tau),\tau\right)(s-\tau)^{\alpha-2}dW\left(\tau\right)ds$$

بما أن $\alpha\in(0,1)$ بأخذ القيمة المطلقة:

$$\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\left|E\left(\int_0^t p\left|X(s)\right|^{p-1}\int_0^s g\left(X(\tau),\tau\right)(s-\tau)^{\alpha-2}dW(\tau)ds\right)\right|$$

$$\leq\frac{p(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)}E\left|\int_0^t\left|X(s)\right|^{p-1}\left(\int_0^s g\left(X(\tau),\tau\right)(s-\tau)^{\alpha-2}dW(\tau)\right)ds\right|\leq 0$$

وبأخذ نظيم المصفوفة A نجد حسب الشرط (3) من نص المبرهنة:

$$\int_0^s\|A\|(s-\tau)^{\alpha-2}d\tau\leq\kappa$$

وبالتالي:

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq n}\left|X(t)\right|^p\right)\leq\left|X_0\right|^p+p\kappa\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t E\left(\sup_{0\leq t\leq n}\left|X(s)\right|^p\right)ds$$

حسب متراجحة جرونول

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq n}\left|X(t)\right|^p\right)\leq\left|X_0\right|^p e^{-\lambda t}\qquad;\ \lambda=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}p\kappa(1-\alpha)>0$$

حسب التعريف (9) يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر أسياً بالعزوم من المرتبة p .

الآن من أجل $\varepsilon\in(0,1)$ اختياري يكون:

$$P\left\{\sup_{0\leq t\leq n}\left|X(t)\right|^p\geq e^{-(\lambda-\varepsilon)t}\right\}\leq e^{(\lambda-\varepsilon)t}E\left(\sup_{0\leq t\leq n}\left|X(t)\right|^p\right)$$
$$\leq\left|X_0\right|^p e^{-\varepsilon t}$$

حسب التمهيدية (2) يكون:

$$\sup_{0\leq t\leq n}\left|X(t)\right|^p\leq e^{-(\lambda-\varepsilon)t}$$

من أجل جميع $\omega\in\Omega$ ، $n-1\leq t\leq n$

$$\frac{1}{t}\ln\left|X(t)\right|\leq\frac{1}{pt}\ln\left|X(t)\right|^p\leq-\frac{1}{pt}(\lambda-\varepsilon)t\leq-\frac{(\lambda-\varepsilon)}{pn}t$$

هنا:

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\ln\left|X(t)\right|\leq-\frac{\lambda-\varepsilon}{p}$$

بما أن $\varepsilon>0$ اختياري نحصل

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left|X(t)\right|\le-\frac{\lambda}{p}$$

حسب التعريف (8) يكون الحل الصفري للجملة (3.1) مستقر أسياً بشكل شبه أكيد.

مثال (4): ليكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية العشوائية كسرية:

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}X(t)=\mathrm{A}X(t)+g(\mathrm{X},t)\dfrac{dW(t)}{dt} \\ \mathrm{X}(0)=\mathrm{X}_0 \end{cases}$$

حيث: $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, $g(\mathrm{X},t)=\begin{pmatrix}0 & \sin X_1(t)\end{pmatrix}^T\in\mathbb{R}^2$, $\alpha=\frac{1}{2}$

والمطلوب ادرس استقرار حل الجملة المعطاة.

الحل: لدينا:

$$\|\mathrm{A}\|=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{2}{32}}=\frac{1}{4}$$

كما أن:

$$\int_0^t\|\mathrm{A}\|(t-\tau)^{\alpha-2}d\tau=\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-t^{-\frac{5}{4}}\right)=\frac{3}{20}\left(t^{-\frac{5}{4}}\right)$$

حسب المبرهنة (7) حل الجملة المعطاة مستقر أسياً بالعزوم من المرتبة p.

التوصيات والمقترحات:

1) دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية ذات أمثال عشوائية.

2) دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية عشوائية باستخدام مشتق كابتو الكسري وباستخدام مشتق ريمان–ليوفيل والمقارنة بين النتائج التي يتم الحصول عليها.

3) دراسة استخدام تحويل لابلاس العشوائي لإيجاد حل معادلة تفاضلية عشوائية كسرية.

References

[1]- Xiao G and Wang J, 2021- Stability of Fractional Stochastic Differential Equations, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 26(4): 581-596.

[2] Krishnan, V., 1984-Nonlinear Filtering and Smoothing, Johnwiley and Sons: USA.

[3] حسين، العرجه، (2024). استقرار حل جملة معادلات تكاملية تفاضلية من مرتبة كسرية باستخدام تابع ليبانوف التربيعي، مجلة جامعة حمص، سلسلة الأعداد للعلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية، المجلد 47: 1-15

[4] حسين، (2021). دراسة استقرار حل جملة معادلات تكاملية- تفاضلية من مرتبة كسرية باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة، مجلة جامعة حمص، المجلد 43، 1-17.

[5] حسين، العرجه، (2022). دراسة استقرار حل جملة معادلات تكاملية تفاضلية من مرتبة كسرية بطريقة ليبانوف، جامعة حمص.