استخدام مبدأ غاوس لحساب التكاملات المضاعفة بالاعتماد على الدوال المتعامدة

اعداد الباحثة: ورود محمّد ابراهيم باشراف : د.حامد عباس

ملخص البحث:

يهتم هذا البحث بدراسة التكاملات المضاعفة للدوال اعتمادا على مبدأ غاوس، والذي يعتمد على جذور (**كثيرات حدود ليجندر المتعامدة**) في المجال $[-1,+1]$، ودالة الوزن $\omega(x)=1$ ،اضافة الى ذلك سنعتمد على مبدأ غاوس المعمم الذي **يعتبر المجال** $[a,b]$ **اختياري** ودالة الوزن $\omega(x)=1$ ، أوجدنا كثيرات الحدود المتعامدة من نوع ليجندر في فضاءات متعددة الأبعاد:

$$p_{n_1\dots n_n}=\frac{1}{\alpha}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}}(x_i^{2}-1)^{n_i}\right)\quad ,\alpha=\prod_{i=1}^{n}(n_i!)2^{\beta}\quad ,\beta=\sum_{i=1}^{n}n_i$$

ثم أوجدنا جذورها، والتي تعد النقاط التكاملية للعلاقات التكعيبية، والتي من خلالها حسبنا القيم التقريبية للتكاملات المتكررة، وأوجدنا المبرهنات اللازمة مع الاثبات، التي أعطتنا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية التالية:

$$C_j=\frac{2^n}{\prod_{i=1}^{n}(1-(x_i^{j})^2)\left(\frac{\partial^n p_{n_1n_1\dots n_n}(x^j)}{\prod_{i=1}^{n}\partial x_i}\right)^2};x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

التي كانت تحسب من خلال حل جمل من المعادلات غير الخطية، حيث إن لكل منطقة تكاملية ثوابت خاصة بها .

الكلمات المفتاحية: العلاقات التكعيبية، الدوال المتعامدة، التكاملات المضاعفة التقريبية.

Using Gauss's principle To Calculate Double integrals Based on Orthogonal Functions

Abstract

This research is concerned with studying the multiple integrals of functions based on Gauss's principle, which depends on the roots of Legendre's orthogonal polynomials in the domain $[-1,+1]$ and the weight function $\omega(x)=1$,in addition to that we will depend on the generalized Gauss's principle which considers the domain to be arbitrary $[a,b]$ and the weight function $\omega(x)=1$.

We found the orthogonal Legendre polynomials in multidimensional spaces:

$$p_{n_1\ldots n_n}=\frac{1}{\alpha}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}}(x_i^{2}-1)^{n_i}\right)\quad,\alpha=\prod_{i=1}^{n}(n_i!)2^{\beta},\beta=\sum_{i=1}^{n}n_i$$

then We found their roots, which are the integral points of the cubic relations, from which we calculated the approximate values of the repeated integrals, and we found the necessary theorems with proof, which gave us the constants of the following approximate integral relations:

$$C_j=\frac{2^n}{\prod_{i=1}^{n}(1-(x_i^{j})^2)\left(\frac{\partial^n p_{n_1n_1\ldots n_n}(x^{j})}{\prod_{i=1}^{n}\partial x_i}\right)^2};x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

which were calculated by solving sets of nonlinear equations, since each integration region has its own constants.

keywords: cubature formulae, orthogonal polynomials, approximate calculation multi integrals.

1-مقدمة البحث:

تعريف:[2,5]

نقول عن الدالتين $f(x), g(x)$ الحقيقيتين المعرفتين والقابلتين للمكاملة على المنطقة Ω أنهما متعامدتان على تلك المنطقة إذا كان:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = 0 \qquad (1)$$

بوجود دالة وزن $\omega(x)$ تسمح بتعريف الجداء الداخلي للدالتين وفق الشكل الآتي:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{\Omega} \omega(x) f(x) g(x)\, dx \qquad (2)$$

تم حساب التكاملات التقريبية الاحادية للدوال بطرائق متعددة تعتمد على مبدأ سيمبسون وغيره**[3,6]**، واستخدم غاوس الطرائق التقريبية لحساب التكاملات على المجال $[-1,+1]$ بدالة وزن $\omega(x)=1$ ، حيث إن علاقة غاوس التربيعية من الشكل التالي **[4,7]**:

$$\int_{-1}^{+1} \omega(x) f(x) dx \cong \sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i) \qquad (3)$$

سُميت النقاط x_i عقد العلاقة التربيعية، أو نقاط استكمال العلاقة التربيعية، وأحيانا تدعى نقاط ارتكاز العلاقة التربيعية، و C_i هي الثوابت الموافقة لتلك النقاط x_i ، و $\omega(x)$ دالة الوزن. يتم تحديد الثوابت C_i ; $(i=1,2,...,n)$, حيث تتحول العلاقة (3) الى مساواة مضبوطة (صحيحة تماما) من أجل كل كثيرة حدود جبرية درجتها لا تتجاوز 2n−1، أي من أجل: $f(x)=1,x,x^2,...,x^{2n-1}$ حيث إن المجال التكاملي هو $[-1,+1]$ ولدينا 2n من المجاهيل هي: x_i , C_i ; $i=1,2,3,...,n$.

1-1.استخدام كثيرات حدود ليجندر في التكاملات الأحادية:

يعتمد مبدأ غاوس في التكامل التقريبي على أن النقاط x_i هي جذور كثيرات حدود ليجندر $p_n(x)$ ، والتي تعرف بالشكل التالي**[4]** :

$$p_n(x) = \frac{1}{n!.2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (4)$$

يمكن حساب الثوابت C_i بطريقة الأمثال غير المعينة، على اعتبار أن العلاقة (3) صحيحة تماما من أجل كل كثيرة حدود درجتها لا تتجاوز $2n-1$ ،فينتج لدينا جملة من المعادلات غير الخطية، بحلها نحصل على الثوابت المطلوبة، ولكن جملة المعادلات الغير خطية الناتجة قد تكون أحيانا معقدة وصعبة الحل من أجل ذلك تم اثبات المبرهنة التالية:

مبرهنة1:[9] بفرض أن $P_n(x)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-1,+1]$ ، وكانت x_i ; $i=1,2,3,...,n$ هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $P_n(x)=0$ ، فعند ذلك ثوابت العلاقة التربيعية (3) تكتب بالشكل التالي:

$$C_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[p_n'(x_i)]^2} \qquad (5)$$

ملاحظة: كما هو واضح من خلال العلاقة (5) أن الثوابت C_i مرتبطة فقط بكثيرات حدود ليجندر، ولا علاقة لها بالدالة المكاملة $f(x)$.

1-2.الحالة العامة لطريقة غاوس التربيعية[1]

تم الوصول الى الحالة العامة لطريقة غاوس التربيعية، أي عندما يكون المجال اختياري من الشكل $[a,b]$، وفي هذه الحالة اصبح بالإمكان حساب التكاملات التقريبية ضمن الشكل التالي:

$$\int_a^b f(x)dx$$

لحساب مثل هذه التكاملات بطريقة غاوس تم اجراء التحويل الاتي :

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u$$

وتم الحصول على : $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} f(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}u)du$

وحسب العلاقة (3) يكون: (6)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i)$$

حيث إن: $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u_i$ و u_i هي جذور كثيرات حدود ليجندر الموافقة ل n.

2-.هدف البحث وطريقته:

يهدف هذا البحث الى:

- حساب التكاملات المضاعفة بشكل تقريبي اعتمادا على مبدأ غاوس، والذي يعتمد على جذور كثيرات الحدود المتعامدة لـ ليجندر في المجال $[-1,+1]$ودالة الوزن $\omega(x)=1$ ، من خلال ايجاد كثيرات الحدود المتعامدة من نوع ليجندر في فضاءات متعددة الأبعاد وحساب جذورها والتي تعد النقاط التكاملية للعلاقات التكعيبية .
- الاعتماد على مبدأ غاوس المعمم، الذي يعتبر المجال اختياري $[a,b]$ ودالة الوزن $\omega(x)=1$لحساب التكاملات المضاعفة المعممة بشكل تقريبي.
- التوصل الى الصيغ التي تعطينا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية، بالاعتماد على مجموعة من المبرهنات يتم ايجادها مع الاثبات.

3-.مشكلة البحث:

- ايجاد كثيرات الحدود المتعامدة من نمط ليجندر في فضاءات متعددة الأبعاد.
- حساب جذور كثيرات الحدود المذكورة واعتبارها نقاط العلاقة التكعيبية.

- التوصل الى مبرهنات تعطينا ثوابت العلاقات التقريبية التكاملية واثباتها.

4-النتائج ومناقشتها:

4-1.طريقة غاوس التكعيبية

4-1-1.مفاهيم أساسية[4] :

العلاقة التقريبية لحساب التكاملات المضاعفة تسمى العلاقة التكعيبية و تكتب بالشكل التالي :

$$\int_{\Omega} \omega(x) f(x) dx \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x^j) \qquad (7)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3 .... x_n) \ , dx = dx_1 dx_2 dx_3 .. dx_n$$

حيث أن Ω منطقة في الفضاء R^n ، و $\omega(x)$ دالة الوزن و $f(x)$ الدالة المكاملة واشارة التكامل على المنطقة Ω تعني التكامل المضاعف n مرة من الفضاء R^n على المنطقة Ω ،و C_j الثوابت الموافقة للنقاط x^j التي هي جذور كثيرات الحدود المتعامدة في المنطقة Ω و N عدد هذه الجذور، العلاقة السابقة صحيحة من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2n-1$.

4-1-2.حساب التكاملات باستخدام جذور كثيرات الحدود المتعامدة بمتحولين على المربع $[-1,+1]^2$.

ان كثيرات الحدود المتعامدة من نوع ليجندر بمتحولين على المربع $[-1,+1]^2$ تعطى بالصيغة التالية:**[10]**

$$p_{nm} = \frac{1}{n!m!2^{n+m}} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^m}{dy^m}(y^2-1)^m \qquad (8)$$

نقوم بإيجاد جذور كثيرات الحدود هذه على اعتبار أن جذور كثيرات الحدود هذه بمتحول واحد معلومة بدلالة x وعلى أساسها نحسب y ، ثم نحدد النقاط التكاملية (x, y) ،ونوجد الثوابت الموافقة بالاعتماد على المبرهنة التالية:

مبرهنة2 : بفرض أن $P_{n,m}(x, y)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على المربع $[-1,+1]^2$ ، وكانت (x_j, y_j) هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $P_{n,m}(x, y) = 0$ ، فعند ذلك ثوابت العلاقة التكعيبية (7) تكتب بالشكل التالي:

$$C_j = \frac{4}{(1-x_j^2)(1-y_j^2)\left[\frac{\partial^2 P_{nm}(x_j, y_j)}{\partial x\, \partial y}\right]^2} \qquad (9)$$

الاثبات: ننطلق من التكامل التالي: $S_j = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{p_{nm}(x, y)}{(x-x_j)(y-y_j)} \frac{\partial^2 p_{nm}(x, y)}{\partial x\, \partial y} dxdy$

الدالة المكاملة هي عبارة عن دالة من الدرجة $2(n+m)-4$ بالتالي فان العلاقة (7):

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \omega(x) f(x) \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j, y_j)$$

تصبح مساواة صحيحة من أجلها بالتالي نحصل على:

$$S_j \cong C_j \left(\frac{\partial^2 p_{nm}(x, y)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 \qquad (10)$$

نقوم بحساب التكامل السابق: $I = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{(y-y_j)} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{p_{nm}(x, y)}{(x-x_j)} \frac{\partial^2 p_{nm}(x, y)}{\partial x\, \partial y} dx\right) dy$

لنوجد التكامل $I_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{p_{nm}(x, y)}{(x-x_j)} \frac{\partial^2 p_{nm}(x, y)}{\partial x\, \partial y} dx$ بالتجزئة حيث نفرض:

$$u = \frac{p_{nm}(x,y)}{(x - x_j)} \quad , \quad dv = \left[\frac{\partial^2 p_{nm}(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right]dx \Rightarrow v = \frac{\partial p_{nm}(x,y)}{\partial y}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{p_{nm}(x,y)}{(x - x_j)}\frac{\partial p_{nm}(x,y)}{\partial y}\Bigg|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}\frac{\partial p_{nm}(x,y)}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

التكامل في الطرف الايمن يساوي الصفر بسبب التعامد منه:

$$I_1 = \frac{p_{nm}(1,y)}{(1-x_j)}\frac{\partial p_{nm}(1,y)}{\partial y} + \frac{p_{nm}(-1,y)}{(1+x_j)}\frac{\partial p_{nm}(-1,y)}{\partial y}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{1-x_j}\int_{-1}^{+1}\frac{p_{nm}(1,y)}{(y-y_j)}\frac{\partial p_{nm}(1,y)}{\partial y}dy + \frac{1}{1+x_j}\int_{-1}^{+1}\frac{p_{nm}(-1,y)}{(y-y_j)}\frac{\partial p_{nm}(-1,y)}{\partial y}dy$$

نكامل كلا التكاملين بالتجزئة

$$\int_{-1}^{+1}\frac{p_{nm}(1,y)}{(y-y_j)}\frac{\partial p_{nm}(1,y)}{\partial y}dy$$

لنفرض

$$u = \frac{p_{nm}(1,y)}{(y-y_j)} \quad , \quad dv = \left[\frac{\partial p_{nm}(1,y)}{\partial y}\right]dy \Rightarrow v = p_{nm}(1,y)$$

بالتالي فأن:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{p_{nm}(1,y)}{(y-y_j)}\frac{\partial p_{nm}(1,y)}{\partial y}dy = \frac{p^2{}_{nm}(1,y)}{(y-y_j)}\Bigg|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1}p_{nm}(1,y)\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

التكامل في الطرف الايمن يساوي الصفر بسبب التعامد وبنفس الاسلوب نحسب التكامل الثاني فنحصل على:

$$I = \frac{p^2{}_{nm}(1,y)}{(y-y_j)}\Bigg|_{-1}^{+1}\frac{1}{1-x_j} + \frac{p^2{}_{nm}(-1,y)}{(y-y_j)}\Bigg|_{-1}^{+1}\frac{1}{1+x_j} = \frac{4}{(1-x_j^2)(1-y_j^2)} = S_j$$

منه بالتعويض في العلاقة (10)

$$\frac{4}{(1-x_j^2)(1-y_j^2)}=C_i\left[\frac{\partial^2 P_{mn}(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right]^2 \Rightarrow C_j=\frac{4}{(1-x_j^2)(1-y_j^2)\left[\frac{\partial^2 P_{mn}(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right]^2}$$

ملاحظة :كما هو واضح أن الثوابت $C_j\ ;i=1,2,...,N$ مرتبطة فقط بكثيرات حدود ليجندر ولا علاقة لها بالدالة $f(x,y)$.

والعلاقة (7) في هذه الحالة تصبح على الشكل التالي:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x,y)dxdy \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j,y_j) \qquad (11)$$

مثال1: استخدم العلاقة التكعيبية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية للتكامل التالي:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} x^2 y^2 dxdy$$

معتبرا $n=m=2$.

الحل: حسب العلاقة التكعيبية(11):

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x,y)dxdy \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j,y_j)$$

نجد:

$$I=c_1 f(x_1,y_1)+c_2 f(x_2,y_2)+c_3 f(x_3,y_3)+c_4 f(x_4,y_4)$$

وباعتبار أن $n=m=2$ فإننا نستخدم كثيرة حدود ليجندر p_{22} أي:

$$p_{22}(x,y)=\frac{1}{4}\left(3x^2-1\right)\left(3y^2-1\right)$$

و جذور كثيرة الحدود هذه هي:

$$(x_1,y_1)=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\ ,\ (x_2,y_2)=(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$$
$$(x_3,y_3)=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}),(x_4,y_4)=(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد:

$$f\ (\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})=f\ (-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})=f\ (\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})=f\ (-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{9}$$

و بالاعتماد على العلاقة(9)تكون الثوابت المقابلة لنقاط العلاقة التكعيبية هي:

$$c_1=c_2=c_3=c_4=1$$

و أخيرا فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I=4\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{9}$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}x^2y^2dxdy=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{+1}=\frac{4}{9}$$

العلاقة صحيحة تماما من أجل كل كثيرات الحدود التي درجتها لا تتجاوز $2(m+n)-1=7$ و $f\ (x,y)$ وفي تمريننا هذا هي كثيرة حدود من الدرجة الرابعة مما يؤكد صحة كلامنا.

4-1-3.حساب التكاملات باستخدام جذور كثيرات الحدود المتعامدة بمتحولين على المستطيل $[a,b]\times[c,d]$.

الان لندرس الحالة العامة لطريقة غاوس التكعيبية عندما تكون المنطقة اختيارية $[a,b]\times[c,d]$، تصبح علاقة غاوس المعممة بالشكل التالي:

بإجراء التحويل التالي: $x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u_j \ , \ y_j = \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2}v_j$

حيث أن $(u_i \ , v_i)$ هي جذور كثيرات حدود ليجندر الموافقة ل m,n، هكذا تُرد المنطقة من $[a,b] \times [c,d]$ الى $[-1,+1]^2$، فنحصل على:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy \cong \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u_i, \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2}v_i\right)dxdy$$

$$= \frac{b-a}{2}\frac{d-c}{2}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u_i, \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2}v_i\right)dudv$$

حسب العلاقة التكعيبية (11)يكون:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy \cong \frac{b-a}{2}\frac{d-c}{2}\sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j, y_j) \qquad (12)$$

حيث:

$$C_j = \frac{4}{(1-u_j{}^2)(1-v_j{}^2)\left[\frac{\partial^2 p_{nm}(u_j,v_j)}{\partial u \partial v}\right]^2} \qquad (13)$$

و $\left(u_j, v_j\right)$ هي جذور كثيرات حدود ليجندر الموافقة ل m,n.

مثال2: استخدم العلاقة التكعيبية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية للتكامل التالي:

$$\int_0^1 \int_0^{0.5} e^{x+y} dxdy$$

معتبرا $n=1, m=2$.

الحل: حسب العلاقة التكعيبية(12) :

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy \cong \frac{b-a}{2}\frac{d-c}{2}\sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j,y_j)$$

حيث إن:

$$x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u_j \Rightarrow x_i = 0.5 + 0.5u_j$$

$$y_j = \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2}v_j \Rightarrow y_j = 0.25 + 0.25v_j$$

و (u_j, v_j) هي جذور كثيرات حدود ليجندر الموافقة لn و m.

نجد:

$$I = \frac{1}{8}\left[c_1 f(x_1,y_1) + c_2 f(x_2,y_2)\right]$$

وباعتبار أن $n=1, m=2$ ، فإننا نستخدم كثيرة حدود ليجندر p_{12} أي:

$$p_{12}(x,y) = \frac{1}{2}x\left(3y^2 - 1\right)$$

وجذور كثيرة الحدود هذه هي:

$$(u_1,v_1) = (0, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \ , (x_1,y_1) = (0.5, \frac{3-\sqrt{3}}{12}) \Rightarrow f(x_1,y_1) = 1.832465692$$

$$(u_2,v_2) = (0, +\frac{1}{\sqrt{3}}), (x_2,y_2) = (0.5, \frac{3+\sqrt{3}}{12}) \Rightarrow f(x_2,y_2) = 2.445715131$$

لنحسب الثوابت c_1, c_2 من العلاقة(13) فنجد:

$$C_j = \frac{4}{(1-u_j^2)(1-v_j^2)\left[\frac{\partial^2 p_{nm}(u_j,v_j)}{\partial u \partial v}\right]^2} \Rightarrow c_1 = c_2 = 2$$

وبالتالي يصبح التكامل بالشكل الاتي:

$$I=\frac{1}{8}[2(1.832465692)+2(2.445715131)]=1.069545206$$

والقيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_0^1\int_0^{0.5} e^{x+y}dxdy=1.114685971$$

4-1-4..حساب التكاملات المضاعفة (الثلاثية) باستخدام جذور كثيرات الحدود المتعامدة بثلاث متحولات على المكعب $[-1,+1]^3$.

اعتمادا على العلاقتين (4)و (8) يمكننا كتابة كثيرات الحدود المتعامدة ل ليجندر بثلاث متحولات على المكعب $[-1,+1]^3$ بالشكل التالي :

$$p_{nmL}=\frac{1}{m!n!L!2^{m+n+L}}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m\frac{d^n}{dy^n}(y^2-1)^n\frac{d^L}{dz^L}(z^2-1)^L \qquad (14)$$

نقوم بإيجاد جذور كثيرات الحدود هذه واعتبارها هي النقاط التكاملية (x_j,y_j,z_j) ،ونوجد الثوابت الموافقة.

مبرهنة3 : بفرض أن $P_{n,m,L}(x,y,z)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على المكعب $[-1,+1]^3$، وكانت (x_j,y_j,z_j) هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $P_{n,m,L}(x,y,z)=0$ ، فعند ذلك ثوابت العلاقة التكعيبية (7) تكتب بالشكل التالي:

$$C_j=\frac{8}{(1-x_j^2)(1-y_j^2)(1-z_j^2)\left[\frac{\partial^3 P_{mnL}(x,y,z)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right]^2} \qquad (15)$$

الاثبات: ننطلق من التكامل التالي:

$$S_j=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{p_{nmL}(x,y,z)}{(x-x_j)(y-y_j)(z-z_j)}\frac{\partial^3 p_{nmL}(x,y,z)}{\partial x\,\partial y\,\partial z}dxdydz$$

الدالة المكاملة هي عبارة عن دالة من الدرجة $2(n+m+L)-6$ بالتالي فان العلاقة

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x,y,z)dxdydz \cong \sum_{j=1}^{j} C_j f(x_j,y_j,z_j)$$

تصبح مساواة صحيحة من أجلها بالتالي نحصل على:

$$S_j \cong C_j \left(\frac{\partial^3 p_{nmL}(x,y,z)}{\partial x\, \partial y\, \partial z} \right)^2 \qquad (16)$$

نقوم بحساب التكامل الذي انطلقنا منه فيكون: $S_j = \frac{8}{(1-x_j^2)(1-y_j^2)(1-z_j^2)}$

منه بالتعويض في العلاقة (16) :

$$\frac{8}{(1-x_j^2)(1-y_j^2)(1-z_j^2)} \cong C_j \left(\frac{\partial^3 p_{nmL}(x,y,z)}{\partial x\, \partial y\, \partial z} \right)^2$$

و بالتالي: $$C_j = \frac{8}{(1-x_j^2)(1-y_j^2)(1-z_j^2)\left[\frac{\partial^3 P_{mn}(x,y,z)}{\partial x\, \partial y\, \partial z} \right]^2}$$

ملاحظة :كما هو واضح أن الثوابت C_j مرتبطة فقط بكثيرات حدود ليجندر ولا علاقة لها بالدالة $f(x,y,z)$.

والعلاقة التكعيبية في هذه الحالة هي:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x,y,z)dxdydz \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j,y_j,z_j) \qquad (17)$$

مثال3: استخدم العلاقة التكعيبية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية للتكامل التالي:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left(x + y^2 z^2 \right) dxdydz$$

معتبرا $n=1, m=2, L=2$.

الحل: حسب العلاقة التكعيبية(17) :

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x,y,z)dxdydz \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j,y_j,z_j)$$

نجد:

$$I = c_1 f(x_1,y_1) + c_2 f(x_2,y_2) + c_3 f(x_3,y_3) + c_4 f(x_1,y_1)$$

وباعتبار أن $n=1, m=2, L=2$ فإننا نستخدم كثيرة حدود ليجندر p_{122} أي:

$$p_{122}(x,y) = \frac{1}{4} x\left(3y^2-1\right)\left(3z^2-1\right)$$

و جذور كثيرة الحدود هذه هي:

$$(x_1,y_1,z_1) = (0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) \ , \ (x_2,y_2,z_2) = (0,-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$$
$$(x_3,y_3,z_3) = (0,\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}) \ , (x_4,y_4,z_4) = (0,-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$$

نحسب قيم الدالة المفروضة عند النقاط، فنجد:

$$f(0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{9}, f(0,-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{9}$$
$$f(0,-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{9}, f(0,-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{9}$$

و بالاعتماد على العلاقة(15)تكون الثوابت المقابلة لنقاط العلاقة التكعيبية هي:

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 2$$

و أخيرا فإن قيمة التكامل تساوي:

$$I = 4(2)\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9}$$

و القيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} x + y^{2}z^{2}dxdy = \frac{8}{9}$$

4-1-5..حساب التكاملات المضاعفة (الثلاثية) باستخدام جذور كثيرات الحدود المتعامدة بثلاث متحولات على متوازي المستطيلات $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$.

تصبح علاقة غاوس المعممة بالشكل التالي:

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d}\int_{e}^{f}\omega(x,y,z)f(x,y,z)dxdydz \cong \sum_{j=1}^{N}C_{j}f(x_{j},y_{j},z_{j}) \qquad (18)$$

نجري التحويل التالي:

$$x_{j} = \frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}u_{j}\ , y_{j} = \frac{d+c}{2}+\frac{d-c}{2}v_{j}, z_{j} = \frac{f+e}{2}+\frac{f-e}{2}w_{j}$$

يرد المجال من $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ الى $[-1,+1]^{3}$ ،فنحصل على:

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d}\int_{e}^{f} f(x,y,z)dxdydz \cong$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}u_{j},\frac{d+c}{2}+\frac{d-c}{2}v_{j},\frac{f+e}{2}+\frac{f-e}{2}w_{j}\right)dxdydz$$

$$=\frac{b-a}{2}\frac{d-c}{2}\frac{f-e}{2}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}u_{j},\frac{d+c}{2}+\frac{d-c}{2}v_{j},\frac{f+e}{2}+\frac{f-e}{2}w_{j}\right)dudvdw$$

حسب العلاقة (17) تكون العلاقة التكعيبية في هذه المنطقة هي:

$$\text{حيث:}\int_{a}^{b}\int_{c}^{d}\int_{e}^{f} f(x,y,z)dxdydz \cong \frac{b-a}{2}\frac{d-c}{2}\frac{e-f}{2}\sum_{j=1}^{N}C_{j}f(x_{j},y_{j},z_{j}) \qquad (19)$$

$$C_i = \frac{8}{(1-u_j^{\,2})(1-v_j^{\,2})(1-w_j^{\,2})\left[\dfrac{\partial^3 p_{nmL}(u_j, v_j, w_j)}{\partial u\,\partial v\,\partial w}\right]^2} \qquad (20)$$

$$x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u_j, y_j = \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2}v_j, z_j = \frac{e+f}{2} + \frac{e-f}{2}w_j$$

و (u_i, v_i, w_i) هي جذور كثيرات حدود ليجندر الموافقة ل m, n, L.

مثال4: استخدم العلاقة التكعيبية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية للتكامل التالي:

$$\int_1^{1.2}\int_1^{1.25}\int_2^{2.5} \frac{1}{xyz}dxdydz$$

معتبرا $n=1, m=2, L=2$.

الحل: حسب العلاقة التكعيبية(19) :

$$\int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,y,z)dxdydz \cong \frac{b-a}{2}\frac{d-c}{2}\frac{f-e}{2}\sum_{i=1}^{N} C_j f(x_j, y_j, z_j)$$

نجد:

$$I = \frac{1}{320}\left[\begin{matrix} c_1 f(x_1, y_1, z_1) + c_2 f(x_2, y_2, z_2) \\ + c_3 f(x_3, y_3, z_3) + c_4 f(x_4, y_4, z_4)) \end{matrix}\right]$$

حيث إن:

$$x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u_j = 1.1 + 0.1u_j$$

$$y_j = \frac{d+c}{2} + \frac{d-c}{2}v_j = 1.125 + 0.125v_j$$

$$z_j = \frac{e+f}{2} + \frac{e-f}{2}\omega_j = 2.125 + 0.125\omega_j$$

و (u_j, v_j, ω_j) هي جذور كثيرات حدود ليجندر الموافقة لn و mو L.

وباعتبار أن $n=1, m=2, L=2$ ، فإننا نستخدم كثيرة حدود ليجندر p_{122} أي:

$$p_{122}(x,y)=\frac{1}{4}x\left(3y^2-1\right)\left(3z^2-1\right)$$

وجذور كثيرة الحدود هذه هي:

$$(u_1,v_1,w_1)=(0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\Rightarrow(x_1,y_1,z_1)=(1.1,\frac{27+\sqrt{3}}{24},\frac{51+\sqrt{3}}{24})\Rightarrow(x_1,y_1,z_1)=0.3456117592$$

$$(u_2,v_2,w_2)=(0,-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\Rightarrow(x_2,y_2,z_2)=(1.1,\frac{27-\sqrt{3}}{24},\frac{51+\sqrt{3}}{24})\Rightarrow(x_1,y_1,z_1)=0.3929932956$$

$$(u_3,v_3,w_3)=(0,\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})\Rightarrow(x_3,y_3,z_3)=(1.1,\frac{27+\sqrt{3}}{24},\frac{51-\sqrt{3}}{24})\Rightarrow(x_1,y_1,z_1)=0.3699122279$$

$$(u_4,v_4,w_4)=(0,-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})\Rightarrow(x_4,y_4,z_4)=(1.1,\frac{27-\sqrt{3}}{24},\frac{51-\sqrt{3}}{24})\Rightarrow(x_1,y_1,z_1)=0.4206252294$$

لنحسب الثوابت C_1, C_2, C_3, C_4 من العلاقة(20) فنجد:

$$C_j=\frac{8}{(1-u_j^{\,2})(1-v_j^{\,2})(1-w_j^{\,2})\left[\dfrac{\partial^3 p_{nmL}(u_j,v_j,w_j)}{\partial u\,\partial v\,\partial w}\right]^2}\quad\Rightarrow c_1=c_2=c_3=c_4=2$$

وبالتالي يصبح التكامل بالشكل الاتي:

$$I=\frac{1}{320}\begin{bmatrix}2(0.3456117592)+2(0.3929932956)\\+2(0.3699122279)+2(0.4206252294)\end{bmatrix}=9.557140701\times10^{-3}$$

والقيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_1^{1.2}\int_1^{1.25}\int_2^{2.5}\frac{1}{xyz}dxdydz=9.491568047\times10^{-3}$$

4-1-6..حساب التكاملات المضاعفة في الحالة العامة على المكعب $\Omega=[-1,+1]^n$ في الفضاء R^n.

اعتمادا على العلاقات (4)و (8) و (14) يمكننا كتابة كثيرات الحدود المتعامدة من نوع ليجندر بـ n من المتحولات على المكعب $[-1,+1]^n$ بالشكل التالي :

$$p_{n_1\dots n_n}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(n_i!)2^{\beta}}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^{n_i}}{dy^{n_i}}(x_i^2-1)^{n_i}\right)\quad ,\beta=\sum_{i=1}^{n}n_i \tag{21}$$

وتصبح العلاقة التكعيبية في هذه الحالة:

$$\int_{\Omega}f(x)dx=\sum_{j=1}^{N}C_j f(x_j)\ ;x=(x_1,x_2,x_3,\dots x_n) \tag{22}$$

$$;\ dx=dx_1dx_2dx_3\dots dx_n\ ,\Omega=[-1,+1]^n$$

نقوم بإيجاد جذور كثيرات الحدود هذه واعتبارها هي النقاط التكاملية (x_j) ،ونوجد الثوابت الموافقة.

مبرهنة5 : بفرض أن $p_{n_1n_2\dots n_n}(x)\quad ;x=(x_1,x_2,x_3,\dots x_n)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق الجزئي على المكعب $\Omega=[-1,+1]^n$ في الفضاء R^n ، وكانت (x_j) هي عبارة عن جذور كثيرات الحدود $(x_1,x_2,x_3,\dots x_n)$ ، فعند ذلك ثوابت العلاقة التكعيبية (22) تكتب بالشكل التالي:

$$C_j=\frac{2^n}{\prod_{i=1}^{n}(1-(x_i^j)^2)\left(\frac{\partial^n p_{n_1n_2\dots n_n}(x^j)}{\prod_{i=1}^{n}\partial x_i}\right)^2} \tag{23}$$

$$x^j=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}u^j\quad ;x=(x_1,\dots,x_n)\ ,u=(u_1,\dots,u_n)$$

الاثبات: ننطلق من التكامل التالي:

$$S_j = \int_{\Omega} \frac{p_{n_1 n_2 \ldots n_n}(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x_i - x_i^j)} \frac{\partial^n p_{n_1 n_2 \ldots n_n}(x)}{\prod_{i=1}^{n} \partial x_i} dx \quad ; \begin{bmatrix} x = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \\ dx = dx_1 dx_2 dx_3 \ldots dx_n \\ \Omega = [-1, +1]^n \end{bmatrix}$$

الدالة المكاملة هي عبارة عن دالة من الدرجة $2(\sum_{i=1}^{n} n_i) - 2n$ بالتالي فان العلاقة (22)

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j)$$

تصبح مساواة صحيحة من أجلها بالتالي نحصل على:

$$S_j \cong C_j \left(\frac{\partial^n p_{n_1 n_2 \ldots n_n}(x^j)}{\prod_{i=1}^{n} \partial x_i} \right)^2 \qquad (24)$$

نقوم بحساب التكامل الذي انطلقنا منه فيكون: $S_j = \frac{2^n}{\prod_{i=1}^{n}(1-(x_i^j)^2)}$

منه بالتعويض في العلاقة (24) :

$$S_j = \frac{2^n}{\prod_{i=1}^{n}(1-(x_i^j)^2)} \cong C_j \left(\frac{\partial^n p_{n_1 n_2 \ldots n_n}(x^j)}{\prod_{i=1}^{n} \partial x_i} \right)^2$$

و بالتالي:

$$C_j = \frac{2^n}{\prod_{i=1}^{n}(1-(u_i^j)^2)\left(\frac{\partial^n p_{n_1 n_2 \ldots n_n}(u^j)}{\prod_{i=1}^{n}\partial u_i}\right)^2} \qquad (25)$$

$$x^j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u^j \quad ;x=(x_1,\ldots,x_n)\ ,u=(u_1,\ldots,u_n)$$

ملاحظة :كما هو واضح أن الثوابت C_j مرتبطة فقط بكثيرات حدود ليجندر ولا علاقة لها بالدالة $f(x)$.

4-1-7.الحالة العامة للتكاملات المضاعفة(الثلاثية)على منطقة (متوازي السطوح المعمم) في الفضاء $R^n\ \Omega=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]^n$.

تصبح علاقة غاوس المعممة بالشكل التالي:

$$\int_\Omega f(x)dx = \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j)\ ;x=(x_1,x_2,x_3,\ldots x_n) \qquad (26)$$

نجري

$$;\ dx = dx_1 dx_2 dx_3 \ldots dx_n\ ,\Omega=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$$

التحويل التالي:

$$x_i^j = \frac{b_i+a_i}{2} + \frac{b_i-a_i}{2}u_j\ ;i=1,2,3,\ldots n$$

ترد المنطقة من $\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ الى $[-1,+1]^n$ ،فنحصل على:

$$I=\int_{\Omega} f\ (x)dx\ \cong\int_{\Omega} f\ (\frac{b_i+a_i}{2}+\frac{b_i-a_i}{2}u\ )dx\ \ ;x=(x_1,...,x_n)\ ,u=(u_1,...,u_n)$$

حسب

$$,\Omega=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]\Rightarrow I\cong\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i-a_i}{2}\int_{\Omega} f\ (\frac{b_i+a_i}{2}+\frac{b_i-a_i}{2}u\ )du\quad ;\Omega=[-1,+1]^n$$

العلاقة (22) تكون العلاقة التكعيبية في هذه المنطقة هي:

$$I=\int_{\Omega=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]} f\ (x)dx\cong\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i-a_i}{2}\int_{\Omega=[-1,+1]^n} f\ (x)dx\ =\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i-a_i}{2}\sum_{j=1}^{N}C_j f\ (x_j)\quad (27)$$

حيث:

$$C_j=\frac{2^n}{\prod_{i=1}^{n}(1-(u_i^j)^2)\left(\frac{\partial^n p_{n_1n_2...n_n}(u^j)}{\prod_{i=1}^{n}\partial u_i}\right)^2}\qquad (28)$$

$$x^j=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}u^j\quad ;x=(x_1,...,x_n)\ ,u=(u_1,...,u_n)$$

و $\left(u^j\right)$ هي جذور كثيرات حدود ليجندر الموافقة ل $n_1,n_2...n_n$.

مثال5: استخدم العلاقة التكعيبية السابقة من أجل حساب القيمة التقريبية للتكامل التالي:

$$\int_0^{0.4}\int_1^{1.5}\int_1^{1.25}\int_0^{0.2} x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2dx_1dx_2dx_3dx_4$$

معتبرا $n_1=1,n_2=2,n_2=2,n_4=1$.

الحل: حسب العلاقة التكعيبية(27) :

نجد:

$$I\cong\frac{b_1-a_1}{2}\frac{b_2-a_2}{2}\frac{b_3-a_3}{2}\frac{b_4-a_4}{2}\begin{bmatrix}C_1f\ (x_1^1,x_2^1,x_3^1,x_4^1)+C_2f\ (x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_4^2)+\\ C_3f\ (x_1^3,x_2^3,x_3^3,x_4^4)+C_4f\ (x_1^4,x_2^4,x_3^4,x_4^4)\end{bmatrix}$$

$$I \cong \frac{1}{3200}\begin{bmatrix} c_1 f\ (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1) + c_2 f\ (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2) + \\ c_3 f\ (x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_4^3) + c_4 f\ (x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^4) \end{bmatrix}$$

حيث إن:

$$x_1^j = \frac{b_1 + a_1}{2} + \frac{b_1 - a_1}{2} u_1^j = 0.2 + 0.2u_1^j$$

$$x_2^j = \frac{b_2 + a_2}{2} + \frac{b_2 - a_2}{2} u_1^j = 1.25 + 0.25u_2^j$$

$$x_3^j = \frac{b_3 + a_3}{2} + \frac{b_3 - a_3}{2} u_1^j = 1.125 + 0.125u_3^j$$

$$x_4^j = \frac{b_4 + a_4}{2} + \frac{b_4 - a_4}{2} u_4^j = 0.1 + 0.1u_4^j$$

و $\left(u_1^j, u_2^j, u_3^j, u_4^j\right)$هي جذور كثيرات حدود ليجندر الموافقة ل n_1, n_2, n_3, n_4.

وباعتبار أن $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 1$ ، فإننا نستخدم كثيرة حدود ليجندر p_{1221} أي:

$$p_{122}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4} x_1 \left(3x_2^2 - 1\right)\left(3x_3^2 - 1\right) x_4$$

وجذور كثيرة الحدود هذه هي:

$$(u_1^1,u_2^1,u_3^1,u_4^1)=(0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0)\Rightarrow(x_1^1,x_2^1,x_3^1,x_4^1)=(0.2,\frac{15+\sqrt{3}}{12},\frac{27+\sqrt{3}}{24},0.1)$$
$$\Rightarrow f\ (x_1^1,x_2^1,x_3^1,x_4^1)=1.11456812\times10^{-3}$$
$$(u_1^2,u_2^2,u_3^2,u_4^2)=(0,-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0)\Rightarrow(x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_4^2)=(0.2,\frac{15-\sqrt{3}}{12},\frac{27+\sqrt{3}}{24},0.1)$$
$$\Rightarrow f\ (x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_4^2)=7.00835136\times10^{-3}$$
$$(u_1^3,u_2^3,u_3^3,u_4^3)=(0,\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},0)\Rightarrow(x_1^3,x_2^3,x_3^3,x_4^3)=(0.2,\frac{15+\sqrt{3}}{12},\frac{27-\sqrt{3}}{24},0.1)$$
$$\Rightarrow(x_1^3,x_2^3,x_3^3,x_4^3)=8.620120862\times10^{-4}$$
$$(u_1^4,u_2^4,u_3^4,u_4^4)=(0,-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},0)\Rightarrow(x_1^4,x_2^4,x_3^4,x_4^4)=(0.2,\frac{15-\sqrt{3}}{12},\frac{27-\sqrt{3}}{24},0.1)$$
$$\Rightarrow(x_1^4,x_2^4,x_3^4,x_4^4)=5.420291026\times10^{-4}$$

لنحسب الثوابت C_1,C_2,C_3,C_4 من العلاقة(28) فنجد:

$$C_j=\frac{2^4}{(1-u_1^2)(1-u_2^2)(1-u_3^2)(1-u_4^2)\left[\frac{\partial^4 p_{n_1n_2n_3n_4}(u_1,u_2,u_3,u_4)}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3\partial x_4}\right]^2}\Rightarrow c_1=c_2=c_3=c_4=4$$

وبالتالي يصبح التكامل بالشكل الاتي:

$$I\cong\frac{1}{3200}\begin{bmatrix}4(1.11456812\times10^{-3})+4(7.00835136\times10^{-3}\\+4(8.620120862\times10^{-4})+4(5.420291026\times10^{-4})\end{bmatrix}=0.001190870084\times10^{-2}$$

والقيمة التحليلية للتكامل هي:

$$\int_0^{0.4}\int_1^{1.5}\int_1^{3125}\int_0^{0.2}x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2dx_1dx_2dx_3dx_4=0.001430864198\times10^{-2}$$

الاقتراحات والتوصيات:

1-تشكيل علاقات تقريبية للدوال المثلثية باستخدام الدوال العقدية.

2-العلاقات التقريبية للتكاملات المضاعفة بمتحولات عقدية.

3- البحث عن مناطق تكاملية أخرى للدوال مثل المناطق الكروية و الناقصية.

المراجع المستخدمة:

المراجع العربية:

[1]–**د. حامد عباس، التحليل العددي2، جامعة حمص، مديرية الكتب والمطبوعات، 2018.**

[2]–**د. إبراهيم ابراهيم، الدوال الخاصة، جامعة حمص، 2018.**

[3]. Richard L. Burden, J. Douglas Fairs Numerical Analysis , 9th_edition,2006.

[4]. Mysovskikh.I.P. Interpolation cubature formulas Nowak . 1981 Mowscou.336.p.

[5].cege.g.1962 orthogonal polynomials Mowscou.500.p.

[6].Krilov . _approximation Numerical for integration. Nawka Mowscou.500p-1967

[7].Orive, R., santos, C.J., & Spalevic, M. M.,(2020). Cubature formulae for the Gaussian weight some old and new rules . Electronic Transitions on Numerical Analysis, 5(2020), 426-438.

[9]. Mysovskikh.I.P , (2000) Lectures in Numerical Analysis ,sant peterpurg unver.

[10].Kolmogorof A.N, (1989) principles of function theory and functional analysis, Moscow.