تحويل لابلاس الكواترنيوني وفوريه الكسري الكواترنيوني وتطبيقاتهما في حل معادلات تفاضلية كواترنيونية

طالب الدكتوراه: أنس خلوف / قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة حمص

الأستاذ المشرف: د.إبراهيم إبراهيم

الملخص

في هذه الدراسة، نقترح تعميماً لكل من تحويل فوريه الكسري وتحويل لابلاس إلى المجال الكواترنيوني، وذلك بالاعتماد على عدة صيغ لتحويلات فوريه الكواترنيونية، التي تم تطويرها مؤخراً من قبل عدد من الباحثين.

نبدأ بتقديم تعريف لتحويل فوريه الكسري الكواترنيوني بالاعتماد على إحدى الصيغ الحديثة المقترحة لتحويل فوريه الكسري ، وأتبعنا ذلك بدراسة العديد من خواصه، بعد ذلك نستعرض تطبيقه في حل معادلة التسخين الكواترنيونية.

بعد ذلك نقدم تعريفاً لتحويل لابلاس الكواترنيوني وفقاً لشروط محددة، ونعمل على إثبات عدد من خصائصه الرئيسية. وأخيراً، نوضح فاعلية هذا التحويل من خلال تطبيقه في حل عدد من المعادلات التفاضلية الكواترنيونية.

كلمات مفتاحية:

الكواترنيون – التابع ذو القيمة الكواترنيونية – تحويل لابلاس الكواترنيوني – تحويل فورييه الكسري الكواترنيوني – المعادلات التفاضلية الكواترنيونية .

Quaternionic laplace and fractional fourier transforms and their applications in solving quaternionic differential equations

PhD.student:
Anas khallouf

Supervised by:
D.r.Ibrahim Ibrahim

Summary

In this study, we propose a generalization of both the fractional fourier transform and the laplace transform to the quaternionic domain, based on several formulations of quaternionic fourier transforms that have been recently developed by varios researchers.

We begin by introducing a definition of the quaternionic fractional fourier transform, constructed upon newly proposed formulation of the fractional fourier transform. This is followed by analysis of several fundamental properties of the transform. Subsequently, we demonstrate its application in solving the quaternionic heat equation.

Thereafter, we present a formal definition of the quaternionic laplace transform under specific conditions and rigorously establish many of its properties. Finally, we illustrate the effectiveness of this transform through its application to the solution of various quaternionic differential equations.

Keywords:

Quaternion - Quaternion valued function – Quaternionic laplace transform - Quaternionic fractional fourier transform – Quaternionic differential equations.

1- مقدمة:

تعني كلمة (كواترنيون– Quaternion) المجموعة المكونة من أربعة عناصر. وهو المصطلح المعتمد للأعداد التي تلي العقدية مباشرةً . ويُقدم الكواترنيون بأكثر من صيغة وعلاقة (جبرية – متجهية – مصفوفية) وهو ما دفعنا للاعتماد على مصطلح الكواترنيون بدلاً عن الرباعيات في بحثنا، و يرمز عادةً لمجموعة الأعداد الكواترنيونية بالرمز H نسبة إلى مكتشفها هاملتون.

ومع ظهور الكواترنيون كان له أهمية كبيرة في الميكانيك إلاّ أنه لم يُلب تطلعات الباحثين في تعميم المفاهيم التقليدية في التحليل الرياضي بسبب عدم تحقيق الكواترنيون للخاصة التبديلية في الضرب، إلى أن استطاع كل من (إرنست–Ernst) و(ديلسوك–Delsuc) في أن يطبقا الكواترنيون على تحويلات فورييه وذلك في أواخر ثمانينات القرن الماضي من ثم طور حديثاً من قبل (إيل–Ell) و(سانجوين–Sangwine) [4–3–2–1] ، وتوالت بعدها الدراسات حتى يومنا هذا في تطوير مجالات استخدام الكواترنيون في التحليل الرياضي، كما ازدادت أهمية الكواترنيون في نواحي تطبيقية متنوعة لاسيما في الفيزياء والميكانيك بالإضافة للبرمجيات والاتصالات.

2- هدف البحث:

يهدف البحث إلى الاعتماد على صيغ فورييه الكواترنيونية المدروسة سابقاً وذلك لاستنتاج العديد من التحويلات الكواترنيونية الأخرى خصوصا تحويل فورييه الكسري الكواترنيوني وذلك بالاعتماد على إحدى صيغه المطورة [5] بالإضافة إلى تحويل لابلاس الكواترنيوني وفق شروط محددة، يتبع ذلك تطبيق هذين التحويلين في حل معادلات تفاضلية كواترنيونية.

مشكلة البحث:

تكمن المشكلة الأساسية في التعامل مع الكواترنيون إلى عدم تحقق الخاصة التبديلية في الضرب وهذا ما يضع بعض العقبات والصعوبات في تطوير أي مفهوم تقليدي في التحليل الرياضي وهو ما يلزمنا بوضع آليات محددة عند تعميم أي مفهوم رياضي على الكواترنيون مما يزيد من صعوبة البحث وتطبيقه.

3- **طرائق البحث** (تعاريف ومفاهيم أساسية):

1) الكواترنيون:

ويُعرّف الكواترنيون كما يلي: $H = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \, ; q_0, q_1, q_2, q_3 \in R\}$

حيث: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

و
$$jk = -kj = i$$
$$ki = -ik = j$$
$$ij = -ji = k$$

ويمكننا أيضاً أن نقدم الكواترنيون كزوج من الأعداد العقدية،كالتالي:

$$H = \{\gamma_1 + \gamma_2 j \, ; \, \gamma_1, \gamma_2 \in C\}$$

كما نعرف مرافق الكواترنيون بالشكل: $\bar{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$: و نظيمه بالعلاقة: $|q| = \sqrt{{q_0}^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2}$. أما مقلوبه فهو $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$. وللاطلاع على المزيد من بنية الكواترنيون وصيغه المختلفة وخواصه، يُمكن العودة للمراجع [6-7-8-9-10-11].

2) التابع ذو القيمة الكواترنيونية:

نقول عن تابع ما $f(t)$ إنه ذو قيمة كواترنيونية إذا كتب بالشكل:

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t) i + f_2(t) j + f_3(t) k$$

حيث $f_0(t), f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ توابع حقيقية لمتغير سواء كان من R أو C أو H .

3) تحويل فوريه الكواترنيوني:

لتحويل فوريه الكواترنيوني عدة علاقات وحالات منها:

a) نعرف تحويل فوريه الكواترنيوني أحادي البُعد $\hat{f_1}(w)$ على التابع $f \in L^1(R,H)$ بالشكل:

$$F_1\{f(t)\}(w) = \hat{f_1}(w) = \int_R f(t)e^{iwt}dt \quad ; t,w \in R$$

b) ليكن $f \in L^2(R^2,H)$

و $w = w_1e_1 + w_2e_2 \in R^2$ ، $t = t_1e_1 + t_2e_2 \in R^2$

عندئذٍ نعرف تحويل فوريه الكواترنيوني ثنائي الإشارة ذو الجانبين بالعلاقة التالية:

$$F_2\{f\}(w) = \hat{f_2}(w) = \int_{R^2} e^{-iw_1t_1} f(t)e^{-jw_2t_2}d^2t$$

c) ليكن $f \in L^1(H,H)$ تابع بمتغير وقيمة كواترنيونية عندئذٍ نُعرف تحويل فوريه الكواترنيوني رباعي الإشارة له بالعلاقة:

$$F_4\{f(t)\}(w) = \hat{f_4}(w) = \int_H e^{Iwt} f(t)d^4t \quad ; t,w \in H$$

حيث $I \in H$ ويحقق الشرط $I^2 = -1$:

4- النتائج ومناقشتها:

تحويل فوريه الكسري الكواترنيوني ثنائي البعد $2D-QFFT$

قدم بدايةً (إيل – Ell. T.A) مفهوم تحويل فوريه الكواترنيوني QFT عام 1993 وبعدها ظهر مفهوم تحويل فوريه الكسري FFT على يد مجموعة من الباحثين. كما هو معلوم فإنّ تحويل فوريه الكواترنيوني QFT ينقل الإشارات من مجال الوقت ذي القيمة الحقيقية إلى مجال التردد ذي القيمة الرباعية. لكن تحويل فوريه الكسري ثنائي الأبعاد المقترح سينقل الإشارة إلى مجالات زمنية ترددية موحدة. سنقدم تحويل فوريه الكسري ثنائي الأبعاد الكواترنيوني $(2D-QFFT)$ ونقوم باستنتاج الصيغة العكسية له واثبات العديد من الخواص. معتمدين على دمج المعلومات في المرجعين [5] و [2]. ونتبع ذلك بتطبيق التحويل المستحدث على معادلة التسخين في الحالة الكواترنيونية.

تعريف(1): ليكن $f \in L^2(R^2, H)$ عندئذٍ نعرف تحويل فوريه الكسري الكواترنيوني ثنائي البعد $2D-QFFT$ من المرتبة α, β كما يلي:

$$F_{\alpha,\beta}[f(x,y)] = \hat{f}_{\alpha,\beta}(w_1, w_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1\frac{1}{\alpha}u} f(u,v) e^{-jw_2\frac{1}{\beta}v} dudv \;;\; 0 < \alpha, \beta \leq 1$$

والتكامل الأخير يتقارب من w_1 ضمن الشريحة $-l_1 \leq Im(w_1) \leq l_1$ حيث $Re(iw_1) >$ ، l_1 ويتقارب من w_2 ضمن الشريحة $-l_2 \leq Im(w_2) \leq l_2$ حيث $Re(jw_2) > l_2$ ، وذلك حسب المرجع [12]. كما يمكن اعتبار تحقق الشرط : $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u,v)|dudv <$ ∞ شرطاً كافياً للتقارب.

الصيغة العكسية لـ $(2D-QFFT)$:

بالانطلاق من الصيغة العكسية لتحويل فوريه الكواترنيوني من الجانبين [2]

$$f(u,v) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu}\hat{f}_{\alpha,\beta}(x,y)e^{jyv}dxdy$$

وبوضع $x = w_1^{\frac{1}{\alpha}}, y = w_2^{\frac{1}{\beta}}$ عندئذٍ تصبع العلاقة بالشكل

$$f(u,v) = \frac{1}{\alpha\beta(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,w_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\, w_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\tilde{f}_{\alpha,\beta}(w_1,w_2)e^{jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} w_2^{\frac{1-\beta}{\beta}} d\,w_1 dw_2$$

ومنه صيغة فوريه العكسية لـ $(2D-QFFT)$ تعرف بالعلاقة:

$$F_{\alpha,\beta}^{-1}\{\hat{f}_{\alpha,\beta}(w_1,w_2)\} = \frac{1}{\alpha\beta(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,w_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\, w_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\hat{f}_{\alpha,\beta}(w_1,w_2)e^{jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} w_2^{\frac{1-\beta}{\beta}} d\,w_1 dw_2$$

مثال(1): لنوجد $2D-QFFT$ للتابع الآتي:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \;;\; -1 < x,y < 1 \\ 0 \;; \quad \text{غيرذلك} \end{cases}$$

$$F_{\alpha,\beta}[f(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u} f(x,y) e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} dxdy$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u} e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} dxdy$$

$$= \int_{-1}^{+1} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}x} dx \int_{-1}^{+1} e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}y} dy$$

$$= 4\frac{sinw_1^{\frac{1}{\alpha}}}{w_1^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{sinw_2^{\frac{1}{\beta}}}{w_2^{\frac{1}{\beta}}}$$

- ولنثبت الآن تحقق عدد من الخواص التالية في $2D-QFFT$.
-

1- الخاصة الخطية.

كون الخاصة التبديلية غير محققة في الكواترنيون سنناقش خاصية الخطية من الجانبين.

a) الخطية من اليمين :

من أجل $f_1, f_2 \in L^2(R^2, H)$ وثوابت كواترنيونية تحقق

$$k_1, k_2 \in \{q; q = q_0 + jq_2, q_0, q_2 \in R\}$$

عندئذٍ:

$$F_{\alpha,\beta}[f_1(u,v)k_1 + f_2(u,v)k_2] = F_{\alpha,\beta}[f_1(u,v)]k_1 + F_{\alpha,\beta}[f_2(u,v)]k_2:$$

الاثبات:

$$F_{\alpha,\beta}[f_1(u,v)]k_1 + F_{\alpha,\beta}[f_2(u,v)]k_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1\frac{1}{\alpha}u}[f_1(u,v)]k_1 + [f_2(u,v)]k_2\, e^{-jw_2\frac{1}{\beta}v}dudv$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1\frac{1}{\alpha}u}[f_1(u,v)]\ \ e^{-jw_2\frac{1}{\beta}v}dudvk_1 \quad +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1\frac{1}{\alpha}u}[f_2(u,v)]\ \ e^{-jw_2\frac{1}{\beta}v}dudvk_2$$

$$= F_{\alpha,\beta}[f_1(u,v)]k_1 + F_{\alpha,\beta}[f_2(u,v)]k_2$$

b) الخطية من اليسار:

من أجل $f_1, f_2 \in L^2(R^2, H)$ وثوابت كواترنيونية تحقق

$$l_1, l_2 \in \{q; q = q_0 + iq_1, q_0, q_1 \in R\}$$

عندئذٍ :

$$l_1\, F_{\alpha,\beta}[f_1(u,v)] + l_2F_{\alpha,\beta}[f_2(u,v)] = l_1F_{\alpha,\beta}[f_1(u,v)] + l_2F_{\alpha,\beta}[f_2(u,v)]$$

الاثبات:

$$l_1\, F_{\alpha,\beta}[f_1(u,v)] + l_2F_{\alpha,\beta}[f_2(u,v)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u} l_1[f_1(u,v)] + l_2[f_2(u,v)]\, e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} dudv$$

$$= l_1 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}[f_1(u,v)]\ \ e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} dudv +$$

$$l_2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}[f_2(u,v)]\ \ e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} dudv$$

$$= l_1 F_{\alpha,\beta}[f_1(u,v)] + l_2 F_{\alpha,\beta}[f_2(u,v)]$$

2- خاصية الإزاحة:

من أجل f تابع ذو قيمة كواترنيونية ، و $a,b \in R$ ، عندئذٍ :

$$F_{\alpha,\beta}[f(u-a,v-b)] = e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}a} F_{\alpha,\beta}[f(u,v)]\ \ e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}b}$$

الاثبات:

بالاعتماد على التعريف نجد

$$F_{\alpha,\beta}[f(u-a,v-b)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u} f(u-a,v-b) e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} dudv$$

وبوضع $s = u-a,\ t = v-b$ فتصبح العلاقة بالشكل:

$$F_{\alpha,\beta}[f(u-a,v-b)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}(s+a)} f(s,t) e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}(t+b)} dsdt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}a} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}s} f(s,t) e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}t} e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}b} dsdt$$

$$= e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}a} F_{\alpha,\beta}[f(s,t)]\ \ e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}b}$$

3- خاصية الالتفاف:

من أجل $f,g \in L^2(R^2,H)$ وحسب تعريف الالتفاف لتابعين

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)g(x-u, y-v)dudv$$

يتحقق لدينا ما يلي:

$(a)\ F_{\alpha,\beta}[f * g] = F_{\alpha,\beta}[f].F_{\alpha,\beta}[g]$

(b) $F_{\alpha,\beta}^{-1}\{F_{\alpha,\beta}[f].F_{\alpha,\beta}[g]\} = (f * g)(u,v)$

الاثبات:

$(a$ ليكن $f, g \in L^2(R^2, H)$ ولنفرض $X, Y, Z \in R^2$ بحيث

$$X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2), Z = (z_1, z_2)$$

عندئذٍ : $F_{\alpha,\beta}[f * g] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}x_1}(f * g)(X)e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}x_2}dX$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}x_1}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(Y)g(X-Y)dY\right\}e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}x_2}dX$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}x_1} f(Y)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(X-Y)e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}x_2}dX\right\}dY$$

وبوضع $Z = X - Y$ فتصبح العلاقة بالشكل:

$$F_{\alpha,\beta}[f * g] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}(y_1+z_1)} f(Y)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(Z)e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}(y_2+z_2)}dZ\right\}dY$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}y_1} f(Y)e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}y_2}dY\right).\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}z_1} f(Z)e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}z_2}dZ\right)$$

$$= F_{\alpha,\beta}[f].F_{\alpha,\beta}[g]$$

$F_{\alpha,\beta}^{-1}\{F_{\alpha,\beta}[f].F_{\alpha,\beta}[g]\} =$ $(b$

$$\frac{1}{\alpha\beta(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,w_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\, w_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}\acute{u}} f(\acute{u},\acute{v}) e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}\acute{v}} d\acute{u}d\acute{v}\,.\,F_{\alpha,\beta}\{g\}(w_1,w_2)\right] e^{jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} w_2^{\frac{1-\beta}{\beta}} d\,w_1 dw_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\acute{u},\acute{v})\left[\frac{1}{\alpha\beta(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iw_1^{\frac{1}{\alpha}}(u-\acute{u})}\, w_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\,.\,F_{\alpha,\beta}\{g\}(w_1,w_2) e^{jw_2^{\frac{1}{\beta}}(v-\acute{v})} w_2^{\frac{1-\beta}{\beta}} d\,w_1 dw_2\right] d\acute{u}d\acute{v}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\acute{u},\acute{v}) g(u-\acute{u},v-\acute{v}) d\acute{u}d\acute{v}$$

$$= (f * g)(u,v)$$

انطلاقاً من أهمية تحويل فوريه في حل المعادلات التفاضلية الجزئية ندرس ناتج تطبيق $2D-QFFT$ على المشتقات الجزئية.

4- ناتج $2D-QFFT$ على المشتقات الجزئية:

ليكن $f \in L^2(R^2,H)$ تابع ذو قيمة كواترنيونية ،عندئذٍ ناتج $2D-QFFT$ على المشتقات الجزئية لـ $f(u,v)$ تعطى كما يلي:

$$F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial}{\partial u} f(u,v)\right] = (iw_1^{\frac{1}{\alpha}}) F_{\alpha,\beta}[f(u,v)] \quad (1$$

$$F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^n}{\partial u^n} f(u,v)\right] = (iw_1^{\frac{1}{\alpha}})^n F_{\alpha,\beta}[f(u,v)] \quad (2$$

$$F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial}{\partial v} f(u,v)\right] = F_{\alpha,\beta}[f(u,v)](jw_2^{\frac{1}{\beta}}) \quad (3$$

$$F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^n}{\partial v^n} f(u,v)\right] = F_{\alpha,\beta}[f(u,v)](jw_2^{\frac{1}{\beta}})^n \quad (4$$

$$F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} f(u,v)\right] = (iw_1^{\frac{1}{\alpha}}) F_{\alpha,\beta}[f(u,v)](jw_2^{\frac{1}{\beta}}) \quad (5$$

الإثبات:

1) لدينا $F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial}{\partial u} f(u,v)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\frac{\partial}{\partial u} f(u,v) e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} dudv$

وبمكاملة التكامل الداخلي بالتجزئة نجد

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u} f(u,v) \right] - \int_{-\infty}^{+\infty} -iw_1^{\frac{1}{\alpha}} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u} f(u,v)du \right\} e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v}\, dv$$

$$= iw_1^{\frac{1}{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u} f(u,v) e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} dudv$$

$$= (iw_1^{\frac{1}{\alpha}})\ F_{\alpha,\beta}[f(u,v)]$$

2) لنثبت صحة العلاقة بالاعتماد على الاستقراء الرياضي. لتكن لدينا القضية :

$$E(n):\ F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^n}{\partial u^n} f(u,v)\right] = (iw_1^{\frac{1}{\alpha}})^n F_{\alpha,\beta}[f(u,v)]$$

لنثبت صحة القضية من أجل $(n = 1)$، (تم إثبات ذلك سابقاً)

$$E(1):\ F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial}{\partial u} f(u,v)\right] = (iw_1^{\frac{1}{\alpha}}) F_{\alpha,\beta}[f(u,v)]$$

لنفرض صحة القضية :

$$E(n):\ F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^n}{\partial u^n} f(u,v)\right] = (iw_1^{\frac{1}{\alpha}})^n F_{\alpha,\beta}[f(u,v)]$$

ولنثبت صحة القضية:

$$E(n+1):\ F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}} f(u,v)\right] = (iw_1^{\frac{1}{\alpha}})^{n+1} F_{\alpha,\beta}[f(u,v)]$$

$$F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}} f(u,v)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u} \frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}} f(u,v) e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} dudv$$

بمكاملة التكامل الداخلي بالتجزئة نجد:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u} \frac{\partial^n}{\partial u^n} f(u,v) \right] - \int_{-\infty}^{+\infty} -iw_1^{\frac{1}{\alpha}} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u} \frac{\partial^n}{\partial u^n} f(u,v)du \right\} e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v}\, dv$$

$$= iw_1^{\frac{1}{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u} \frac{\partial^n}{\partial u^n} f(u,v) e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} dudv$$

$$= iw_1^{\frac{1}{\alpha}}\left[(iw_1^{\frac{1}{\alpha}})^n F_{\alpha,\beta}[f(u,v)]\right]$$

$$= (iw_1^{\frac{1}{\alpha}})^{n+1} F_{\alpha,\beta}[f(u,v)]$$

ومنه القضية صحيحة من أجل أي $n \geq 1$.

$$F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial}{\partial v} f(u,v)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\frac{\partial}{\partial v} f(u,v) e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} du dv \qquad (3$$

وبمكاملة التكامل الداخلي بالتجزئة نجد:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\left\{\left[f(u,v)e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}u}\right] - \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v}(-jw_2^{\frac{1}{\beta}})\, dv\right\} du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u} f(u,v) e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v} du dv (jw_2^{\frac{1}{\beta}})$$

$$= F_{\alpha,\beta}[f(u,v)](jw_2^{\frac{1}{\beta}})$$

4) أيضا هنا سنثبت صحة العلاقة بالاستقراء الرياضي، لتكن لدينا القضية :

$$E(n): \quad F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^n}{\partial v^n} f(u,v)\right] = F_{\alpha,\beta}[f(u,v)](jw_2^{\frac{1}{\beta}})^n$$

لنثبت صحة القضية من أجل $n = 1$

$$E(1): \quad F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial}{\partial v} f(u,v)\right] = F_{\alpha,\beta}[f(u,v)](jw_2^{\frac{1}{\beta}})$$

وهذا تم إثباته سابقاً، ولنفرض صحة القضية :

$$E(n): \quad F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^n}{\partial v^n} f(u,v)\right] = F_{\alpha,\beta}[f(u,v)](jw_2^{\frac{1}{\beta}})^n$$

ولنثبت صحة القضية :

$$E(n+1): \quad F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial v^{n+1}} f(u,v)\right] = F_{\alpha,\beta}[f(u,v)](jw_2^{\frac{1}{\beta}})^{n+1}$$

$$F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial v^{n+1}}f(u,v)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\frac{\partial^{n+1}}{\partial v^{n+1}}f(u,v)e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v}dudv$$

بمكاملة التكامل الداخلي بالتجزئة نجد:

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\left\{\left[\frac{\partial^n}{\partial v^n}f(u,v)e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v}\right]-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^n}{\partial v^n}f(u,v)\left(-jw_2^{\frac{1}{\beta}}e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v}\right)dv\right\}du$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\frac{\partial^n}{\partial u^n}f(u,v)e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v}dudv\left(jw_2^{\frac{1}{\beta}}\right)$$

$$=\left[F_{\alpha,\beta}[f(u,v)](jw_2^{\frac{1}{\beta}})^n\right]jw_2^{\frac{1}{\beta}}$$

$$=F_{\alpha,\beta}[f(u,v)](jw_2^{\frac{1}{\beta}})^{n+1}$$

ومنه القضية صحيحة من أجل أي $n\geq 1$.

$$F_{\alpha,\beta}\left[\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}f(u,v)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\frac{\partial}{\partial v}f(u,v)e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v}dudv \qquad (5$$

وبمكاملة التكامل الداخلي بالتجزئة نجد :

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\frac{\partial}{\partial v}f(u,v)\right]-\int_{-\infty}^{+\infty}-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\frac{\partial}{\partial v}f(u,v)\,du\right\}e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}u}dv$$

$$=(iw_1^{\frac{1}{\alpha}})\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\frac{\partial}{\partial v}f(u,v)e^{-jw_2^{\frac{1}{\beta}}v}dudv$$

وبالمكاملة بالتجزئة مرة أخرى بالنسبة للمتغير v نجد

$$=(iw_1^{\frac{1}{\alpha}})\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}\left\{\left[f(u,v)e^{-Jw_2^{\frac{1}{\beta}}v}\right]-\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)e^{-Jw_2^{\frac{1}{\beta}}v}(-jw_2^{\frac{1}{\beta}})\,dv\right\}du$$

$$=(iw_1^{\frac{1}{\alpha}})\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iw_1^{\frac{1}{\alpha}}u}f(u,v)e^{-Jw_2^{\frac{1}{\beta}}v}\;dudv\;\right](jw_2^{\frac{1}{\beta}})$$

$$=(iw_1^{\frac{1}{\alpha}})\;F_{\alpha,\beta}[f(u,v)](jw_2^{\frac{1}{\beta}}) \qquad \square$$

تطبيق: (استخدام $2D-QFFT$ في حل معادلة التسخين في الحالة الكواترنيونية)

مثال (2) :

لتكن لدينا معادلة التسخين في الحالة الكواترنيونية التالية:

$$\frac{\partial g}{\partial t}-k(\frac{\partial^2 g}{\partial^2 u}+\frac{\partial^2 g}{\partial^2 v})=0$$

حيث $g(u,v,t):R^2\times R^+\to H$ مع الشرط الابتدائي $g(u,v,0)=f(u,v)$ و معامل الانتشار الحراري $k=1$.

الحل:

المعادلة التفاضلية تكتب بالشكل:

$$\frac{\partial g}{\partial t}=\frac{\partial^2 g}{\partial^2 u}+\frac{\partial^2 g}{\partial^2 v}$$

نطبق $2D-QFFT$ على طرفيها فنجد:

$$F_{\alpha,\beta}\left\{\frac{\partial g}{\partial t}\right\}=(iw_1{}^{\frac{1}{\alpha}})^2F_{\alpha,\beta}\{g\}+F_{\alpha,\beta}\{g\}(jw_2{}^{\frac{1}{\beta}})^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F_{\alpha,\beta}\{g\}=(-w_1{}^{\frac{2}{\alpha}}-w_2{}^{\frac{2}{\beta}})F_{\alpha,\beta}\{g\}$$

وهي معادلة تفاضلية يعطى حلها العام بالعلاقة:

$$F_{\alpha,\beta}\{g\}=C.e^{-(w_1{}^{\frac{2}{\alpha}}+w_2{}^{\frac{2}{\beta}})t}$$

حيث C ثابت كواترنيوني، ومن شرط المسألة نجد

$$F_{\alpha,\beta}\{g\}=e^{-(w_1{}^{\frac{2}{\alpha}}+w_2{}^{\frac{2}{\beta}})t}F_{\alpha,\beta}\{f\}$$

وبالاعتماد على [13] يمكن أن نضع:

$$e^{-(w_1{}^{\frac{2}{\alpha}}+w_2{}^{\frac{2}{\beta}})}=\frac{1}{4\pi t}F_{\alpha,\beta}\left\{e^{-\frac{(u^{\frac{2}{\alpha}}+v^{\frac{2}{\beta}})}{4t}}\right\}$$

ومنه نتوصل إلى أن

$$F_{\alpha,\beta}\{g\}=\left[\frac{1}{4\pi t}F_{\alpha,\beta}\left\{e^{-\frac{(u^{\frac{2}{\alpha}}+v^{\frac{2}{\beta}})}{4t}}\right\}.F_{\alpha,\beta}\{f\}\right]$$

وبأخذ التحويل العكسي لـ $2D-QFFT$ للطرفين نجد:

$$g=F_{\alpha,\beta}^{-1}\left[\frac{1}{4\pi t}F_{\alpha,\beta}\left\{e^{-\frac{(u^{\frac{2}{\alpha}}+v^{\frac{2}{\beta}})}{4t}}\right\}.F_{\alpha,\beta}\{f\}\right]$$

وبفرض أن $I_t(u,v)=\frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{(u^{\frac{2}{\alpha}}+v^{\frac{2}{\beta}})}{4t}}$ وحسب خاصية الالتفاف نجد:

$$g=I_t(u,v)*f$$
$$=I_t(u,v)*f_0+iI_t(u,v)*f_1+jI_t(u,v)*f_2+kI_t(u,v)*f_3$$

ولتكن $f_n\in L^p(R^2,R)\,;n=0,1,2,3$ عندئذٍ:

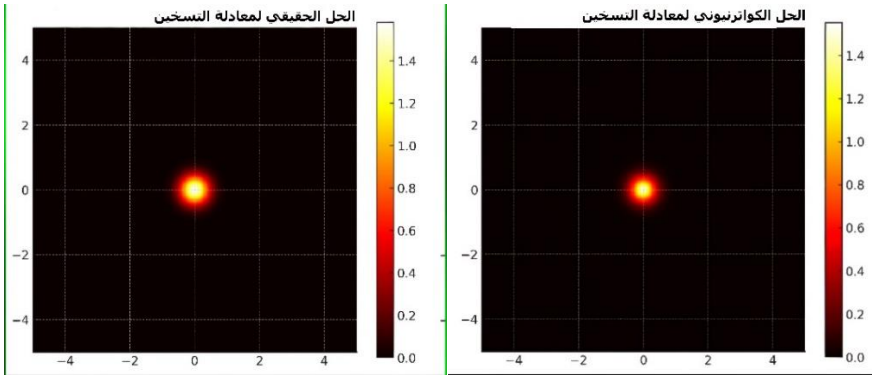
$$g_n=I_t(u,v)*f_n\ ;n=0,1,2,3$$

حلاً للمعادلة $\frac{\partial g_n}{\partial t}-\nabla^2 g_n=0$

وبالاعتماد على مبدأ التركيب للتابع الكواترنيوني نجد إن:

$$g=g_0+ig_1+jg_2+kg_3$$

حلاً لمعادلة التسخين الكواترنيونية. والصورتين التاليتين توضحان الفرق بين توزيع الحرارة في الحالة الحقيقية حيث ينتشر بشكل متماثل ومنتظم، بينما توزيع الحرارة بعد تطبيق تحويل فوريه الكسري حيث يظهر انتشاراً أبطأ عند الأطراف بسبب تأثير الرتبة الكسرية.



تحويل لابلاس الكوانتريوني QLT:

يُعتبر تحويل لابلاس مؤثر خطي يحول تابع لمتغير حقيقي $f(t)$ إلى تابع آخر $\tilde{f}(s)$ لمتغير عقدي ، وتحويل لابلاس هو تحويل تكاملي، وهو ذات أهمية كبيرة ويأتي مباشرة بعد تحويل فوريه من حيث الأهمية[14]. ويفيد تحويل لابلاس في دراسة المنظومات الخطية وكذلك في حل المعادلات التفاضلية العادية والتي يحولها إلى معادلات جبرية.

يعرف تحويل لابلاس وحيد الجانب وهو الأكثر انتشاراً وأهمية بالعلاقة:

$$L[f(t)] = \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

حيث $f(t)$ معرف من أجل $t \geq 0$.

والسؤال الذي يطرح نفسه، كيف يمكننا أن نعمم هذا التحويل إلى الكوانتريون؟ في دراستنا هنا ننطلق في التعميم بجعل التابع $f(t)$ ذو قيمة حقيقية إلى تابع ذو قيمة كوانتريونية مميزين بعدها حالتين بالاعتماد على قيمة الوسيط s كما يلي:

1) الحالة الأولى:

تعريف(2):

ليكن $f(t) = f_0(t) + f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$ تابع بمتغير حقيقي $t \geq 0$ وقيمة كواترنيونية و $s \in R$. عندئذٍ نعرف تحويل لابلاس الكواترنيوني للتابع $f(t)$ بالعلاقة:

$$L[f(t)] = \tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$
$$= \int_0^\infty (f_0(t) + f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k)e^{-st}dt$$
$$= \int_0^\infty f_0(t)e^{-st}dt + i\int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt + j\int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt + k\int_0^\infty f_3(t)e^{-st}dt$$
$$= L\{f_0\}(s) + iL\{f_1\}(s) + jL\{f_2\}(s) + kL\{f_3\}(s)$$

ووجود هذا التحويل يعتمد على تقارب التكاملات في الطرف الأيمن من العلاقة وهي شبيهة بشروط تقارب تحويل لابلاس التقليدي. كما نلاحظ أن $f(t)e^{-st} = e^{-st}f(t)$ كون بالفرض $s \in R$ ، وبالتالي يمكن أن نضع:

$$L[f(t)] = \tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

ويتضح بسهولة أن خواص تحويل لابلاس التقليدي يمكن تعميمها إلى هذه الحالة من تحويل لابلاس الكواترنيوني، خصوصاً وأن عملية الضرب بين $f(t)$ و e^{-st} تبديلية.

2) الحالة الثانية:

ليكن $f(t) = f_0(t) + f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$ و $s \in C$ ، وهي الحالة التي سنستطرد بها ونناقشها في دراستنا، كما سنعتمد عليها في حل المعادلات التفاضلية ذات القيمة الكواترنيونية والتي بطبيعتها أكثر تعقيداً من حل المعادلات التفاضلية العادية، وهو ما حفزنا إلى تطوير مفهوم تحويل لابلاس إلى الكواترنيون واستخدامه في حل المعادلات التفاضلية ذات المتغير الكواترنيوني.

تعريف(3):

ليكن $f(t) = f_0(t) + f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$ تابع بمتغير حقيقي $t \geq 0$ وقيمة كواترنيونية و $s = s_0 + is_1 \in C$. وهنا نلاحظ أن $f(t)e^{-st} \neq e^{-st}f(t)$، لذلك سيختلف تعريف تحويل لابلاس الكواترنيوني حسب موضع e^{-st} بالنسبة لـ$f(t)$ ، ومنه نميز بين الحالتين :

1- تحويل لابلاس الكواترنيوني الأيمن:

$$L_r\{f\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

2- تحويل لابلاس الكواترنيوني الأيسر:

$$L_\ell\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

ونعرف تحويل لابلاس الكواترنيوني العكسي بأنه التحويل L^{-1} الذي يحقق

$$L^{-1}[L\{f\}](t) = f(t)$$

- ولنبين العلاقة التي تربط بين $L_r\{f\}(s)$ و $L_\ell\{f\}(s)$.

$$L_\ell\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}[f_0(t) + f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k\ ]dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}[f_0(t) + f_1(t)i\ ]dt + \int_0^\infty e^{-st}[f_2(t)j + f_3(t)k\ ]dt$$

$$= \int_0^\infty [f_0(t) + f_1(t)i\ ]e^{-st}dt + \int_0^\infty [f_2(t)j + f_3(t)k\ ]e^{-\bar{s}t}dt$$

$$= L_r\{f_0\}(s) + iL_r\{f_1\}(s) + jL_r\{f_2\}(\bar{s}) + kL_r\{f_3\}(\bar{s})$$

وبشكل مشابه نجد أيضاً إن:

$$L_r\{f\}(s) = L_l\{f_0\}(s) + iL_l\{f_1\}(s) + jL_l\{f_2\}(\bar{s}) + kL_l\{f_3\}(\bar{s})$$

تعريف(4):

ليكن $f(t)$ تابع ذو قيمة كواترنيونية ، من أجل جميع القيم الحقيقية $t \geq 0$، نقول عن التابع $f(t)$ أنه تابع ذات درجة أسية من المرتبة $n \geq 0$ إذا وجد عددان حقيقيان موجبان m, k تتحقق من أجل جميع $t > m$ المتراجحة التالية:

$$|f(t)| \leq ke^{nt}$$.

من التعريف السابق نجد إن:

$$|f(t)| \leq \int_0^\infty \left|f(t)e^{-(s_0+is_1)t}\right|dt = \int_0^\infty |f(t)|.\left|e^{-(s_0+is_1)t}\right|dt$$

$$= \int_0^\infty |f(t)|.e^{-s_0 t}dt \leq \int_0^\infty ke^{nt}.e^{-s_0 t}dt = K\int_0^\infty e^{-(s_0-n)t}dt$$

$$= K\left[\frac{-1}{(s_0-n)}e^{-(s_0-n)t}\right]_0^\infty = \frac{K}{s_0-n} \quad ; s_0 > n$$

وهو ما يضمن لنا تقارب التكامل مطلقاً وبالتالي يضمن لنا وجود هذا التحويل ضمن الشروط المحددة.

التعريف الذي قدمناه لتحويل لابلاس الكواترنيوني يجعل الكثير من خواص تحويل لابلاس التقليدي تعمم إلى تحويل لابلاس الكواترنيوني باستثناء بعضها والمتأثر بشكل أساسي بالخاصة غير التبديلية للكواترنيون. وسنعتمد في اثبات الخواص على تحويل لابلاس الكواترنيوني الأيمن وبشكل مشابه تطبق على تحويل لابلاس الكواترنيوني الأيسر، كما يمكننا الاستعانة بالعلاقة التي تربط فيما بينهما لاستنتاج الخواص لتحويل لابلاس الكواترنيوني الأيسر.

خواص تحويل لابلاس الكواترنيوني QLT :

1- الخاصة الخطية:

ليكن $f(t)$ و $g(t)$ تابعان بقيم كواترنيونية و t متغير حقيقي موجب و $\alpha, \beta \in H$ ، عندئذٍ :

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha L\{f\}(s) + \beta L\{g\}(s)$$

الإثبات:

$$L\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\int_0^{\infty}[\alpha f(t)+\beta g(t)]e^{-st}dt$$

$$=\alpha\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt+\beta\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt=\alpha L\{f\}(s)+\beta L\{g\}(s)$$

2- ليكن $f(t)$ تابع بقيم كواترنيونية و t متغير حقيقي موجب، عندئذٍ:

$$L\{f(t-\alpha)\}(s)=L\{f\}(s)e^{-s\alpha}$$

الاثبات:

$$L\{f(t-\alpha)\}(s)=\int_0^{\infty}f(t-\alpha)e^{-st}dt$$

وبوضع $t-\alpha=x$ نجد:

$$=\int_0^{\infty}f(x)e^{-s(x+\alpha)}dx=\int_0^{\infty}f(x)e^{-sx}e^{-s\alpha}dx=L\{f\}(s)e^{-s\alpha}$$

3- ليكن $f(t)$ تابع بقيم كواترنيونية و t,α متغيران حقيقيان موجبان، عندئذٍ:

$$L\{f(\alpha t)\}(s)=\frac{1}{\alpha}L\{f\}(\frac{s}{\alpha})$$

الاثبات: $L\{f(\alpha t)\}(s)=\int_0^{\infty}f(\alpha t)e^{-st}dt$ وبوضع

$x=\alpha t$ نجد:

$$=\int_0^{\infty}f(x)e^{-s\frac{x}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}dx\ =\frac{1}{\alpha}L\{f\}(\frac{s}{\alpha})$$

4- ليكن $f(t)$ تابع بقيم كواترنيونية و t متغير حقيقي موجب و α عدد عقدي، عندئذٍ يتحقق ما يلي :

a- $L\{f(t)e^{\alpha t}\}(s)=L\{f\}(s-\alpha)$

b- $L\{e^{\alpha t}f(t)\}(s)=L\{f_0\}(s-\alpha)+iL\{f_1\}(s-\alpha)+jL\{f_2\}(s-\bar{\alpha})+kL\{f_3\}(s-\bar{\alpha})$

الإثبات:

a- $L\{f(t)e^{\alpha t}\}(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}e^{\alpha t}dt$

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-\alpha)t}dt = L\{f\}(s-\alpha)$$

$$L\{e^{\alpha t}f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{\alpha t}f(t)e^{-st}dt \qquad \text{–b}$$

$$= \int_0^\infty e^{\alpha t}[f_0(t) + f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k]e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty [f_0(t) + f_1(t)i]e^{-st}e^{\alpha t}dt + \int_0^\infty [f_2(t)j + f_3(t)k]e^{-st}e^{\bar{\alpha}t}dt$$

$$= \int_0^\infty f_0(t)e^{-(s-\alpha)t}dt + i\int_0^\infty f_1(t)e^{-(s-\alpha)t}dt +$$
$$j\int_0^\infty f_2(t)e^{-(s-\bar{\alpha})t}dt + k\int_0^\infty f_3(t)e^{-(s-\bar{\alpha})t}dt$$

$$= L\{f_0\}(s-\alpha) + iL\{f_1\}(s-\alpha) + jL\{f_2\}(s-\bar{\alpha}) + kL\{f_3\}(s-\bar{\alpha})$$

5– ليكن $f(t)$ تابع بقيم كواترنيونية وبفرض أنه مستمر ومن مرتبة أسية وكذلك مشتقاته حتى المرتبة n موجودة وذلك من أجل $t \geq 0$ عندئذٍ يتحقق:

$$L\{f^{(n)}(t)\}(s) = L\{f\}(s)s^n - f(0)s^{n-1} - f'(0)s^{n-2} - f''(0)s^{n-3} - \cdots$$
$$- f^{(n-1)}(0)$$

وبشكل آخر لدينا العلاقة المكافئة التالية والناتجة عن تبديل موضع المتغير s :

$$L\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^{n-2}[s^2L\{f_0 + if_1\}(s) + |s|^2L\{jf_0 + kf_1\}(s)] -$$
$$s^{n-1}f(0)s^{n-2} - f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

الإثبات: (بالاعتماد على مبدأ الإثبات بالتدريج) لنثبت صحة القضية من أجل $n = 1$

$$L\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$

وبالمكاملة بالتجزئة نجد:

$$= [e^{-st}f(t)]_0^\infty + \int_0^\infty f(t)se^{-st}dt = L\{f\}(s)s - f(0)$$

لنفرض صحة القضية من أجل n ولنثبت صحتها من أجل $n+1$

$$L\{f^{(n+1)}(t)\}(s) = \int_0^\infty \left(f^{(n+1)}(t)\right)e^{-st}dt = \int_0^\infty \left(f^{(n)}(t)\right)'e^{-st}dt$$

وبالمكاملة بالتجزئة نجد:

$$= \left[e^{-st}\left(f^{(n)}(t)\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(f^{(n)}(t)\right)se^{-st}dt$$

$$= -f^{(n)}(0) - \left(\int_0^{\infty}\left(f^{(n)}(t)\right)e^{-st}dt\right)s$$

$$= -f^{(n)}(0) - \Big(L\{f\}(s)s^n - f(0)s^{n-1} - f'(0)s^{n-2} - f''(0)s^{n-3} - \cdots - f^{(n-1)}(0)\Big)s$$

$$= L\{f\}(s)s^{n+1} - f(0)s^n - f'(0)s^{n-1} - f''(0)s^{n-2} - \cdots - f^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0)$$

ومنه القضية الرياضية المطروحة صحيحة من أجل $n \geq 1$.

ومن أجل إثبات صحة العلاقة المكافئة نستنتجها بسهولة بوضع

$$L\{f^{(n)}(t)\}(s) = L\{f\}(s)s^n - f(0)s^{n-1} - f'(0)s^{n-2} - f''(0)s^{n-3} - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$
$$= L\{f_0(t) + f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k\}(s)s^n - f(0)s^{n-1} - f'(0)s^{n-2} - f''(0)s^{n-3} - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$
$$= s^n L[f_0(t) + f_1(t)i](s) + \overline{s^n}L[f_2(t)j + f_3(t)k](s) - f(0)s^{n-1} - f'(0)s^{n-2} - f''(0)s^{n-3} - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$
$$= s^{n-2}[s^2L\{f_0 + if_1\}(s) + s\bar{s}L\{jf_0 + kf_1\}(s)] - s^{n-1}f(0)s^{n-2} - f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

6- ليكن $f(t)$ و $g(t)$ تابعان بقيم كواترنيونية و t متغير حقيقي موجب، عندئذٍ تحويل لابلاس الكواترنيوني لجدائهما الالتفافي يعطى بالعلاقة التالية:

$$L\{f * g\}(s) = L\{g\}(s)L\{f_0\}(s) + iL\{g\}(s)L\{f_1\}(s) + jL\{g\}(s)L\{f_2\}(s) + kL\{g\}(s)L\{f_3\}(s)$$

وكحالة خاصة من أجل $f(t)$ تابع بقيم كواترنيونية وتابع $g(t)$ بقيم عقدية و t متغير حقيقي موجب عندئذٍ يصبح لدينا تحويل لابلاس الكواترنيوني لهما بالشكل:

$$L\{f * g\}(s) = L\{f\}(s).L\{g\}(s)$$

الاثبات:

بالانطلاق من تعريف التفاف تابعين نجد:

$$L\{f*g\}(s)=\int_0^\infty (f*g)e^{-st}dt=\int_0^\infty\Big(\int_0^\infty f(t-x)g(x)dx\Big)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty\Big(\int_x^\infty f(t-x)g(x)\,e^{-st}dt\Big)dx$$ وبتغيير أولوية التكامل نجد

$$=\int_0^\infty\Big(\int_x^\infty f_0(t-x)g(x)\,e^{-st}dt+i\int_x^\infty f_1(t-x)g(x)\,e^{-st}dt\ +$$
$$j\int_x^\infty f_2(t-x)g(x)\,e^{-st}dt+k\int_x^\infty f_3(t-x)g(x)\,e^{-st}dt\Big)dx$$

وبفرض $y=t-x$ نجد:

$$=\int_0^\infty g(x)\Big(\int_0^\infty f_0(y)\,e^{-sy}dy\Big)e^{-sx}dx+$$
$$i\int_0^\infty g(x)\Big(\int_0^\infty f_1(y)\,e^{-sy}dy\Big)e^{-sx}dx+$$
$$j\int_0^\infty g(x)\Big(\int_0^\infty f_2(y)\,e^{-sy}dy\Big)e^{-sx}dx+$$
$$k\int_0^\infty g(x)\Big(\int_0^\infty f_3(y)\,e^{-sy}dy\Big)e^{-sx}dx$$

$$=\int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx\Big(\int_0^\infty f_0(y)\,e^{-sy}dy\Big)+$$
$$i\int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx\Big(\int_0^\infty f_1(y)\,e^{-sy}dy\Big)+$$
$$j\int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx\Big(\int_0^\infty f_2(y)\,e^{-sy}dy\Big)+$$
$$k\int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx\Big(\int_0^\infty f_3(y)\,e^{-sy}dy\Big)$$

$$=L\{g\}(s)L\{f_0\}(s)+iL\{g\}(s)L\{f_1\}(s)+$$
$$jL\{g\}(s)L\{f_2\}(s)+kL\{g\}(s)L\{f_3\}(s)$$

ولإثبات الحالة الخاصة لدينا

$$L\{f*g\}(s)=\int_0^\infty\left(\int_x^\infty[f_0(t-x)+if_1(t-x)+jf_2(t-x)\right.$$
$$\left.+kf_3(t-x)][g_0(x)+ig_1(x)]\,e^{-st}dt\right)dx$$

بالنشر و بفرض $y = t - x$ نجد:

$$L\{f * g\}(s) = \left(\int_0^\infty f_0(y)\, e^{-sy} dy\right) \int_0^\infty g_0(x) e^{-sx} dx + \left(\int_0^\infty f_0(y)\, e^{-sy} dy\right) \int_0^\infty i g_1(x) e^{-sx} + i\left(\int_0^\infty f_1(y)\, e^{-sy} dy\right) \int_0^\infty g_0(x) e^{-sx} dx + i\left(\int_0^\infty f_1(y)\, e^{-sy} dy\right) \int_0^\infty i g_1(x) e^{-sx} dx + j\left(\int_0^\infty f_2(y)\, e^{-sy} dy\right) \int_0^\infty g_0(x) e^{-sx} dx + j\left(\int_0^\infty f_2(y)\, e^{-sy} dy\right) \int_0^\infty i g_1(x) e^{-sx} dx + k\left(\int_0^\infty f_3(y)\, e^{-sy} dy\right) \int_0^\infty g_0(x) e^{-sx} dx + k\left(\int_0^\infty f_3(y)\, e^{-sy} dy\right) \left(\int_0^\infty g_1(x)\, e^{-sx} dx\right)$$

$$= L(f_0).L(g_0) + L(f_0).iL(g_1) + iL(f_1).L(g_0) + iL(f_1).iL(g_1) + jL(f_2).L(g_0) + jL(f_2).iL(g_1) + kL(f_3).L(g_0) + kL(f_3).iL(g_1)$$

$$= L(f_0).L(g_0) + iL(f_0).L(g_1) + iL(f_1).L(g_0) - L(f_1).L(g_1) + jL(f_2).L(g_0) - kL(f_2).L(g_1) + kL(f_3).L(g_0) - jL(f_3).L(g_1)$$

$$= L(f_0).L(g_0) - L(f_1).L(g_1) + i\big(L(f_0).L(g_1) + L(f_1).L(g_0)\big) + j\big(L(f_2).L(g_0) - L(f_3).L(g_1)\big) + k\big(L(f_3).L(g_0) - L(f_2).L(g_1)\big)$$

كما أن:

$$L\{f\}(s).L\{g\}(s) = \int_0^\infty [f_0(t) + f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k] e^{-st} dt. \int_0^\infty [g_0(t) + g_1(t)i] e^{-st} dt$$

$$= \left(\int_0^\infty [f_0(t)] e^{-st} dt + i \int_0^\infty [f_1(t)] e^{-st} dt + j \int_0^\infty [f_2(t)] e^{-st} dt + k \int_0^\infty [f_3(t)] e^{-st} dt\right).\left(\int_0^\infty [g_0(t)] e^{-st} dt + \int_0^\infty [g_1(t)i] e^{-st} dt\right)$$

$$= L(f_0).L(g_0) - L(f_1).L(g_1) + i\big(L(f_0).L(g_1) + L(f_1).L(g_0)\big) + j\big(L(f_2).L(g_0) - L(f_3).L(g_1)\big) + k\big(L(f_3).L(g_0) - L(f_2).L(g_1)\big)$$

□

نتيجة(1): في الحالة الخاصة عندما $L\{f*g\}(s)=L\{f\}(s).L\{g\}(s)$ بأخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين نجد

$$L^{-1}[L\{f\}(s).L\{g\}(s)]=\{f*g\}(t)$$

تطبيق: (إيجاد حلول لمعادلات تفاضلية عادية كواترنيونية باستخدام تحويل لابلاس الكواترنيوني)

مثال(3): لنوجد حل المعادلة التفاضلية التالية مع الشرط الابتدائي لها:

$$y'(t)+y(t)j=0 \quad ;y(0)=1+i$$

الحل: لنطبق تحويل لابلاس الكواترنيوني الأيمن على الطرفين فنجد:

$$L(y)s-(1+i)+L(y)j=0$$
$$L(y)(s+j)=1+i$$
$$L(y)=(1+i).\frac{1}{s+j}$$

والآن بتطبيق تحويل لابلاس الكواترنيوني العكسي فنجد

$$y(t)=(1+i)e^{-jt}$$

$y(0)=(1+i)e^{-j0}=1+i$ وللتأكد من الحل نجد أن الشرط الابتدائي محقق

كما أن $y'(t)=(1+i)(-j)e^{-jt}$ وبالتعويض بالمعادلة نجد أنها محققة حيث

$$\Rightarrow (1+i)(-j)e^{-jt}+(1+i)e^{-jt}j=(1+i)(-j)e^{-jt}+(1+i)(j)e^{-jt}=0$$

مثال (4): $y''-y=0 \quad ;y(0)=i\,,y'(0)=j$

الحل: نطبق تحويل لابلاس الكواترنيوني على طرفي المعادلة فنجد:

$$L(y)s^2-i(s)-j-L(y)=0$$
$$L(y)(s^2-1)=is+j$$
$$L(y)=\frac{is+j}{s^2-1}$$

وبالاعتماد على تفريق الكسور نجد:

$$\frac{is+j}{s^2-1}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}$$

$$is+j=A(s+1)+B(s-1)$$

$$is+j=(A+B)s+(A-B) \qquad \Rightarrow A=\frac{i+j}{2}\ ,\ B=\frac{i-j}{2}$$

$$L(y)=\frac{i+j}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{i-j}{2}\frac{1}{s+1}$$

وبتطبيق لابلاس الكواترنيوني العكسي على الطرفين فنجد:

$$y(t)=\frac{i+j}{2}e^{t}+\frac{i-j}{2}e^{-t}$$

مثال(5): $y'(t)+iy(t)=e^{2jt}\ \ ;y(0)=0$

الحل: بتطبيق تحويل لابلاس الكواترنيوني على طرفي المعادلة فنجد:

$$L(y)s-y(0)+iL(y)=\frac{1}{s-2j}$$

وتصبح المعادلة بالشكل $L(y)s-L(y)i=\frac{1}{s-2j}$

ومنه $L(y)(s-i)=\frac{1}{s-2j}$

$$L(y)=\frac{1}{s-2j}.\frac{1}{(s-i)}$$

وبتطبيق تحويل لابلاس الكواترنيوني العكسي على الطرفين فنجد:

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s-2j}.\frac{1}{(s-i)}\right]=e^{2jt}*e^{it}=\int_0^t e^{2j(t-x)}.e^{ix}dx$$

وكون العلاقة غير تبديلية في الكواترنيون سنحول التابع المكامل إلى تابع بدلالة التوابع المثلية كما يلي:

$$e^{2j(t-x)}.e^{ix} = [\cos(2t-2x) + jsin(2t-2x)].[\cos(x) + isin(x)]$$

$$= \cos(2t-2x)\cos(x) + i\cos(2t-2x)sin(x) + jsin(2t-2x)\cos(x) - ksin(2t-2x)sin(x)$$

$$= \frac{\cos(2t-x)+\cos(2t-3x)}{2} + i\frac{\sin(2t-x)-\sin(2t-3x)}{2} + j\frac{\sin(2t-x)+\sin(2t-3x)}{2} + k\frac{\cos(2t-x)-\cos(2t-3x)}{2}$$

وبمكاملة التابع السابق فنجد أن

$$y(t) = \left(-\frac{1}{2}\sin(2t-x) - \frac{1}{6}\sin(2t-3x)\right)_0^t + i\left(\frac{1}{2}\cos(2t-x) - \frac{1}{6}\cos(2t-3x)\right)_0^t + j\left(\frac{1}{2}\cos(2t-x) + \frac{1}{6}\cos(2t-3x)\right)_0^t + k\left(-\frac{1}{2}\sin(2t-x) - \frac{1}{6}\sin(2t-3x)\right)_0^t$$

وبالتعويض والاختصار نحصل على الحل بالشكل

$$y(t) = \left(-\frac{1}{3}sint + \frac{2}{3}sin2t\right) + i\left(\frac{1}{3}cost - \frac{1}{3}cos2t\right) + j\left(\frac{2}{3}cost - \frac{2}{3}cos2t\right) + k(-\frac{2}{3}sint + \frac{1}{3}sin2t)$$

5- الاستنتاجات والتوصيات:

استطعنا من خلال بحثنا تطوير وتعميم كل من تحويل فوروييه الكسري وتحويل لابلاس إلى الكواترنيون وفق شروط وصيغ محددة، كما استطعنا تطبيق هذين التحويلين في حل العديد من المعادلات التفاضلية الكواترنيونة وهو ما يعزز أهمية التحويلات الكواترنيونية التي تم تقديمها.

ونوصي بالمزيد من الدراسات لتعميم المزيد من التحويلات الرياضية إلى الكواترنيون وتوسيع مجالات تطبيقها.

6- **المراجع:**

[1]HITZER.E, (2015) - The Quaternion Domain Fourier Transform and its properties.pp.1-6,online ,Dol:10.1007/s00006-015-0620-3

[2] HITZER.E, (2007) - Quaternion Fourier Transform on Quaternion Fields and generalizations. Advances in Applied Clifford Algebras.vol 17.no 13,pp:497-517.

[3] HITZER.E, (2011) - A New Type of Quaternion Fourier Transforms Based on the Orthogonal Planes Split with One or Two General Pure Quaternions. AIP conference proceedings 1389,280-283

[4] BRACKX.F, E.HITZER.E and SANGWINE.S, (2012) - History of Quaternion and Clifford Fourier Transforms and Wavelets.

[**5]** ROMERO.L, CERUTTI.R, and LUQUE.L, (2011) - A new Fractional Fourier Transform and convolutions products. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 66, pp. 397–408.

[6] HANSON.A, (2006)-Visualizing Quaternions. By Elsevier Inc.
[7] KUTATELADZE.S, (1995)-Fundamentals of Functional Analysis. Sobolev institute of mathematics, Russian Academy of sciences, Novosibirsk, Russia.
[8] PEDROMORAIS.J, GEORGIEV.S, SPROBIG.W, (2014)-Real quaternionic calculus handbook. By Springer Basel.
[9] VOIGHT.J, (2014)-The arithmetic of quaternion algebras.

[10] GENTILI.C and STRUPPA.D, (2007)- A new theory of regular functions of a quaternionic variable, Advances in Mathematics, Vol. 216," pp 279-301, Elseiver Inc.

[11] LAVILLE.G, RAMADONOFF.I, (2005)-Holomorphic cliffordian functions. Preprint submitted to the arXiv.

[12] DAVIES.B, (1978)- Integral Transforms and their Applications, Springer.

[13] ZAYED.A, (2019)-Handbook of Function and Generalized Function Transformations, CRC press.

[14] HSU.T, (2018)- Applied Engineering Analysis, John wiley&sons.