استقرار حل جملة معادلات تكاملية تفاضلية من مرتبة كسرية باستخدام تابع ليبانوف التربيعي

ايمان احمد حسين[1] د. سامح العرجه[2]

ملخص

قدمنا من خلال هذا البحث طريقة فعالة لدراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية وهي طريقة ليبانوف، حيث أنه في البداية ذكرنا مبرهنات و تعاريف أساسية في الاستقرار بالإضافة إلى تعاريف و مفاهيم أساسية في الاشتقاق الكسري، ثمّ تطرقنا إلى عرض متراجحات أساسية لدراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية وهي تعتبر أداة مهمة في الدراسة، وانطلقنا في هذا البحث من دراسة استقرار جمل المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية ثمّ انتقلنا إلى دراسة استقرار جمل المعادلات التفاضلية الكسرية غير الخطية وبعد ذلك قمنا بدراسة استقرار جمل المعادلات التكاملية–التفاضلية الكسرية موضحين المعايير اللازمة لكل دراسة على حدا، ومن ثمّ دعمنا هذه الدراسات بأمثلة توضيحية.

كلمات مفتاحية: التفاضل والتكامل الكسري، تابع ليبانوف التربيعي، الاستقرار، القيم الذاتية.

Stability of A Class of Fractional-Order Systems Using Quadratic Lyapunov Functions

Abstrat

Through this research, we presented an effective method for studying the stability of solution of fractional differential systems, which is Lyapunov method.

Whereas at the beginning we mentioned theorems and basic definitions of stability in addition to definitions and basic concepts of fractional derivation, then we dealt with presenting basic inequalities to study the stability of solution of fractional differential systems, which is an important tool in the study. We started from studying the stability of linear fractional differential systems, then we moved on the studying the stability of nonlinear fractional differential systems. After that, we studied the stability of the fractional integro differential systems, explaining the necessary criteria for each study separately. Then we supported these studies with illustrative examples.

Keywords: fractional calculus, quadratic Lyapunov functions, stability, eigenvalues values

1-مقدمة:

إنّ حساب التفاضل والتكامل الكسري موضوع رياضي قديم يرجع تاريخه إلى القرن السابع عشر، وعلى الرغم من أنّ له تاريخاً طويلاً إلا أنه لم يتم استخدامه في الفيزياء والهندسة لسنوات عديدة، حيث أنه لمدة تزيد عن ثلاثة قرون تطورت نظرية حساب التفاضل والتكامل الكسري بشكل أساسي كمجال نظري للرياضيات فقط. وفي العقود القليلة الماضية أشار الكثير من الباحثين إلى أنّ العديد من مجالات الفيزياء[15] وهندسة التحكم [6] ومعالجة الإشارات [12] يمكن وصفها بدقة بالاعتماد على حساب التفاضل والتكامل الكسري.

المعادلات التفاضلية الكسرية والمعادلات التكاملية-التفاضلية الكسرية يتم استخدامها لنمذجة الكثير من المسائل العملية مثل الموجات الكهرومغناطيسية، اللزوجة، معادلات الانتشار وغير ذلك، تمّ إيلاء اهتمام كبير لدراسة حلول هذا النوع من المعادلات التفاضلية ومن ثمّ تمّ التطرق إلى دراسة كون هذه الحلول مستقرة أم غير مستقرة.

من خلال عدد كبير من الدراسات المخصصة للأنظمة الديناميكية الكسرية تمّ التوصل إلى أنّ كون هذه الأنظمة مستقرة على نطاق واسع يعد مؤشراً مهماً لأنظمة التحكم، وهناك عدة طرائق يتم اتباعها لدراسة استقرار الجمل التفاضلية الكسرية نذكر منها طريقة ليبانوف الثانية. في نظرية المعادلات التفاضلية الكسرية تعتبر توابع ليبانوف توابع عددية يمكن من استخدامها لإثبات استقرار حل معادلة تفاضلية.

تمّ تمديد طريقة ليبانوف المباشرة لدراسة استقرار الجمل التفاضلية الكسرية من قبل العالم Li [5]. إنّ طريقة ليباتوف الكسرية تعميم لفكرة أنّ شرط الاستقرار يوضع بالاعتماد على تابع ليبانوف

والمشتق الكسري لهذا التابع. إنّ قاعدة ليبنز غير صحيحة من أجل المشتقات من مراتب كسرية [12] لذلك لا توجد طريقة عامة لحساب المشتقات الكسرية لتابع ليبانوف. مؤخراً تمّ إجراء بعض التعديلات على طريقة ليبانوف المباشرة من أجل الجمل التفاضلية الكسرية [1] حيثُ تمّ وضع صيغة تربيعية لتابع ليبانوف من أجل مسألة دراسة استقرار حل جملة معادلات كسرية وتمّ التوصل إلى نتائج لدراسة استقرار حل جمل المعادلات التفاضلية الكسرية مشابهة لنتائج دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة $n\in\square$ [10].

2-أهمية البحث:

نظراً للدراسات المتزايدة في مجال استقرار حل جملة معادلات تفاضلية كسرية وجملة معادلات تكاملية-تفاضلية كسرية وللصعوبات البالغة التي تعترض الباحثين في تقدير كون حل الجمل المدروسة مستقراً أم لا نقدّم من خلال هذا البحث طريقة عملية وفعالة للحصول على الاستقرار، كون تابع ليبانوف يوفّر قالباً عملياً لمثل هذه الدراسات.

3-مشكلة البحث:

تأتي مشكلة البحث لتوضح الاستخدام الواسع لتابع ليبانوف في دراسة الاستقرار ضمن المجالات التطبيقية (فيزيائية-هندسية) نظم التحكم وغير ذلك.

4-مواد البحث:

تعاريف أساسية:

تعريف (1): تابع ليبانوف عبارة عن تابع مستمر: $V:\square^{n}\to\square^{+}$ يمتلك مشتقات مستمرة من المرتبة الأولى.

تعريف (2): يكون التابع $V(x,t)$ موجب تحديداً إذا كان:

$V(x,t)>0$ من أجل $x\neq 0$ و $V(x,t)=0$ من أجل $x=0$

تعريف (3): يكون التابع $V(x,t)$ شبه موجب تحديداً إذا كان:

$V(x,t)\geq 0$من أجل $x\neq 0$ و $V(x,t)=0$ من أجل $x=0$

طرائق ليبانوف في الاستقرار: [14]

الطريقة الأولى: لدراسة استقرار حل الجملة المدروسة ندرس استقرار حل الجملة الخطية الممثلة لثوابت الجملة المدروسة (أي الدراسة هنا تتم كما في حالة الجمل الخطية).

الطريقة الثانية: تعتمد هذه الطريقة على إيجاد تابع محدد موجب مشتقه أصغر من الصفر يدعى تابع ليبانوف إن وجود مثل هذا التابع يعني تماماً استقرار حل الجملة المدروسة. هذه الطريقة تصلح لدراسة استقرار حل الجملة التفاضلية الخطية وغير الخطية.

سوف نعتمد في دراستنا على الطريقة الثانية كونها أكثر فاعلية.

مبرهنة (1) (مبرهنة ليبانوف الأساسية في الاستقرار): [1]

ليكن لدينا تابع ليبانوف $V(x,t)$ ومشتقه $\dot{V}(x,t)$ فإذا تحقق:

1): $V(x,t)$ تابع موجب تحديداً و $\dot{V}(x,t)\leq 0$ فالحل الصفري للجملة المدروسة مستقر.

2): $V(x,t)$ تابع موجب تحديداً و $\dot{V}(x,t)<0$فالحل الصفري للجملة المدروسة مستقر استقراراً تقاربياً.

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن: كيف يمكننا إيجاد تابع ليبانوف؟

يمكن إيجاد تابع ليبانوف بالاعتماد على الصيغة التربيعية التالية: $V(t,x(t))=x^T(t)px(t)$

حيث $t\in[0,\infty), x(t)\in\mathbb{R}^n$ أما بالنسبة للمصفوفة p فهي مصفوفة موجبة متناظرة وأنّ $p\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

نتيجة (1): يكون التابع $V(t,x(t))$ موجب تحديداً إذا وفقط إذا كان كانت المصفوفة p موجبة تحديداً.

نتيجة (2): يكون التابع $V\left(t,x(t)\right)$ شبه موجب تحديداً إذا وفقط إذا كانت المصفوفة p شبه موجبة تحديداً.

ملاحظة (1): المصفوفة p تكون موجبة تحديداً إذا وفقط إذا كانت $\lambda_i(p)>0$ حيث $\lambda_i(p)$ القيم الذاتية للمصفوفة p.

ملاحظة (2): المصفوفة p تكون شبه موجبة تحديداً إذا وفقط إذا كانت $\lambda_i(p)\geq 0$.

المبرهنة القادمة توضح لنا طريقة إيجاد المصفوفة p.

مبرهنة (2): لتكن $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ عندئذ القضايا الآتية متكافئة:

(1) – جميع القيم الذاتية للمصفوفة A جزئها الحقيقي سالب.

(2) – من أجل كل مصفوفة $Q=Q^T>0$ يوجد حل وحيد $p=p^T>0$ لمعادلة ليبانوف الآتية:

$$A^T p+pA+Q=0$$

الإثبات: لنفرض أنّ الشرط الأول محقق ولنعرّف: $p=\int_0^{\infty}e^{A^T t}Qe^{At}dt$

عندئذ:

$$\mathrm{A}^T p+p\mathrm{A}=\int_0^{\infty}\left[\mathrm{A}^T e^{\mathrm{A}^T t}Qe^{\mathrm{A}t}+e^{\mathrm{A}^T t}Qe^{\mathrm{A}t}\mathrm{A}\right]dt=\left[e^{\mathrm{A}^T t}Qe^{\mathrm{A}t}\right]_0^{\infty}=-Q$$

حيث: $\lim_{t\to\infty}e^{\mathrm{A}^T t}Qe^{\mathrm{A}t}=0$

وهذا الحل وحيد أيضاً ولنثبت ذلك: نفرض جدلاً أنه يوجد حلين لمعادلة ليبانوف p_1,p_2 بحيث:

$$\mathrm{A}^T p_1+p_1\mathrm{A}+Q=0$$
$$\mathrm{A}^T p_2+p_2\mathrm{A}+Q=0$$

بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى نحصل على

$$\mathrm{A}^T\left(p_1-p_2\right)+\left(p_1-p_2\right)\mathrm{A}=0$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}0&=e^{\mathrm{A}^T t}\left[\mathrm{A}^T\left(p_1-p_2\right)+\left(p_1-p_2\right)\mathrm{A}\right]e^{\mathrm{A}t}\\&=e^{\mathrm{A}^T t}\mathrm{A}^T\left(p_1-p_2\right)e^{\mathrm{A}t}+e^{\mathrm{A}^T t}\left(p_1-p_2\right)\mathrm{A}e^{\mathrm{A}t}\\&=\frac{d}{dt}\left(e^{\mathrm{A}^T t}\left(p_1-p_2\right)e^{\mathrm{A}t}\right)\end{aligned}$$

هذا يعني بأنّ المقدار $e^{\mathrm{A}^T t}\left(p_1-p_2\right)e^{\mathrm{A}t}$ هو مقدار ثابت ومن أجل $\boxed{t=0}$ نحصل على

$$e^{\mathrm{A}^T t}\left(p_1-p_2\right)e^{\mathrm{A}t}=p_1-p_2$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $t\to\infty$ نحصل على أنّ $p_1-p_2=0\Leftarrow p_1=p_2$

تعريف (4): [5] نقول عن التابع المستمر $\gamma:[0,t]\to[0,\infty]$ أنه ينتمي إلى الصف K إذا كان متزايد تماماً ويحقق $\gamma(0)=0$.

تعرفنا في الدراسات السابقة على علاقات تمكننا من حساب التفاضل والتكامل من المرتبة $n\in\mathbb{N}$ ونقدّم فيما يلي تعاريف تمكننا من حساب التفاضل والتكامل من مرتبة $\alpha\in\mathbb{R}^+$.

تعريف (5): [4] يعرّف التكامل الكسري بالعلاقة:

$$\mathrm{I}^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}f(\tau)\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}d\tau\quad;n-1<\alpha<n$$

حيث $t\geq t_0$، $f(t)$ دالة اختيارية قابلة للمكاملة، I^α مؤثر التكامل الكسري،

$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}\exp(-t)dt$ دالة غاما و $\exp(.)$ الدالة الأسية.

تعريف (6): [11] مشتق ريمان–ليوفيل الكسري يعرف بالعلاقة:

$$ {}^{RL}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^{t} f(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \quad ; n-1 < \alpha < n $$

تعريف (7): [10] لتكن $t \in [t_0, T]$ ، $T > 0$ ، $f : [t_0, T] \to \square$ دالة قابلة للمفاضلة، مشتق كابتو الكسري للتابع f يعرف كما يلي

$$ D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^{t} f(\tau)^{(n)} (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \quad ; n-1 < \alpha < n $$

تمهيدية (1): [3,5] لتكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية الكسرية غير الخطية من الشكل:

$$ D^{\alpha} x(t) = Ax(t) + g(t, x); \alpha \in (0,1) $$

وليكن $V(t,x)$ تابع ليبانوف الموافق والتوابع γ_i حيث $i = 1,2,3$ هي توابع من الصف K عندئذ إذا كان:

$$ 1) \gamma_1(\|x\|) \le V(t,x) \le \gamma_2(\|x\|) $$
$$ 2) D^{\alpha} V(t,x) \le -\gamma_3(\|x\|) $$

فإنّ الحل الصفري $x = 0$ للجملة المدوسة يكون مستقر تقاربيا.

تمهيدية (2): [8] من أجل الصيغة التربيعية لتابع ليبانوف $V = x^T p x$ تتحقق المتراجحة:

$$ \lambda_{\min}(p)\|x\|^2 \le x^T p x \le \lambda_{\max}(p)\|x\|^2 $$

$\lambda_{\min}(p)$: القيمة الذاتية الصغرى للمصفوفة p

$\lambda_{\max}(p)$: القيمة الذاتية العظمى للمصفوفة p

ونذكر في هذا السياق مبرهنة تعتبر الركيزة الأساسية للدراسة.

مبرهنة (3): [2,8] من أجل المتجه $x(t)\in\mathbb{R}^n$ والقابل للاشتقاق بمساقطه التابعية تتحقق المتراجحة التالية:

$$D^{\alpha}\left(x(t)\,p\,x(t)\right)\le 2x(t)\,p\,D^{\alpha}x(t) \qquad (1)$$

$\alpha\in(0,1),\forall t\ge t_0$; $p\in\mathbb{R}^{n\times n}$ عبارة عن مصفوفة ثابتة موجبة بكل عناصرها.

الإثبات: دون المساس بعمومية المسألة سوف نعتبر هنا بأنّ: $p=\mathrm{I}$ عندئذ تصبح العلاقة (1) بالشكل:

$$D^{\alpha}\left(x(t)\,\mathrm{I}\,x(t)\right)\le 2x(t)\,\mathrm{I}\,D^{\alpha}x(t) \quad\Rightarrow$$

$$D^{\alpha}x^{2}(t)\le 2x(t)D^{\alpha}x(t) \qquad (2)$$

إن إثبات (2) مكافئ لإثبات

$$x(t)D^{\alpha}x(t)-\frac{1}{2}D^{\alpha}x^{2}(t)\ge 0\ ;\alpha\in(0,1) \qquad (3)$$

باستخدام التعريف (7) نضع:

$$D^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\ ;n=1$$

كما أنّ:

$$\frac{1}{2}D^{\alpha}x^{2}(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{x(\tau)\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau$$

إذاً العلاقة (3) تصبح بالشكل:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{|x(t)-x(\tau)|}{(t-\tau)^{\alpha}}\dot{x}(\tau)d\tau\ge 0 \qquad (4)$$

وبفرض أنّ: $y(\tau)=x(t)-x(\tau)$ والذي يقتضي بأنّ: $y'(\tau)=\frac{dy(\tau)}{d\tau}=-\frac{dx(\tau)}{d\tau}$

إذاً العلاقة (4) تكتب بالشكل:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y(\tau)y'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\le 0 \qquad (5)$$

بمكاملة العلاقة (5) بالتجزئة حيث تفرض أنّ:

$$du=y(\tau)y'(\tau)d\tau, u=\frac{1}{2}y^2$$
$$v=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha}, dv=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha-1}$$

إذاً العلاقة (5) يمكن كتابتها بالشكل

$$-\left[\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha}}\right]\Bigg|_{\tau=t}+\left[\frac{y_0^2}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^2}\right]+\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}}d\tau\ge 0 \qquad (6)$$

بأخذ نهاية طرفي العلاقة (6) عندما $t\to\tau$

$$\lim_{t\to\tau}\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha}}=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{t\to\tau}\frac{|x(t)-x(\tau)|^2}{(t-\tau)}=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{t\to\tau}\frac{\left[x^2-2x(t)x(t)+x^2\right]}{(t-\tau)^{\alpha}}$$

باستخدام قاعدة أوبيتال

$$\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{t\to\tau}\frac{\left[x^2-2x(t)x(t)+x^2\right]}{(t-\tau)^{\alpha}}=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{t\to\tau}\frac{\left[-2x(t)\dot{x}(\tau)+2x(\tau)\dot{x}(t)\right]}{-\alpha(t-\tau)^{\alpha-1}}=0$$

إذاً العلاقة (6) تكتب بالشكل:

$$\frac{y_0^2}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^{\alpha}}+\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}}d\tau\geq 0 \qquad (7)$$

إذاً العلاقة صحيحة (7) وبهذا يتم المطلوب.

وكنتيجة على هذه المبرهنة نذكر

نتيجة (3): [11] من أجل المتجه $x(t)\in\mathbb{R}^n$ والقابل للاشتقاق بمساقطه التابعية عندها تتحقق المتراجحة التالية:

$$D^{\alpha}\left(x^T(t)\,p\,x(t)\right)\leq 2x^T(t)\,p\,D^{\alpha}x(t) \quad ;\ \alpha\in(0,1)$$

$\forall t\geq t_0$ حيث $p\in\mathbb{R}^{n\times n}$ عبارة عن مصفوفة ثابتة موجبة بكل عناصرها.

المبرهنة القادمة توضح لنا الشروط الواجب تحققها لكي يكون حل الجملة المدروسة مستقراً

مبرهنة (4): [11] بفرض أنه لدينا الجملة الخطية التالية:

$$D^{\alpha}x(t)=\mathrm{A}x(t) \qquad (8)$$

حيث $\alpha\in(0,1)$, $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ عبارة عن مصفوفة عناصرها ثابتة, $x=(x_1,x_2,.....,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$

إذا كانت المصفوفة A جميع عناصرها تحقق $\mathrm{Re}\,\lambda(\mathrm{A})<0$ والمصفوفة p هي حل للمعادلة $p\mathrm{A}+\mathrm{A}^T p=-\mathrm{I}$ حيث I المصفوفة الواحدية عندها الحل الصفري للجملة (8) مستقر تقاربياً.

الإثبات: لنأخذ تابع ليبانوف بالصيغة التربيعية: $V(t,x(t))=x^T px\ ;\ p>0,\ p\in\mathbb{R}^{n\times n}$

الآن لدينا بحسب المبرهنة (3) والنتيجة (3) نكتب:

$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le 2x^{T}(t)pD^{\alpha}x(t)=2x^{T}(t)p\cdot \mathrm{A}x(t)$$
$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le x^{T}(t)p\,\mathrm{A}x(t)+x^{T}(t)(p\,\mathrm{A})^{T}x(t)=$$
$$\Rightarrow D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le x^{T}(t)\left(p\,\mathrm{A}+(p\,\mathrm{A})^{T}\right)x(t)=-x^{T}x=-\|x\|^{2}$$

بأخذ:

$$\lambda_{\min}(p)\|x\|^{2}=\gamma_{1}\left(\|x\|\right)\quad ,\lambda_{\max}(p)\|x\|^{2}=\gamma_{2}\left(\|x\|\right)\quad ,\|x\|^{2}=\gamma_{3}\left(\|x\|\right)$$

بالاعتماد على التمهيدية (2) والتمهيدية (1) نحصل على الاستقرار التقاربي لحل الجملة (8).

وإذا ما أردنا تعميم النتيجة التي تمّ التوصل إليها في المبرهنة (4) من أجل الجمل الغير خطية من الشكل:

$$D^{\alpha}x(t)=\mathrm{A}x(t)+f\left(t,x(t)\right)\qquad (9)$$

حيث $x=(x_1,x_2,.....,x_n)^{T}\in\mathbb{R}^{n},\alpha\in(0,1),\mathrm{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ أما من أجل التابع $f\left(t,x(t)\right)$ حيث

$f:[t_0,\infty[\times\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$ تابع غير خطي بالمتجه x والزمن t وأنّ التابع $f\left(t,x(t)\right)$ يحقق $f\left(t,x(t)\right)=0$

لنفرض الآن بأنه يوجد عدد $\varepsilon>0$ بحيث $\left\|f\left(t,x(t)\right)\right\|\le\varepsilon\|x\|\ ;\ x\in\mathbb{R}^{n},t\in[t_0,\infty[$

فإننا سنذكر شروط جديدة يجب تحققها للحصول على استقرار الحل للجملة المدروسة وذلك من خلال المبرهنة التالية.

مبرهنة (5): [8] لنأخذ الجملة (9) بحيث المصفوفة A الثابتة تحقق أن $\mathrm{Re}\lambda(\mathrm{A})<0$ وإذا كانت المصفوفة p التي تمثل حل المعادلة $p\mathrm{A}+\mathrm{A}^T p=-\mathrm{I}$ تحقق $1-2\varepsilon\lambda_{\max}(p)>0$ عندها الحل الصفري للجملة (9) مستقر تقاربياً وحيث أنّ I هي المصفوفة الواحدية.

الإثبات: لنفرض تابع ليبانوف بالصيغة التربيعية $V(t,x(t))=x^T px\ ;\ p>0, p\in\mathbb{R}^{n\times n}$

بحسب المبرهنة (3) والنتيجة (3) نكتب:

$$D^{\alpha}V(t,x(t))\le 2x^T(t)pD^{\alpha}x(t)=x^T\left[p\mathrm{A}+(p\mathrm{A})^T\right]x+2x^T pf(t,x(t))$$

الآن وباستخدام متراجحة كوشي شفارتز

$$x^T pf(t,x(t))\le\|x\|\|p\|\|f(t,x(t))\|\le\|x\|\lambda_{\max}(p)\|f(t,x(t))\|$$

$$x^T pf(t,x(t))\le\|x\|\lambda_{\max}(p)\varepsilon\|x\|=\lambda_{\max}(p)\varepsilon\|x\|^2=\varepsilon\lambda_{\max}(p)x^T x$$

$$D^{\alpha}V(t,x(t))\le x^T\left[p\mathrm{A}+(p\mathrm{A})^T\right]x+2\varepsilon\lambda_{\max}(p)x^T x$$

$$D^{\alpha}V(t,x(t))\le -x^T x+2\varepsilon\lambda_{\max}(p)x^T x=-(1-2\varepsilon\lambda_{\max}(p))\|x\|^2$$

بأخذ $1-2\varepsilon\lambda_{\max}(p)$ حسب الفرض و:

$$\gamma_1(\|x\|)=\lambda_{\min}(p)\|x\|^2\ ,\ \gamma_2(\|x\|)=\lambda_{\max}(p)\|x\|^2\ ,\ \gamma_3(\|x\|)=(1-2\varepsilon\lambda_{\max}(p))\|x\|^2$$

نجد أنه من أجل تابع ليبانوف المفروض نحصل على الاستقرار التقاربي للحل الصفري للجملة المدروسة.

الآن لو كانت لدينا الجملة:

$$D^{\alpha}x(t)=\mathrm{A}x(t)+\mathrm{I}^{\alpha}f(t,x(t)) \qquad (10)$$

$x=(x_1,x_2,.....,x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \alpha \in (0,1), \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ أما من أجل التابع $f(t,x(t))$ حيث

$f:[t_0,\infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابع غير خطي بالمتجه x والزمن t وأنّ التابع $f(t,x(t))$ يحقق $f(t,x(t))=0$

لنفرض الآن بأنه يوجد عدد $\varepsilon>0$ بحيث $\|f(t,x(t))\| \le \varepsilon \|x\|\ ;\ x\in \mathbb{R}^n, t\in[t_0,\infty[$

وباستخدام التمهيدية (1) والتمهيدية (2) يمكن وضع المبرهنة التالية:

مبرهنة (6): لنأخذ الجملة (10) بحيث المصفوفة A الثابتة تحقق أنّ $\mathrm{Re}\,\lambda(\mathrm{A})<0$ وإذا كانت المصفوفة p التي تمثل حل المعادلة $p\mathrm{A}+\mathrm{A}^T p=-\mathrm{I}$ تحقق $\left(1-2\frac{\varepsilon}{\alpha\Gamma(\alpha)}\lambda_{\max}(p)\|t^{\alpha}\|\right)>0$ عندها الحل الصفري للجملة (10) يكون مستقر تقاربياً.

الإثبات: لنفرض تابع ليبانوف بالصيغة التربيعية $V(t,x(t))=x^T px\ ;\ p>0, p\in\mathbb{R}^{n\times n}$

بحسب المبرهنة (3) والنتيجة (3) نكتب:

$$D^{\alpha}V(t,x(t)\le 2x^T pD^{\alpha}x=x^T\left[p\mathrm{A}+(p\mathrm{A})^T\right]x+2x^T p\mathrm{I}^{\alpha}f(t,x(t))$$

وباستخدام متراجحة كوشي شفارتز

$$x^T p\,\mathrm{I}^{\alpha}f(t,x(t))\le\|x^T\|\|p\|\|\mathrm{I}^{\alpha}f(t,x(t)\|$$

لكن

$$\|\mathrm{I}^{\alpha}f(t,x(t)\|\le\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,x(\tau))d\tau\right\|\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\|(t-\tau)^{\alpha-1}\|\|f(\tau,x(\tau))\|d\tau$$

$$\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\varepsilon\int_0^t\|(t-\tau)^{\alpha-1}\|\|x\|d\tau=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\varepsilon\|x\|\left\{-\frac{1}{\alpha}(t-\tau)^{\alpha}\Big|_0^t\right\}=\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\varepsilon\|x\|\|t^{\alpha}\|$$

$$\Rightarrow x^T p\mathrm{I}^{\alpha} f\left(t,x\left(t\right)\right) \le \left\|x\right\|\left\|p\right\|\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\varepsilon\left\|x\right\|\left\|t^{\alpha}\right\|$$

$$x^T p\mathrm{I}^{\alpha} f\left(t,x\left(t\right)\right) \le \left\|x\right\|^2 \lambda_{\max}\left(p\right)\frac{\varepsilon}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left\|t^{\alpha}\right\|$$

$$\Rightarrow x^T p\mathrm{I}^{\alpha} f\left(t,x\left(t\right)\right) \le x^T x\,\lambda_{\max}\left(p\right)\frac{\varepsilon}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left\|t^{\alpha}\right\|$$

$$\Rightarrow D^{\alpha}V\left(t,x\left(t\right)\right) \le -x^T x + 2x^T x\,\lambda_{\max}\left(p\right)\frac{\varepsilon}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left\|t^{\alpha}\right\|$$

$$D^{\alpha}V\left(t,x\left(t\right)\right) \le -\left(1-\frac{2\varepsilon}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\lambda_{\max}\left(p\right)\left\|t^{\alpha}\right\|\right)\left\|x\right\|^2$$

لدينا حسب الفرض $\left(1-2\frac{\varepsilon}{\alpha\Gamma\left(\alpha\right)}\lambda_{\max}\left(p\right)\left\|t^{\alpha}\right\|\right)>0$ وبأخذ

$$\gamma_1\left(\left\|x\right\|\right)=\lambda_{\min}\left(p\right)\left\|x\right\|^2,\ \gamma_2\left(\left\|x\right\|\right)=\lambda_{\max}\left(p\right)\left\|x\right\|^2,\ \gamma_3\left(\left\|x\right\|\right)=\left(1-\frac{2\varepsilon}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\lambda_{\max}\left(p\right)\left\|t^{\alpha}\right\|\right)\left\|x\right\|^2$$

نجد أنه من أجل تابع ليبانوف المفروض أنّ الحل الصفري للجملة المدروسة مستقر تقاربياً.

وفيما يلي نقدم أمثلة توضيحية حول ما تم ذكره.

مثال (1): بفرض أنه لدينا جملة المعادلات التفاضلية الكسرية:

$$D^{\alpha}x\left(t\right)=\mathrm{A}x\left(t\right)+f\left(t,x\left(t\right)\right);\ 0<\alpha\le 1$$

حيث أنّ:

$$x\left(t\right)=\left(x_1(t),x_2(t)\right)^T,\ f\left(t,x\left(t\right)\right)=\left(\frac{1}{2}\sin x_1(t),\frac{1}{2}\sin x_2(t)\right)^T,\ \mathrm{A}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

هنا لدينا:

$$\left\|f\left(t,x\left(t\right)\right)\right\|=\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 x_1(t)+\frac{1}{4}\sin^2 x_2(t)}\le\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)}\le\frac{1}{2}\left\|x\left(t\right)\right\|$$

إذاً ثابت ليبشتز $\varepsilon=\frac{1}{2}$

كما أنّ المصفوفة الموجبة p تحقق $\mathrm{A}^T p+p\mathrm{A}=-Q\ ;Q=\mathrm{I}$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & -3\end{bmatrix}=-\mathrm{I}$$

$$\begin{bmatrix}-p_1 & -p_2\\ 4p_1-3p_3 & 4p_3-3p_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-p_1 & 4p_1-3p_2\\ -p_3 & 4p_3-3p_4\end{bmatrix}=-\mathrm{I}$$

$$\begin{bmatrix}-2p_1 & 4p_1-4p_2\\ 4p_1-4p_3 & 8p_3-6p_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}-2p_1&=-1\\ +4p_1-4p_3&=0\\ +8p_3-6p_4&=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow p=\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda_{\max}(p)=\frac{5}{6}$$

لدينا $1-2\varepsilon\lambda_{\max}(p)=1-2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{6}>0$

إذاً حل الجملة المدروسة مستقر تقاربياً حسب المبرهنة (5)

مثال (2): بفرض أنه لدينا جملة المعادلات التكاملية التفاضلية الكسرية:

$$D^{\alpha}x\left(t\right)=\mathrm{A}x\left(t\right)+\mathrm{I}^{\alpha}f\left(t,x\left(t\right)\right);\ 0<\alpha\le1$$

باعتبار أنّ

$$x(t)=\left(x_1(t),x_2(t)\right)^T,\ f\left(t,x(t)\right)=\left(\sin x_1(t),\sin x_2(t)\right)^T,\ \mathrm{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

هنا لدينا

$$\left\|f\left(t,x(t)\right)\right\|=\sqrt{\sin^2 x_1(t)+\sin^2 x_2(t)}\le\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)}=\left\|x(t)\right\|$$

إذاً ثابت ليبشتز $\boxed{\varepsilon=1}$

لنوجد الآن مصفوفة موجبة p تحقق $\mathrm{A}^T p+p\mathrm{A}=-Q\ ;Q=\mathrm{I}$

$$\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_3 & p_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-3p_1+p_3 & -3p_2+p_4\\ p_1-2p_2 & p_2-2p_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3p_1+p_2 & p_1-2p_2\\ -3p_3+p_4 & p_3-2p_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

بالحل نحصل على أنّ $p_1=p_4=1\ \&\ p_2=p_3=0$

$$\Rightarrow p=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

وبالتالي

$$V\left(t,x(t)\right)=x^T x=\left\|x\right\|^2>0$$

كما أنّ

$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le 2x^T(t)D^{\alpha}=\left[\mathrm{A}x+f\left(t,x(t)\right)\right]^T x+x^T\left[\mathrm{A}x+f\left(t,x(t)\right)\right]$$
$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le -6x_1^2+4x_1x_2-4x_2^2+2x_1\sin x_1+2x_2\sin x_2$$
$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le -6x_1^2+4x_1x_2-4x_2^2+2x_1^2+2x_2^2$$
$$D^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)\le -4x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2\le -4\left(x_1-\frac{1}{2}x_2\right)^2-x_2^2$$

إذاً الحل الصفري للجملة المدروسة مستقر حسب المبرهنة الأساسية في الاستقرار كون أننا استطعنا إيجاد تابع ليبانوف الموجب $V\left(t,x(t)\right)$ ومشتقه السالب $D_{*}^{\alpha}V\left(t,x(t)\right)<0$

يمكن التوصل إلى نفس النتيجة بالاعتماد على المبرهنة (6)

حيث أنّ $t\in\left[0,\frac{1}{16}\right],\alpha=\frac{1}{2},\varepsilon=1,\lambda_{\max}(p)=1$

وبالتالي

$$1-2\frac{\varepsilon}{\alpha\Gamma(\alpha)}\lambda_{\max}(p)\left\|t^{\alpha}\right\|=1-2\frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(1)\left(\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}>0$$

إذاً الحل الصفري للجملة المدروسة مستقر.

التوصيات والاستنتاجات: من خلال البحث المقدم حصلنا على النتائج التالية:

- إمكانية جعل جملة معادلات تكاملية–تفاضلية من مرتبة كسرية مستقرة وذلك باستخدام الصيغة التربيعية لتابع ليبانوف.
- إنّ الشروط اللازمة للحصول على استقرار الجملة المدروسة تكون أسهل فيما لو استخدمنا تابع ليبانوف في الإثبات.
- في دراساتنا القادمة سوف نتعمق في توضيح وشرح الأهمية النظرية والتطبيقية لتابع ليبانوف ودوره في استقرار الجمل الديناميكية.
- في الأبحاث القادمة سنوضّح أهمية الاشتقاق الكسري في التطبيقات الفيزيائية.

المراجع :

1-Benzaouia, A., Hmamed, A., Mesquiene, F., Benhayoun, M. and Tadeo, F., 2014-Stabilization of Continous- Time Fractional Positive Systems by Using a Lyapunov Function, IEEE Trans Autom. Cntrol, 59 (8): 2203- 2208.

2-Camacho, N.A., Mermoud, M. A. D. and Gallegos, J. A., 2014- Lyapunov Functions for Fractional Order Systems, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 19(9): 2951-2957.

3-Chen, Y. and Dadras, S., 2017- A Note On the Lyapunov Stability of Fractional- Order Nonlinear Systems.

4-Chen, L., He, Y., Wu, R. and Chai, Y., 2014- New Results On Stability and Stabilization of a Class of Non Linear Fractional Order Systems, Non Linear Dynamics, 75(4): 633-641.

5-Chen, Y. Q., Li, Y. and Podlubny, I., 2010- Stability of Fractional- Order Non Linear Dynamic Systemes: Lyapunov Direct Method and Generalized Mittag- Leffler Stability, Computers and Mathematics with Applications, 59(5): 1810-1821.

6-Chen, Y. Q. and Luo, Y., 2009- Fractional Order [Proportional Derivative] Controller for A Class of Fractional Order Systems, Automatica, 45(10): 2446-2450.

7-Chen, Y.Q. and Moore, K. L., 2002- Analytical Stability Bound for A Class of Delayed Fractional Order Dynamic Systems, Non Linear Dynamics, 29(1): 191-200.

8- Che, C., Xu, Q., Zhuang, S., Xu, X. and Xia, Y., 2018- Stabilization of A Class of Fractional- Order No Autonomous Systems Using Quadratic Lyapunov Functions, Advances in Difference Equations, (1): 1-14.

9-Ckreece, P. C. J., 2018- Finite Time Stability Criteria for Non Linear Foorder Dynamical Systems, Mathematical Theory and Modeling, 8(4): 145-155.

10-Hu, J. B., Lu, G.P., Zhang, S.B. and Zhao, L. D., 2015- Lyapunov Stability Theorem About Fractional System Without and with Delay, Communications in Non Linear Science and Numerical Simulation, 20(3): 905- 913.

11-Jiang, W., Liu, S., Li, X. and Zhou, X. F., 2016- Lyapunov Stability Analysis of Fractional Non Linear Systems, Applied Mathematics, 51(87): 13-19.

12-Magin, R., Ortigueira, M. D., Podlubny, I. and Trujillo, J., 2011- On The Fractional Signals and Systems, Signals Processing, 91(3): 350- 371.

13-Tarasov, V. E., 2013- No Violation of the Leibns Rule. No Fractional Derivative, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 18 (11): 2945- 2948.

14-Trinh, M. H. and Tuan, H. T., 2018- Stability of Fractioal Order Non Linear Systems by Lyapunov Direct Method, ET Control Theory and Applications, 12(7): 1-14.

15-Valdes- Parad, F. J. and Ocha- Tapia, J. A., 2007- Effective Medium Equations for Fractional Fick's Law In Porous Media, Physica A, 373(): 339-353.