أنصاف الزّمر على مجموعة الخماسيّات الفيثاغوريّة

الباحث: الدكتور باسل حمدو العرنوس

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كليّة العلوم – جامعة حمص

ملخّص البحث

قمنا في هذا البحث بتعريف عمليّة ثنائيّة مغلقة * على مجموعة الخماسيّات الفيثاغوريّة PP_5، على النحو الآتي:

ليكن $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5),(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in PP_5$، نعرّف على PP_5 العمليّة الثّنائيّة الآتية:

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$$

حيث:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4\\ c_2 &= a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3\\ c_3 &= a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4\\ c_4 &= a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2 \end{aligned} \quad , \quad c_5=a_5b_5$$

ومن ثمّ حصلنا على البنية الجبريّة $(PP_5,*)$.

قمنا بعد ذلك بإثبات أنّ هذه البنية هي نصف زمرة واحديّة.

الكلمات المفتاحيّة: خماسيّة فيثاغوريّة، رباعيّة فيثاغوريّة، ثلاثيّة فيثاغوريّة، بنية، نصف زمرة، محايد.

Semigroups on the Set of Pythagorean Pentads

Researcher: Dr. Basel Hamdo Al-Arnous

Assistant Professor, Department of Mathematics – Faculty of Science – Homs University.

Abstract

In this study, we define a closed operation * on the set of Pythagorean pentads, denoted by PP_5, as follows:

Let $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5),(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5) \in PP_5$. We define the following binary operation on PP_5:

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$$

Given that:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 \\ c_2 &= a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 \\ c_3 &= a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4 \\ c_4 &= a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 \end{aligned} \quad , \quad c_5 = a_5b_5$$

Accordingly, $(PP_5,*)$ forms an algebraic structure.

Then, We prove that this structure constitutes a semigroup.

Keywords:

Pythagorean pentad, Pythagorean quadruple, Pythagorean triple, structure, semigroup, identit.

1.مقدّمة

لتكن R حلقة صحيحة معرّفة فوق الحقل العددي K، نقول عن الثلاثيّة (a,b,c) حيث $a,b,c \in R$ ثلاثيّة فيثاغوريّة إذا كانت $a^2+b^2=c^2$.

في العام 1984 عرّف إيكيرت Eckert عمليّة جمع بين الثلاثيّات الفيثاغوريّة عندما $R=\mathbf{Z}$ على النحو الآتي:

$$(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2,c_1c_2)$$

بحيث تشكّل مجموعة كلّ الثّلاثيّات الفيثاغوريّة الصحيحة بالإضافة إلى $(1,0,1)$ مع العمليّة $+$ زمرة تبديلية [1] .

بعد ذلك وتحديداً في العام 1991 قام زناردو Zanardo و زانيير Zannier بتعميم المجال من $\mathbf{Z}$ إلى أي حلقة من الأعداد الصحيحة R [2] .

في العام 1996 قام بيوريجارد Beauregard و سوريانريان Suryanarayan بتعريف عمليّة مغلقة * على مجموعة كل الثلاثيّات الفيثاغوريّة الصحيحة، على النحو الآتي [3]:

$$(a_1,b_1,c_1)*(a_2,b_2,c_2)=(a_1a_2,b_1c_2,c_1b_2+b_1b_2+c_1c_2)$$

في هذا البحث، قمنا بتعريف الخماسيّات الفيثاغوريّة، ومن ثمّ تعريف عمليّة مغلقة * على مجموعة كل الخماسيّات الفيثاغوريّة PP_5، وأثبتنا أنّ البنية $(PP_5,*)$ هي نصف زمرة، وأوجدنا العنصر المحايد بالنسبة للعمليّة *.

استخدمنا في ذلك الأعداد فوق العقديّة (الكواترنيون)

2. هدف البحث

يهدف البحث إلى إيجاد عمليّة ثنائيّة على مجموعة كل الخماسيّات الفيثاغوريّة الصحيحة، وبالتالي توليد خماسيّة فيثاغوريّة من خماسيتين فيثاغوريّتين.

3. المناقشة و النّتائج

أوّلاً: مجموعة الأعداد فوق العقدية $[4]$:

تعريف1:

تعرّف مجموعة الأعداد فوق العقديّة (الكواتيرنيون) H، بأنّها مجموعة كلّ الأعداد التي لها الشّكل:

$$q = q_0 + q^* = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

حيث: $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ و i, j, k وحدات تحقّق الشروط الآتية:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = ijk &= -1 \\ ij = k &= -ji \\ jk = i &= -kj \\ ki = j &= -ik \end{aligned}$$

مثال 1: الأعداد الآتية فوق عقديّة:

$$4 + 2i - 2j + 3k \quad , \quad -5 \quad , \quad 2i - 3j + 3k \quad , \quad 5 - 4i$$

لكل عدد فوق عقدي قسمين: قسم حقيقي (سلّمي) وجزء متّجهي، فمن أجل العدد فوق العقدي:

$$q = q_0 + q^* = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

فإنّ الجزء الحقيقي: q_0، أمّا الجزء المتّجهي: $q^* = q_1 i + q_2 j + q_3 k$

ثانياً: جبر الأعداد فوق العقديّة $[5]$:

ليكن لدينا $p, q \in \mathrm{H}$ حيث:

$$p = p_0 + p^* = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$$
$$q = q_0 + q^* = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

تعريف2:

تُعرّف عمليّة جمع الأعداد فوق العقديّة $(+)$على النّحو الآتي:

$$\begin{aligned} p + q &= (p_0 + q_0) + \left(p^* + q^*\right) \\ &= \left(p_0 + q_0\right) + \left(p_1 + q_1\right) i + \left(p_2 + q_2\right) j + \left(p_3 + q_3\right) k \end{aligned}$$

واضح أنّ الصّفر هو محايد بالنّسبة لعمليّة الجمع، وكذلك فإنّ لكل عدد p من H نظير جمعي، هو:

$$-p = -p_0 - p^* = -p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k$$

تعريف3:

تُعرّف عمليّة ضرب الأعداد فوق العقديّة $(.)$ على النّحو الآتي:

$$\begin{aligned} p.q = (p_0.q_0) &- \left(p_1.q_1 + p_2.q_2 + p_3.q_3\right) + \\ &+ p_0\left(q_1 i + q_2 j + q_3 k\right) + q_0\left(p_1 i + p_2 j + p_3 k\right) + \\ &+ \left(p_2.q_3 - p_3.q_2\right) i + \left(p_3.q_1 - p_1.q_3\right) j + \left(p_1.q_2 - p_2.q_1\right) k \end{aligned}$$

وهي تكتب بالشّكل الآتي:

$$p.q = (p_0.q_0) - p^* q^* + p_0 q^* + q_0 p^* + p^* \times q^*$$

حيث:

$$p^*.q^* = p_1.q_1 + p_2.q_2 + p_3.q_3$$
$$p^* \times q^* = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

ولأنّ: $p^* \times q^* \neq q^* \times p^*$ فإنّ الضّرب ليس عمليّة تبديليّة.

ثالثاً: المرافق، النّظيم، المقلوب [6] :

ليكن $q = q_0 + q^* = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ عدد فوق عقديّ.

تعريف4:

يُعرّف مرافق العدد q بانّه العدد $\bar{q}$ من H المعطى بالعلاقة الآتية:

$$\bar{q} = q_0 - q^* = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$$

من التّعريف ينتج أنّ:

1. $\overline{(\bar{q})} = q$ لأنّ: $\overline{(\bar{q})} = \overline{(q_0 - q^*)} = q_0 - (-q^*) = q_0 + q^* = q$
2. $q + \bar{q} = 2q_0$.
3. $q.\bar{q} = \bar{q}.q$ وعلاوةً على ذلك فإنّ:

$$q.\bar{q} = \bar{q}.q = {q_0}^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2$$

4. $\overline{(q.p)} = \bar{p}.\bar{q}$ حيث: $p \in \mathrm{H}$.

تعريف5:

يُعرّف نظيم العدد q بانّه العدد $|q|$ من المعطى بالعلاقة الآتية:

$$|q| = \sqrt{q.\bar{q}} = \sqrt{{q_0}^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2}$$

نتائج: ينتج من التّعريف أنّ:

1. $|q| = |\bar{q}|$.
2. $|p.q| = |p|.|q|$ حيث $p \in \mathrm{H}$ لأنّ:

$$|p.q|^2 = p.q.(\overline{p.q}) = p.q.\bar{q}.\bar{p} = p.|q|^2.\bar{p} = p.\bar{p}.|q|^2 = |p|^2.|q|^2$$

رابعاً: أعداد ليبشتز الصّحيحة [7] :

تعريف 6:

أعداد ليبشتز الصّحيحة هي مجموعة كلّ الأعداد فوق العقديّة التي مكوّناتها أعداد صحيحة، ونرمز لها بالرمز $\mathbb{L}$، أي أنّ:

$$\mathbb{L}=\{a+bi+cj+dk\in \mathrm{H};\ a,b,c,d\in \mathbb{Z}\}$$

خامساً: الخماسيّات الفيثاغوريّة $\mathbb{Z}$:

نعلم من نظريّة الأعداد، أنّ الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في $\mathbb{Z}$ هي مجموعة كلّ الثّلاثيّات $\{x,y,z\}$ التي تحقّق معادلة ديوفانتس الآتية:

$$x^2+y^2=z^2\ ;\ x,y,z\in\mathbb{Z}$$

وعليه فإنّ الخماسيّات الفيثاغوريّة، هي مجموعة كلّ الخماسيّات $\{x,y,z,w,r\}$ والتي تحقّق معادلة ديوفانتس الآتية:

$$x^2+y^2+z^2+w^2=r^2\ ;\ x,y,z,w,r\in\mathbb{Z}^+$$

تعريف 7:

تسمّى خماسيّة فيثاغوريّة، كلّ خماسيّة (a,b,c,d,e)، حيث $a,b,c,d,e\in\mathbb{Z}$، وتحقّق الشّرط الآتي:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2$$

سنرمز لمجموعة كلّ الخماسيّات الفيثاغوريّة بالرّمز PP_5 وبالتّالي يكون:

$$PP_5=\{(a,b,c,d,e);\ a^2+b^2+c^2+d^2=e^2 : a,b,c,d,e\in\mathbb{Z}\}$$

مبرهنة 1 وتعريف 8:

ليكن $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5),(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in PP_5$، نعرّف على PP_5 العمليّة الثّنائيّة الآتية:

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$$

حيث:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 \\ c_2 &= a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 \\ c_3 &= a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4 \\ c_4 &= a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 \end{aligned} \quad , \quad c_5 = a_5b_5$$

عندئذٍ $(PP_5,*)$ بنية جبريّة.

الإثبات:

إنّ: $(0,0,0,0,0)\in PP_5$ وبالتّالي فإنّ: $PP_5 \neq \{\}$.

ليكن $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5),(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in PP_5$، ولنعرّف العددين p_1,p_2 بالشّكل الآتي:

$$p_1=\frac{a_1}{a_5}+\frac{a_2}{a_5}i+\frac{a_3}{a_5}j+\frac{a_4}{a_5}k \ , \quad p_2=\frac{b_1}{b_5}+\frac{b_2}{b_5}i+\frac{b_3}{b_5}j+\frac{b_4}{b_5}k$$

ويكون:

$$|p_1|=\sqrt{\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2}{{a_5}^2}}=\sqrt{\frac{{a_5}^2}{{a_5}^2}}=1,$$

$$|p_2|=\sqrt{\frac{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2+{b_4}^2}{{b_5}^2}}=\sqrt{\frac{{b_5}^2}{{b_5}^2}}=1$$

وبالتّالي يكون: $|p_1.p_2|=|p_1|.|p_2|=1$

في الحقيقة فإنّ:

$$p_1.p_2 = \frac{a_1.b_1}{a_5.b_5} - \left(\frac{a_2.b_2 + a_3.b_3 + a_4.b_4}{a_5.b_5} \right) + \frac{a_1}{a_5}\left(\frac{b_2}{b_5} i + \frac{b_3}{b_5} j + \frac{b_4}{b_5} k \right)$$

$$+ \frac{b_1}{b_5}\left(\frac{a_2}{a_5} i + \frac{a_3}{a_5} j + \frac{a_4}{a_5} k \right) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{a_2}{a_5} & \frac{a_3}{a_5} & \frac{a_4}{a_5} \\ \frac{b_2}{b_5} & \frac{b_3}{b_5} & \frac{b_4}{b_5} \end{vmatrix}$$

بإصلاح العلاقة، يكون:

$$p_1.p_2 = \left(\frac{a_1.b_1 - a_2.b_2 - a_3.b_3 - a_4.b_4}{a_5.b_5} \right) + \left(\frac{a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3}{a_5.b_5} \right).i$$

$$= + \left(\frac{a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4}{a_5.b_5} \right).j + \left(\frac{a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2}{a_5.b_5} \right).k$$

وبحسب فرضيات المبرهنة يكون:

$$p_1.p_2 = \left(\frac{c_1}{c_5} \right) + \left(\frac{c_2}{c_5} \right).i + \left(\frac{c_3}{c_5} \right).j + \left(\frac{c_4}{c_5} \right).k$$

ولأنّ $\left| p_1.p_2 \right| = 1$ فإنّ:

$$\left(\frac{c_1}{c_5} \right)^2 + \left(\frac{c_2}{c_5} \right)^2 + \left(\frac{c_3}{c_5} \right)^2 + \left(\frac{c_4}{c_5} \right)^2 = 1$$

ومنه فإنّ:

$$c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2 + c_4{}^2 = c_5{}^2$$

وهذا يعني أنّ: $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \in PP_5$.

أي أنّ العمليّة $*$ هي قانون تشكيل داخلي على PP_5، وبالتّالي $(PP_5, *)$ تعرّف بنية جبريّة.

مثال 2:

ليكن: $(1,2,4,10,11),(1,2,8,10,13) \in PP_5$، لدينا:

$$(1,2,4,10,11)*(1,2,8,10,13)=(-135,-36,12,28,143)$$

إنّ:

$$(-135)^2+(-36)^2+(12)^2+(28)^2=20449$$
$$(143)^2=20449$$

وبالتّالي فإنّ: $(-135,-36,12,28,143) \in PP_5$.

مبرهنة 2:

تقبل العمليّة * في البنية الجبريّة $(PP_5,*)$ عنصراً محايداً، هو $(1,0,0,0,1)$.

الإثبات:

لنفرض وجود عنصر محايد يميني (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) للعمليّة *، عندئذٍ يكون:

مهما يكن (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) من $PP_5 \setminus \{(0,0,0,0,0)\}$، فإنّ:

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5)=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$$

وبالتّالي فإنّ:

$$\begin{aligned} &a_1e_1-a_2e_2-a_3e_3-a_4e_4=a_1 \\ &a_1e_2+a_2e_1+a_3e_4-a_4e_3=a_2 \\ &a_1e_3+a_3e_1+a_4e_2-a_2e_4=a_3 \\ &a_1e_4+a_4e_1+a_2e_3-a_3e_2=a_4 \\ &a_5e_5=a_5 \end{aligned} \qquad (1)$$

من العلاقة الأخيرة ينتج أنّ $e_5=1$، ولأنّ $(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) \in PP_5$ فإنّ إحدى الأعداد e_1,e_2,e_3,e_4 يساوي 1 أو -1 والباقي أصفاراً. بالعودة إلى الجملة (1)، تُكتب المعادلات الأربع الأولى منها بالشّكل الآتي:

$$\begin{aligned} a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3 - a_4e_4 &= a_1 \\ a_2e_1 + a_1e_2 - a_4e_3 + a_3e_4 &= a_2 \\ a_3e_1 + a_4e_2 + a_1e_3 - a_2e_4 &= a_3 \\ a_4e_1 - a_3e_2 + a_2e_3 + a_1e_4 &= a_4 \end{aligned} \qquad (2)$$

نضرب الأولى بـ a_2 والثانية بـ $-a_1$ ونجمع المعادلتين الناتجتين، ثمّ نضرب الأولى بـ a_3 والثالثة بـ $-a_1$ ونجمع المعادلتين الناتجتين، وأخيراً نضرب الأولى بـ a_4 والرابعة بـ $-a_1$ ونجمع المعادلتين الناتجتين، نحصل على:

$$\begin{aligned} -\left(a_1^{\,2} + a_2^{\,2}\right)e_2 + \left(a_1a_4 - a_2a_3\right)e_3 - \left(a_1a_3 + a_2a_4\right)e_4 &= 0 \\ -\left(a_1a_4 + a_2a_3\right)e_2 - \left(a_1^{\,2} + a_3^{\,2}\right)e_3 + \left(a_1a_2 - a_3a_4\right)e_4 &= 0 \\ \left(a_1a_3 - a_4a_2\right)e_2 - \left(a_1a_2 + a_3a_4\right)e_3 - \left(a_1^{\,2} + a_4^{\,2}\right)e_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

الجملة (3) هي جملة متجانسة، وحيث أنّ اثنين من e_2, e_3, e_4 على الأقل تساوي الصفر، فإنّ $e_2 = e_3 = e_4 = 0$، بالتعويض في الجملة (2) نحصل على:

$$a_1e_1 = a_1,\ \ a_2e_1 = a_2,\ \ a_3e_1 = a_3,\ \ \ a_4e_1 = a_4$$

وهي تكافئ: $e_1 = 1$، وعلى هذا يكون:

$$\left(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\right) = \left(1,0,0,0,1\right)$$

وبنفس الطريقة نستنتج أنّ: $(1,0,0,0,1)$ محايد يساري للعمليّة $*$.

مبرهنة 3:

إنّ العمليّة $*$ المعرّفة على البنية الجبريّة $(PP_5, *)$ هي عمليّة تجميعيّة.

الإثبات:

ليكن: $\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right), \left(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\right), \left(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5\right) \in PP_5$ لنفرض أنّ:

$$(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5)=$$
$$=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*\left[(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)*(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)\right]$$

عندئذٍ يكون:

$$(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5)=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*$$
$$(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4,b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3,$$
$$b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4,b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2,b_5c_5)$$

وبالتالي:

$$d_1=a_1(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)-a_2(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)$$
$$-a_3(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)-a_4(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)$$

وكذلك:

$$d_2=a_1(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)+a_2(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)+$$
$$+a_3(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)-a_4(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)$$
$$d_3=a_1(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)+a_3(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)+$$
$$+a_4(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)-a_2(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)$$
$$d_4=a_1(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)+a_4(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)+$$
$$+a_2(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)-a_3(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)$$
$$d_5=a_5(b_5c_5)=a_5b_5c_5$$

الآن بفرض أنّ:

$$(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)=$$
$$=\left[(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\right]*(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$$

عندئذٍ يكون:

$$(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)=(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4,$$
$$a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3,a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4,$$
$$a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2,a_5b_5)*(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$$

وبالتالي:

$$f_1=(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)c_1-(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)c_2-$$
$$-(a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)c_3-(a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)c_4$$
$$=a_1(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)-a_2(b_2c_1+b_1c_2-b_4c_3+b_3c_4)-$$
$$-a_3(b_3c_1+b_1c_3+b_4c_2-b_2c_4)-a_4(b_4c_1+b_1c_4-b_3c_2+b_2c_3)$$

وبالمثل نجد:

$$f_2=a_1(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)+a_2(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)+$$
$$+a_3(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)-a_4(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)$$
$$f_3=a_1(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)+a_3(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)+$$
$$+a_4(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)-a_2(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)$$
$$f_4=a_1(b_1c_4+b_4c_1+b_2c_3-b_3c_2)+a_4(b_1c_1-b_2c_2-b_3c_3-b_4c_4)+$$
$$+a_2(b_1c_3+b_3c_1+b_4c_2-b_2c_4)-a_3(b_1c_2+b_2c_1+b_3c_4-b_4c_3)$$
$$f_5=(a_5b_5)c_5=a_5b_5c_5$$

واضح أنّ: $(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5)=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)$، وبالتّالي فإنّ العمليّة * هي عمليّة تجميعيّة.

مثال 3:

ليكن: $(1,1,3,5,6),(1,1,1,1,2),(1,2,4,10,11)\in PP_5$:

لدينا من جهة أولى:

$$\left[(1,1,3,5,6)*(1,1,1,1,2)\right]*(1,2,4,10,11)=$$
$$=(-8,0,8,4,12)*(1,2,4,10,11)=$$
$$=(-80,48,-16,-92,132)$$

من جهة أخرى:

$$(1,1,3,5,6)*\left[(1,1,1,1,2)*(1,2,4,10,11)\right]=$$
$$=(1,1,3,5,6)*(-15,9,-3,13,22)=$$
$$=(-80,48,-16,-92,132)$$

4. المقترحات والتوصيات

قمنا في هذا البحث بتعريف عملية ثنائيّة * على مجموعة الخماسيات الفيثاغوريّة PP_5، وأوجدنا العنصر المحايد في البنية الجبرية $(PP_5, *)$، وأثبتنا أنّ هذه البنية هي نصف زمرة.

لذلك يمكن متابعة العمل في هذه البنية كدراسة كونها زمرة أم لا، وإيجاد صيغة مقلوب خماسية فيثاغوريّة وفق العمليّة *، وإيجاد الحالات الخاصّة.

5.المراجع العلمية

1. Ernest J. Eckert, The Group of Primitive Pythagorean Triangles, Mathematics Magazine, 57 (Jan., 1984
2. P. Zanardo and U. Zannier, The group of pythagorean triples in number fields, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), CLIX (1991)
3. Raymond A. Beauregard and E. R. Suryanarayan, Pythagorean Triples: The Hyperbolic View, The College Mathematics Journal, 27 (May, 1996)
4. Ant_onio Machiavelo and Lu__s Ro_cadas, Some connections between the arithmetic and geometry of Lipschitz integers,(2011)
5. John H. Conway and Derek Smith, On Quaternions and Octonions, AK Peters (2003)
6. J. B. Kuipers. Quaternions and Rotation Sequences. Princeton University Press, (1999).
7. S. L. Altmann. "Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal," *Mathematics Magazine* 62(5), (December 1989).