الحل العددي لمعادلة Fokker–Planck باستخدام طريقة العناصر الحدية (BEM)

أ. د برلنت مطيط[1]

براءة حسان الخالد[2]

ملخص:

تم في هذه المقالة إيجاد الحلول العددية لمعادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين باستخدام طريقة العناصر الحدية (Boundary Element Method – BEM).

تعتمد هذه الطريقة على تقسيم حدود المنطقة المدروسة دون الحاجة إلى تقطيع المساحة الداخلية بالكامل، مما يوفر حسابات وتعد هذه الطريقة أكثر كفاءة في بعض الحالات مقارنة بتقنيات عددية مثل طريقة العناصر المنتهية (Finite Element Method – FEM).

يتم دراسة فعالية الطريقة لإيجاد الحلول التقريبية من خلال تطبيقها على معادلة Fokker–Planck وباستخدام برنامج Matlab النسخة R2019a.

الكلمات المفتاحية:

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية، معادلة Fokker–Planck الخطية، طريقة العناصر الحدية، معادلة تكاملية، دوال الاختبار، شروط ديرخليه الحدية، شروط نيومن الحدية، دالة غرين.

[1] عضو هيئة تدريسية في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق.

[2] طالبة ماجستير، تحليل عددي – قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق.

Numerical Solution for Fokker-Planck Equation by Using Boundary Element Method (BEM).

Dr. Berlant Sabri Mattit

Baraa Hassan Alkhaled

Abstract

In this article, a study is presented on the numerical solutions of the linear Fokker-Planck equation in two dimensions using the Boundary Element Method (BEM).

This method relies on analyzing the boundaries of the studied region without the need to discretize the entire internal area, which can offer more efficient computations in some cases compared to techniques like the Finite Element Method (FEM).

The effectiveness of the method in finding approximate solutions is demonstrated by applying it to the Fokker-Planck equation and apply it in the MATLAB program R2019a.

Key words: Partial differential equations, linear Fokker-Planck Equation, boundary element method, integral equation, shape function, Dirichlet boundary conditions, Neumann boundary conditions, Green’s function.

1. مقدمة:

تظهر المعادلات التفاضلية الجزئية في كثير من التطبيقات في العلوم والهندسة، ان الحلول التحليلية عادة ما يكون من الصعب إيجادها، وبالتالي يتم استخدام طرائق بديلة كالطرائق العددية التي تستخدم على نطاق واسع لحل المعادلات التفاضلية الجزئية داخل منطقة معطاة وضمن شروط حدية.

تُعد معادلة Fokker–Planck من المعادلات التفاضلية الجزئية الهامة، والتي تظهر في العديد من التطبيقات الفيزيائية، مثل الديناميكا الحرارية، ميكانيكا السوائل، ونمذجة الأسواق المالية. تتطلب هذه المعادلة حلولاً عددية نظراً لتعقيدها وصعوبة إيجاد الحلول التحليلية. لذا تعتبر الطريقة العددية باستخدام العناصر الحدية إحدى الطرائق الفعالة للحصول على الحلول التقريبية لهذه المعادلة.

طريقة العناصر الحدية: هي طريقة أساسية لإيجاد الحل التقريبي للمعادلات التفاضلية الجزئية المعرفة على منطقة وتتضمن الخطوات التالية:

1- تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة تكاملية: تحويل معادلة Fokker–Planck (أو أي معادلة تفاضلية أُخرى) إلى صيغة تكاملية باستخدام مبرهنة غرين أو طرائق تكاملية أُخرى.
2- تجزئة الحدود: تقسيم الحدود الخارجية للمنطقة المدروسة إلى عناصر صغيرة segments في حالة البعدين أو panels في حالة ثلاثة أبعاد.
3- إيجاد دوال الاختبار: والتي تمثل الحل التقريبي على كل عنصر حدي.
4- تطبيق الشروط الحدية (مثل شروط ديرخليه، أو نيومن) ضمن الصيغة التكاملية.
5- إنشاء الجملة الخطية: تجميع المعادلات التكاملية على كل عنصر حدي في جملة جبرية خطية تمثل العلاقة بين القيم على الحدود.
6- حل الجملة الجبرية باستخدام الطرائق العددية المناسبة والحصول على القيم المطلوبة على الحدود.

7- حساب القيم الداخلية (إن لزم الأمر): إذا كان مطلوباً، يتم حساب القيم داخل المنطقة باستخدام الحلول الحدية التي تم إيجادها.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى تطبيق طريقة العناصر الحدية على معادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين مع معالجة الشروط الحدية المختلفة وتقديم النتائج في سياق التحليل العددي.

3. مواد وطرائق البحث:

اعتمد البحث على الدراسة العددية لمعادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين، وتم استخدام برنامج Matlab النسخة R2019a لإيجاد الحلول العددية برمجياً.

4. المناقشة:

1. صياغة المسألة: في البداية تكون لدينا معادلة تفاضلية جزئية تصف المسألة الفيزيائية التي نريد حلها. ونفترض أن الحدود Γ المحيطة بالمنطقة Ω يمكن أن تكون معرفة بشرط ديرخليه (بإعطاء قيمة حدية لـ $u(x)$) أو بشرط نيومن (بإعطاء قيمة حدية لـ $\frac{\partial u(x)}{\partial n}$).
2. تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة تكاملية باستخدام نظرية غرين ومعادلة غرين.
3. تجزئة الحدود إلى عناصر: نقوم بتقسيم الحدود Γ إلى عدد محدد من العناصر الحدية الصغيرة. عادةً ما تكون هذه العناصر هي أجزاء خطية صغيرة في بعدين، أو أجزاء من منحنيات في ثلاثة أبعاد.
4. التعبير عن المتغيرات على الحدود باستخدام دوال الاختبار (shape functions).
5. صياغة الجملة الخطية: نحصل على مجموعة من المعادلات الخطية. كل معادلة تأتي من تطبيق المعادلة التكاملية في عقدة معينة على الحدود.

6. تطبيق الشروط الحدية: نطبق الشروط الحدية على العقد، الشروط الحدية تساعد في تحديد القيم المجهولة مما يسمح لنا بحل الجملة الخطية المتبقية.
7. حل الجملة الخطية: بعد تطبيق الشروط الحدية نحصل على جملة خطية يمكن حلها باستخدام تقنيات الجبر الخطي.
8. حساب القيم الداخلية المطلوبة: يمكننا الآن استخدام القيم التي حصلنا عليها لحساب كميات أخرى ذات أهمية داخل المنطقة Ω، مثل توزيع الإجهادات أو الحرارة أو غيرها من الكميات الفيزيائية. إذا كانت هناك حاجة لحساب القيم داخل المجال (وليس فقط على الحدود)، يمكننا استخدام الحلول الحدية الموجودة لحساب هذه القيم باستخدام معادلات تكاملية إضافية.

5. طريقة العناصر الحدية في معادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين:

لحل معادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين باستخدام طريقة العناصر الحدية سنتبع الخطوات التي ذكرناها سابقاً. الهدف هو تحويل معادلة Fokker–Planck الجزئية إلى معادلة تكاملية يمكن حلها باستخدام BEM.

1. صياغة معادلة Fokker–Planck:

معادلة Fokker–Planck في بعدين تكتب بالشكل:

$$\frac{\partial \mathrm{P(x,y,t)}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[A_x(x,y)P(x,y,t)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[A_y(x,y)P(x,y,t)\right] + D_x \frac{\partial^2 \mathrm{P(x,y,t)}}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \mathrm{P(x,y,t)}}{\partial y^2}$$

حيث: $P(x,y,t)$ هي كثافة الاحتمال، $A_x(x,y)$ و $A_y(x,y)$ هي معاملات الانجراف (drift) في الاتجاهين x و y على التوالي.

D_x و D_y هي معاملات الانتشار (الضوضاء) في الاتجاهين x و y على التوالي.

2. تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة تكاملية باستخدام دالة غرين:

المعادلة التكاملية تكون على الشكل:

$$P(x,y,t) = \int_{\Omega} G(x,y,t|x',y',t')\mathrm{P}(x',y',t')dx'dy' + \int_{\Gamma} [P(\xi,\eta,t')\frac{\partial G(x,y,t|\xi,\eta,t')}{\partial n} - q(\xi,\eta,t')G(x,y,t|\xi,\eta,t')]d\Gamma$$

حيث: Ω هي المنطقة الداخلية التي ندرسها.

Γ هي الحدود المحيطة بالمنطقة Ω.

$G(x,y,t|x',y',t')$ هي دالة غرين.

$\frac{\partial G(x,y,t|\xi,\eta,t')}{\partial n}$ هو مشتق دالة غرين في الاتجاه الناظمي للحدود.

$q(\xi,\eta,t') = \frac{\partial p(\xi,\eta,t')}{\partial n}$ هو مشتق معادلة Fokker–Planck (التدفق عبر الحدود).

3. تجزئة الحدود إلى عناصر:

نقسم الحدود Γ إلى عدد محدد من العناصر الحدية الصغيرة. نفترض أن الحدود Γ تتكون من N عنصر، حيث نقوم بحساب القيم عند العقد.

4. التعبير عن المتغيرات باستخدام دوال الاختبار:

نعبر عن $P(\xi,\eta,t)$ و $q(\xi,\eta,t)$ باستخدام دوال اختبار في العقد:

$$P(\xi,\eta,t) \approx \sum_{j=1}^{N} P_j(t)N_j(\xi,\eta)$$

$$q(\xi,\eta,t) \approx \sum_{j=1}^{N} q_j(t)N_j(\xi,\eta)$$

حيث: $P_j(t)$و $q_j(t)$ هما القيم عند العقدة j، و $N_j(\xi,\eta)$ هي دالة الاختبار للعقدة j.

5. صياغة الجملة الخطية:

عند إدخال التقريب في المعادلة التكاملية، نحصل على جملة خطية من المعادلات لكل عقدة على الحدود. كل معادلة تمثل تأثير كل عقدة على باقي العقد.

نحصل على جملة من المعادلات الخطية: $Gq(t) = HP(t)$

حيث H و G هما مصفوفتان تحتويان على القيم الناتجة من التكاملات المتعلقة بالعناصر الحدية.$P(t)$ و $q(t)$ هما متجهان للقيم المجهولة عند العقد على الحدود.

6. تطبيق الشروط الحدية:

نطبق الشروط الحدية (قيم $P(x,y,t)$ أو التدفق $q(x,y,t)$) على الحدود. عند معرفة القيم على بعض الحدود، يمكن استخدام هذه الشروط لتحديد المجاهيل وحل الجملة الخطية.

7. حل الجملة الخطية:

نقوم بحل الجملة الخطية الناتجة باستخدام تقنيات الجبر الخطي، مثل طريقة غاوس أو طرائق التكرار.

8. حساب القيم الداخلية المطلوبة:

بعد حل الجملة الخطية والحصول على القيم الحدية $P_j(t)$ و $q_j(t)$ يمكن حساب القيم داخل المنطقة Ω باستخدام معادلة تكاملية إضافية:

$$P(x,y,t) = \int_{\Gamma} [P(\xi,\eta,t') \frac{\partial G(x,y,t|\xi,\eta,t')}{\partial n} - q(\xi,\eta,t') G(x,y,t|\xi,\eta,t')] d\Gamma$$

6. مثال (1): لنفترض أن لدينا مستطيلاً يمثل المجال Ω مستطيل (من $x = 0$ إلى $x = 2$، ومن $y = 0$ إلى $y = 1$) بحدودΓ حيث نريد حل معادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين.

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{\partial \mathrm{P(x,y,t)}}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 \mathrm{P(x,y,t)}}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \mathrm{P(x,y,t)}}{\partial y^2}$$

حيث افترضنا أن معاملات الانجراف$A_x(x,y)$ و $A_y(x,y)$ تساوي الصفر، وأن معادلة Fokker–Planck تمثل انتشاراً نقياً. Γ هي حدود المستطيل حيث:

عند $x = 0$ و $x = 2$ فإن $P_2(x,y,t) = P_3(x,y,t) = 100$ (شرط ديرخليه درجة حرارة ثابتة).

وعند $y = 0$ و $y = 1$ فإن $P_1(x,y,t) = P_4(x,y,t) = 0$ (شرط ديرخليه تلامس مع سطح بارد).

و معاملات الانتشار $D_x = 0.5$ و $D_y = 0.5$.

نريد إيجاد توزيع كثافة الاحتمال $P(x, y, t)$ داخل هذا المستطيل عند الزمن t.

1. تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة تكاملية:

نبدأ من معادلة Fokker–Planck:

$$\frac{\partial \mathrm{P(x, y, t)}}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 \mathrm{P(x, y, t)}}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \mathrm{P(x, y, t)}}{\partial y^2}$$

بما أن $A_x(x, y)$ و $A_y(x, y)$ تساوي الصفر، وأن معادلة Fokker–Planck تمثل انتشاراً نقياً، نستخدم دالة غرين $G(x, y, t|x', y', t')$ لحل المعادلة:

$$G(x, y, t|x', y', t') = \frac{1}{4\pi D(t - t')} \exp(-\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{4D(t - t')})$$

حيث $D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

2. تجزئة الحدود إلى عناصر:

نفترض أن الحدود تم تقسيمها إلى أربعة عناصر:

عنصر1: من (0,0) إلى (0,1) (الحد اليساري).

عنصر2: من (0,1) إلى (2,1) (الحد العلوي).

عنصر3: من (2,1) إلى (2,0) (الحد اليميني).

عنصر4: من (2,0) إلى (0,0) (الحد السفلي).

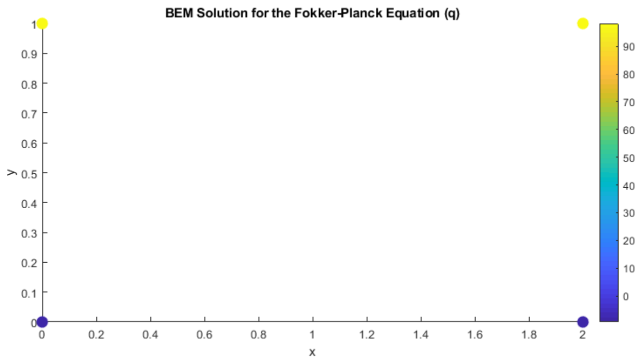
لنستخدم أربع عقد، واحدة عند كل زاوية من زوايا المستطيل:

العقدة 1 (P_1) عند $(0,0)$.

العقدة 2 (P_2) عند $(0,1)$.

العقدة 3 (P_3) عند $(2,1)$.

العقدة 4 (P_4) عند $(2,0)$.



شكل (1): حل معادلة فوكر بلانك باستخدام طريقة العناصر الحدية للمثال (1).

3. صياغة الجملة الخطية:

نستخدم المعادلة التكاملية عند كل عقدة لحساب P و q عند الحدود. على سبيل المثال، عند العقدة 1:

$$P(x,y,t) = \sum_{i=1}^{4} \left[P(x_i,y_i,t) \frac{\partial G(x_1,y_1,t|x_i,y_i)}{\partial n} - q(x_i,y_i,t) G(x_1,y_1,t|x_i,y_i) \right] \Delta\Gamma_i$$

وبما أن $P(x_1, y_1, t) = 0$ (شرط ديرخليه)، نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{4} q(x_i, y_i, t) G(x_1, y_1, t | x_i, y_i) = 0$$

يتم تكرار نفس الحسابات عند العقد 2 و3 و4.

4. حساب دالة غرين لكل عنصر:

عند العقدة P_1 بالنسبة إلى العنصر 2:

$$G(0,0|2,1) = \frac{1}{4\pi * 0.707} \exp\left(-\frac{(0-2)^2 + (0-1)^2}{4 * 0.707}\right)$$

$$G(0,0|2,1) = \frac{1}{4\pi * 0.707} \exp\left(-\frac{5}{2.828}\right) = 0.019$$

عند العقدة P_2 بالنسبة إلى العنصر 1:

$$G(0,1|0,0) = \frac{1}{4\pi * 0.707} \exp\left(-\frac{(0-0)^2 + (1-0)^2}{4 * 0.707}\right)$$

$$G(0,0|2,1) = \frac{1}{4\pi * 0.707} \exp\left(-\frac{1}{2.828}\right) = 0.079$$

يتم حساب باقي القيم بنفس الطريقة.

5. تجميع الجملة الخطية:

بعد حساب قيم دالة غرين لكل عقدة عند كل عنصر، نجمعها في جملة معادلات خطية:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3 + a_{14}q_4 = P_1$$

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3 + a_{24}q_4 = P_2$$

$$a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3 + a_{34}q_4 = P_3$$

$$a_{41}q_1 + a_{42}q_2 + a_{43}q_3 + a_{44}q_4 = P_4$$

حيث a_{ij} هي معاملات مرتبطة بالتكاملات المحسوبة سابقاً.

أي:

$$1q_1 + 0.079q_2 + 0.019q_3 + 0.027q_4 = 0$$

$$0.079q_1 + 1q_2 + 0.027q_3 + 0.019q_4 = 100$$

$$0.019q_1 + 0.027q_2 + 1q_3 + 0.079q_4 = 100$$

$$0.027q_1 + 0.019q_2 + 0.079q_3 + 1q_4 = 0$$

$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 1$ تجنباً للشذوذ والمشكلات العددية المألوفة.

يمكن حل هذه الجملة باستخدام البرمجة أو الجبر الخطي للحصول على قيم q_1 و q_2 و q_3 و q_4. وقد أوجدنا القيم باستخدام Matlab:

$$q_1 = -9.394\,, q_2 = 98.235\,, q_3 = 98.235\,, q_4 = -9.394$$

سوف ندرس الخطأ من خلال قانون المربعات الصغرى: $e = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} R_i^2}$

بعد تعويض q_1 و q_2 و q_3 و q_4 في المعادلات السابقة وتعويض القيم الناتجة في القانون السابق وجدنا أن: $e_1 = 0.0532810995$ التي تعتبر مقبولة بالنسبة لعدد العناصر.

نقدم الآن برنامج Matlab للمثال الموضح أعلاه، حيث نقوم بإدخال جميع المعطيات والأرقام الموضحة في المثال السابق والشروط الحدية المعطاة:

```
% Constants
D = 0.707; % Assuming D_x = D_y = 0.5
t = 1; % Example time point
```

```
% Number of boundary elements (4 corners in this
simple case)
num_elements = 4;
% Define boundary points (corners of the
rectangle)
x_boundary = [0, 0, 2, 2];
y_boundary = [0, 1, 1, 0];
% Initialize the coefficient matrix A and vector b
A = zeros(num_elements);
b = [0; 100; 100; 0]; % Boundary conditions as
given
% Define Green's function for Fokker-Planck in 2D
G = @(x1, y1, x2, y2) (1/(4*pi*D*t)) * exp(-((x1-
x2)^2 + (y1-y2)^2)/(4*D*t));
% Populate matrix A using Green's function
for i = 1:num_elements
    for j = 1:num_elements
        if i == j
            A(i, j) = 1;  % Diagonal elements
(handling singularity)
        else
            A(i, j) = G(x_boundary(i),
y_boundary(i), x_boundary(j), y_boundary(j));
        end
    end
end
% Solve the linear system A*q = b
q = A\b;
 % Display the result
disp('The solution vector q is:');
disp(q);
% Visualization
figure;
scatter(x_boundary, y_boundary, 100, q, 'filled');
colorbar;
title('BEM Solution for the Fokker-Planck Equation
(q)');
```

```
xlabel('x');
ylabel('y');
```

7. مثال (2):

سوف نعيد نفس المثال السابق لكن بمناقشة عدد عناصر أكبر:

سنقوم بتقسيم حدود المستطيل(0,0) إلى (1,2) إلى 16 نقطة متساوية المسافة (12 نقطة مختلفة)

الحافة السفلية: تمتد من النقطة (0,0) إلى النقطة (2,0):

(0,0), (0.0667,0), (0.13333,0), (2,0)

والشروط الحدية المفروضة هي أن القيم على هذه الحافة تساوي0.

الحافة اليمنى: تمتد من النقطة (2,0) إلى النقطة (2,1):

(2,0), (2,0.3333), (2,0.6667), (2,1)

والشروط الحدية المفروضة هي أن القيم تزداد خطياً من 0 إلى 100 على طول هذه الحافة. لذا القيم هي [0, 33.33, 66.67, 100].

الحافة العلوية: تمتد من النقطة (2,1) إلى النقطة (0,1):

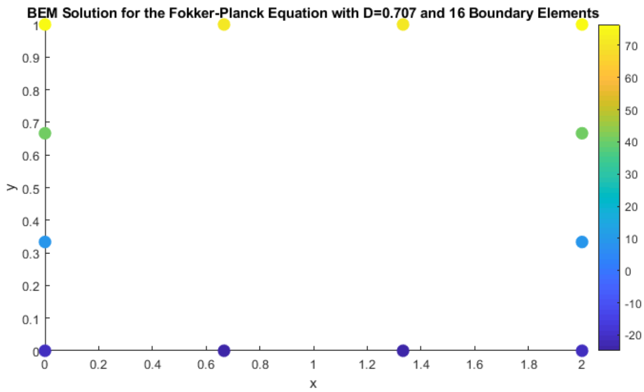
(2,1), (1.3333,1), (0.6667,1), (0,1)

والشروط الحدية المفروضة هي أن القيم على هذه الحافة تساوي100.

الحافة اليسرى: تمتد من النقطة (0,1) إلى النقطة (0,0):

(0,1), (0,0.6667), (0,0.3333), (0,0)

والشروط الحدية المفروضة هي أن القيم تنخفض خطياً من 0 إلى 100 على طول هذه الحافة. لذا القيم هي [100, 66.67, 33.33, 0].



شكل (2): حل معادلة فوكر بلانك باستخدام طريقة العناصر الحدية للمثال (2).

حساب دالة غرين لكل عنصر:

حيث دالة غرين $G(x, y, t|x', y', t')$ لحل المعادلة:

$$A_{ij} = G\left(x_i, y_i, t\middle|x_j, y_j, t'\right) = \frac{1}{4\pi D(t-t')}\exp\left(-\frac{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2}{4D(t-t')}\right)$$

حيث $D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

لنأخذ مثالاً لحساب العنصر: $(x_1, y_1) = (0,0)$ و $(x_2, y_2) = (0.6667,0)$

$$G(0,0|0.6667,0) = \frac{1}{4\pi * 0.707}\exp\left(-\frac{(0-0.6667)^2 + (0-0)^2}{4 * 0.707}\right)$$
$$= \frac{1}{8.885}e^{-\frac{0.4444}{2.828}} = 0.0961$$

ولحساب العنصر: $(x_4,y_4)=(2,0)$ و $(x_2,y_2)=(0.66667,0)$

$$G(0.6667,0|2,0)=\frac{1}{4\pi*0.707}exp\left(-\frac{(0.6667-0)^2+(2-0)^2}{4*0.707}\right)$$
$$=\frac{1}{8.885}e^{-\frac{1.7778}{2.828}}=0.0600$$

ولحساب العنصر: $(x_7,y_7)=(2,0.6667)$ و $(x_3,y_3)=(1.3333,0)$

$$G(1.3333,0|2,0.6667)$$
$$=\frac{1}{4\pi*0.707}exp\left(-\frac{(2-1.3333)^2+(0.6667-0)^2}{4*0.707}\right)$$
$$=\frac{1}{8.885}e^{-\frac{0.8888}{2.828}}=0.822$$

ولحساب العنصر: $(x_6,y_6)=(2,0.3333)$ و $(x_4,y_4)=(2,0)$

$$G(2,0|2,0.3333)=\frac{1}{4\pi*0.707}exp\left(-\frac{(2-2)^2+(0.3333-0)^2}{4*0.707}\right)$$
$$=\frac{1}{8.885}e^{-\frac{0.1111}{2.828}}=0.1082$$

ونكمل باقي العناصر بنفس الطريقة.

بعد حساب دالة غرين لكل عنصر نحصل على جملة معادلات خطية:

المعادلة الأولى:

$$q_1+0.0962q_2+0.0600q_3+0.0274q_4+0.0274q_5+0.0263q_6$$
$$+0.0234q_7+0.0192q_8+0.0192q_9+0.0421q_{10}$$
$$+0.0675q_{11}+0.0790q_{12}+0.0790q_{13}+0.0962q_{14}$$
$$+0.1082q_{15}+0.1126q_{16}=0$$

المعادلة الثانية:

$$0.0962q_1 + q_2 + 0.0962q_3 + 0.0600q_4 + 0.0600q_5 + 0.0577q_6 + 0.0513q_7 + 0.0421q_8 + 0.0421q_9 + 0.0675q_{10} + 0.0790q_{11} + 0.0675q_{12} + 0.0675q_{13} + 0.0822q_{14} + 0.0925q_{15} + 0.0962q_{16} = 0$$

المعادلة الثالثة:

$$0.0600q_1 + 0.0962q_2 + q_3 + 0.096q_4 + 0.0962q_5 + 0.0925q_6 + 0.0822q_7 + 0.0675q_8 + 0.0675q_9 + 0.0790q_{10} + 0.0675q_{11} + 0.0421q_{12} + 0.0421q_{13} + 0.0513q_{14} + 0.0577q_{15} + 0.0600q_{16} = 0$$

المعادلة الرابعة:

$$0.0274q_1 + 0.0600q_2 + 0.0962q_3 + q_4 + 0.1126q_5 + 0.1082q_6 + 0.0962q_7 + 0.0790q_8 + 0.0790q_9 + 0.0675q_{10} + 0.0421q_{11} + 0.0192q_{12} + 0.0192q_{13} + 0.0234q_{14} + 0.0263q_{15} + 0.0274q_{16} = 0$$

المعادلة الخامسة:

$$0.0274q_1 + 0.0600q_2 + 0.0962q_3 + 0.1126q_4 + q_5 + 0.1082q_6 + 0.0962q_7 + 0.0790q_8 + 0.0790q_9 + 0.0675q_{10} + 0.0421q_{11} + 0.0192q_{12} + 0.0192q_{13} + 0.0234q_{14} + 0.0263q_{15} + 0.0274q_{16} = 0$$

المعادلة السادسة:

$$0.0263q_1 + 0.0577q_2 + 0.0925q_3 + 0.1082q_4 + 0.1082q_5 + q_6 + 0.1082q_7 + 0.0962q_8 + 0.0962q_9 + 0.0822q_{10} + 0.0513q_{11} + 0.0234q_{12} + 0.0234q_{13} + 0.0263q_{14} + 0.0274q_{15} + 0.0263q_{16} = 33.33$$

المعادلة السابعة:

$$0.0234q_1 + 0.0513q_2 + 0.0822q_3 + 0.0962q_4 + 0.0962q_5 + 0.1082q_6 + q_7 + 0.1082q_8 + 0.1082q_9 + 0.0925q_{10} + 0.0577q_{11} + 0.0263q_{12} + 0.0263q_{13} + 0.0274q_{14} + 0.0263q_{15} + 0.0234q_{16} = 66.67$$

المعادلة الثامنة:

$$0.0192q_1 + 0.0421q_2 + 0.0675q_3 + 0.0790q_4 + 0.0790q_5 + 0.0962q_6 + 0.1082q_7 + q_8 + 0.1126q_9 + 0.0962q_{10} + 0.06000q_{11} + 0.0274q_{12} + 0.0274q_{13} + 0.0263q_{14} + 0.0234q_{15} + 0.0192q_{16} = 100$$

المعادلة التاسعة:

$$0.0192q_1 + 0.0421q_2 + 0.0675q_3 + 0.0790q_4 + 0.0790q_5 + 0.0962q_6 + 0.1082q_7 + 0.1126q_8 + q_9 + 0.0962q_{10} + 0.0600q_{11} + 0.0274q_{12} + 0.0274q_{13} + 0.0263q_{14} + 0.0234q_{15} + 0.0192q_{16} = 100$$

المعادلة العاشرة:

$$0.0421q_1 + 0.0675q_2 + 0.0790q_3 + 0.0675q_4 + 0.0675q_5 + 0.0822q_6 + 0.0925q_7 + 0.0962q_8 + 0.0962q_9 + q_{10} + 0.0962q_{11} + 0.0600q_{12} + 0.0600q_{13} + 0.0577q_{14} + 0.0513q_{15} + 0.0421q_{16} = 100$$

المعادلة الحادية عشرة:

$$0.0675q_1 + 0.0790q_2 + 0.0675q_3 + 0.0421q_4 + 0.0421q_5 + 0.0513q_6 + 0.0577q_7 + 0.0600q_8 + 0.0600q_9 + 0.0962q_{10} + q_{11} + 0.0962q_{12} + 0.0962q_{13} + 0.0925q_{14} + 0.0822q_{15} + 0.0675q_{16} = 100$$

المعادلة الثانية عشرة:

$$0.0790q_1 + 0.0675q_2 + 0.0421q_3 + 0.0192q_4 + 0.0192q_5 + 0.0234q_6 + 0.0263q_7 + 0.0274q_8 + 0.0274q_9 + 0.0600q_{10} + 0.0962q_{11} + q_{12} + 0.1126q_{13} + 0.1082q_{14} + 0.0962q_{15} + 0.0790q_{16} = 100$$

المعادلة الثالثة عشرة:

$$0.0790q_1 + 0.0675q_2 + 0.0421q_3 + 0.0192q_4 + 0.0192q_5 + 0.0234q_6 + 0.0263q_7 + 0.0274q_8 + 0.0274q_9 + 0.0600q_{10} + 00962q_{11} + 0.1126q_{12} + q_{13} + 0.1082q_{14} + 0.0962q_{15} + 0.0790q_{16} = 100$$

المعادلة الرابعة عشرة:

$$0.0962q_1 + 0.0822q_2 + 0.0513q_3 + 0.0234q_4 + 0.0234q_5 + 0.0263q_6 + 0.0274q_7 + 0.0263q_8 + 0.0263q_9 + 0.0577q_{10} + 0.0925q_{11} + 0.1082q_{12} + 0.1082q_{13} + q_{14} + 0.1082q_{15} + 0.0962q_{16} = 66.67$$

المعادلة الخامسة عشرة:

$$0.1082q_1 + 0.925q_2 + 0.0577q_3 + 0.0263q_4 + 0.026q_5 + 0.0274q_6 + 0.0263q_7 + 0.0234q_8 + 0.0234q_9 + 0.0513q_{10} + 0.0822q_{11} + 0.0962q_{12} + 0.0962q_{13} + 0.1082q_{14} + q_{15} + 0.1082q_{16} = 33.33$$

المعادلة السادسة عشرة:

$$0.1126q_1 + 0.0962q_2 + 0.0600q_3 + 0.0274q_4 + 0.0274q_5 + 0.0263q_6 + 0.0234q_7 + 0.0192q_8 + 0.0192q_9 + 0.0421q_{10} + 0.0675q_{11} + 0.0790q_{12} + 0.0790q_{13} + 0.0962q_{14} + 0.1082q_{15} + q_{16} = 0$$

يمكن حل هذه الجملة باستخدام البرمجة للحصول على قيم q_1 و q_2 و q_3 و q_4 و q_5 و q_6 و q_7 و q_8 و q_9 و q_{10} و q_{11} و q_{12} و q_{13} و q_{14} و q_{15} و q_{16}. وقد أوجدنا القيم باستخدام Matlab:

$$q_1 = -21.4750 , q_2 = -24.9202 , q_3 = -24.9202 , q_4 = -21.4750 , q_5 = -21.4750 , q_6 = 9.3386 , q_7 = 41.6115 , q_8 = 76.4767 , q_9 = 76.4767, q_{10} = 70.2191 , q_{11} = 70.2191 , q_{12} = 76.4767, q_{13} = 76.4767 , q_{14} = 41.6115 , q_{15} = 9.3386 , q_{16} = -21.4750$$

سوف ندرس الخطأ من خلال قانون المربعات الصغرى: $e = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} R_i^2}$

بعد تعويض q_1 و q_2 و q_3 و q_4 و q_5 و q_6 و q_7 و q_8 و q_9 و q_{10} و q_{11} و q_{12} و q_{13} و q_{14} و q_{15} و q_{16} في المعادلات السابقة وتعويض القيم الناتجة في القانون السابق وجدنا أن: $e_2 = 0.0478539445$ ونلاحظ أن الخطأ يتناقص كلما زاد عدد العناصر.

نقدم الآن برنامج Matlab للمثال الموضح أعلاه، حيث نقوم بإدخال جميع المعطيات والأرقام الموضحة في المثال السابق والشروط الحدية المعطاة:

```
% Constants
D = 0.707; % Diffusion coefficient
t = 1;     % Time point
% Number of boundary elements
```

```
num_elements = 16;
% Define boundary points (4 points on each edge of
the rectangle)
% Here we use 4 points per edge to total 16 points
num_points_edge = 4; % Number of points per edge
 % Define x and y boundary coordinates
x_boundary = [linspace(0, 2, num_points_edge), ...
              2*ones(1, num_points_edge), ...
              linspace(2, 0, num_points_edge), ...
              zeros(1, num_points_edge)];
 y_boundary = [zeros(1, num_points_edge), ...
              linspace(0, 1, num_points_edge), ...
              ones(1, num_points_edge), ...
              linspace(1, 0, num_points_edge)];
 % Check if the lengths are correct
if length(x_boundary) ~= num_elements ||
length(y_boundary) ~= num_elements
    error('The length of x_boundary or y_boundary
does not match num_elements.');
end
 % Initialize the coefficient matrix A and vector
b
A = zeros(num_elements);
b = zeros(num_elements, 1);
 % Set boundary conditions:
% Bottom edge: P = 0
% Right edge: P varies linearly from 0 to 100
% Top edge: P = 100
% Left edge: P varies linearly from 100 to 0
b(1:num_points_edge) = 0; % Bottom edge
b(num_points_edge+1:2*num_points_edge) =
linspace(0, 100, num_points_edge); % Right edge
b(2*num_points_edge+1:3*num_points_edge) = 100; %
Top edge
b(3*num_points_edge+1:end) = linspace(100, 0,
num_points_edge); % Left edge
 % Define Green's function for Fokker-Planck in 2D
```

```
G = @(x1, y1, x2, y2) (1/(4*pi*D*t)) * exp(-((x1-
x2)^2 + (y1-y2)^2)/(4*D*t));
 % Populate matrix A using Green's function
for i = 1:num_elements
    for j = 1:num_elements
        if i == j
            A(i, j) = 1;  % Handling diagonal
elements (self-interaction)
        else
            A(i, j) = G(x_boundary(i),
y_boundary(i), x_boundary(j), y_boundary(j));
        end
    end
end
 % Solve the linear system A*q = b
q = A\b;
 % Display the result
disp('The solution vector q is:');
disp(q);
 % Visualization
figure;
scatter(x_boundary, y_boundary, 100, q, 'filled');
colorbar;
title('BEM Solution for the Fokker-Planck Equation
with D=0.707 and 16 Boundary Elements');
xlabel('x');
ylabel('y');
```

8. النتائج ومناقشتها:

لقد قمنا في هذه المقالة ببناء خوارزمية لحل معادلة Fokker–Planck الخطية في بعدين باستخدام طريقة العناصر الحدية BEM، وهذه الطريقة تعتبر طريقة فعالة وذلك لأنها قادرة على حل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية، وخاصة إن لم يتوفر الحل التحليلي لها، وكما لاحظنا أنه كلما زاد عدد العناصر أصبحت الطريقة أدق، ومن هنا نرى أهمية الطرائق التقريبية التحليلية وقدرتها على حل

أصعب المسائل وفعاليتها ودقتها العالية كما لاحظنا في الدراسة العددية، علماً أن النتائج السابقة قد تمت جميعها باستخدام برنامج Matlab النسخة R2019a.

9. الاستنتاجات والتوصيات:

بالرغم من فعالية النتائج العددية السابقة، إلا أن خطوات طريقة العناصر الحدية تأخذ كثيراً من الوقت فكلما زاد عدد العناصر كلما اقتربنا من الحل الدقيق أكثر، وتزداد صعوبة هذا النوع من المسائل إذا كان الشكل أكثر تعقيداً وكانت الشروط الحديّة معقدة أكثر ومطبقة على عدد أكبر من الأضلاع، أو زاد عدد الثوابت غير المعدومة في صيغة المعادلة التفاضلية الجزئية، وهذه الأمور كلها سنقوم بتغطيتها في مقالاتنا القادمة إن شاء الله.

10. قائمة المراجع: References

[1] ALIPOUR, P. 2024- **The Dual Reciprocity Boundary Elements Method for One-Demensional Nonlinear Parabolic Partial Differential Equations**. J Math Sci 280, 131-145.

[2] GWINNER, J. and STEPHAN, E. P. 2018- **Advanced Boundary Element Methods**. Springer International Publishing. P661

[3] JIANG, W. XU, J. KUNPENG, L. OUYANG, Y. and YAN, J. 2022- **Coupling Heat Conduction and Radiation by an Isogeometric Boundary Element Method in 2-D Structures**. Mathematical problems in engineering/ vol. 2022, issue 1.

[4] KIRKUP, S. 2019- **The Boundary Element Method in Acoustics: A Survey**. MDPI/Applied Sciences. Vol. 9, issue 8.

[5] LYASHENKO, I. A. POPOV, V. L. and BORYSIUK, B. 2023- **Experimental Verification of the Boundary Element Method for Adhesive Contacts of a Coated Elastic Half-space**. Lubricants. Vol.11, issue 84.

[6] MAIERHOFER, G. AND HUYBRECHS, D. 2021- **Convergence Analysis of Oversampled Collocation Boundary Element Method in 2D**. arXiv:2103.1721v1.

[7] SATHYAN, S. AYDIN, U. and BELAHCEN, A. 2020- **Acoustic Noise Computation of Electrical Motors Using the Boundary Element Method.** MDPI/Energies vol. 13, issue 245.