دراسة استقرار المنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة ذات الطبولوجيا الثابتة

*نسرين الأسعد، ** محمد العلي، *** عبد الباسط الخطيب

ملخص البحث:

ندرس في هذا المقال خصائص استقرار المنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة ذات الطبولوجيا الثابتة. من المفترض أن تلبي حقول المتجهات للمنظومات الفردية فرضيات معينة، تحتوي مجموعة التوازن على جميع الحالات ذات أجزاء الحالة المتماثلة، إن هذه الفئة من المنظومات تُعد تعميم للمنظومات الخطية المتزاوجة، وهي متوفرة في علم الأحياء والفيزياء والهندسة والبيئة والعلوم الاجتماعية، على سبيل المثال شبكة التفاعل الكيميائي الحيوي، المذبذبات المتزاوجة، مصفوفات أنظمة الفوضى، سرب الكائنات الحية .

نقوم بتمثيل هذه المنظومات من خلال معادلات تفاضلية غير خطية متزاوجة في شكل الحالة.

كما في الحالة الخطية فأن مسألة استقرار هذه المنظومات، مرتكزة على البيان الموجه، الذي يصف بنية التفاعل في المنظومات ذات الاتصال الداخلي، أي من يتزاوج بمن. سوف ندرس في هذا المقال خصائص البيان الموجه التفاعلي الذي يؤدي إلى الاستقرار والجاذبية فيما يتعلق بمجموعة التوازن.

الكلمات المفتاحية: المنظومات الديناميكية المتزاوجة، اللاخطية، استقرار وجذب المنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة.

*) طالبة دكتوراه مكانيك رياضي في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة حمص– حمص– سوريا.

**) أستاذ دكتور مكانيك رياضي في قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة حمص– حمص– سوريا.

***) أستاذ دكتور جبر خطي في قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة حمص– حمص– سوريا.

AStudy on the Stability of Coupled Nonlinear Dynamical Systems With Fixed Topologie

Nsreen Alasaad,** Mouhammad Alali, Abd Albaset Alkhateb**

This chapter studies the stability properties of coupled nonlinear systems with fixed topologies. The vector fields of the individual systems are assumed to satisfy certain hypotheses. Again, the equilibrium set contains all states with identical state components. This class of systems generalizes that of coupled linear systems and is abundant in biology ,physics, engineering, ecology, and social science: e.g., a biochemical reaction network, coupled oscillators , arrays of chaotic systems, and swarm of organisms .we model such systems by coupled nonlinear differential equations in state form. Similar to the linear case central to the stability issue of such systems is the graph describing the interaction structure in the interconnected systems that is, who is coupled to whom. And a central question is, what properties of the interaction graph lead to stability and attractivity with respect to the equilibrium set.

Key words: : Coupled Dynamical Systems, nonlinear, Stability and attraction of coupled nonlinear dynamic systems .

*) master student, Department of mathematics–Faculty of science–Homs university Homs–Syria.

**) professor of mechanics, Department of mathematics–Faculty of science – Homs university Homs–Syria.

***) professor of linear algebra, Department of mathematics –Faculty of science– Homs university Homs–Syria.

1.مقدمة البحث

المنظومات الديناميكية المتزاوجة هي عبارة عن منظومة مؤلفة من منظومات جزئية (أعضاء)، موضع أحد الأعضاء يؤثر في التطور الزمني للأعضاء الأخرين.

إن مشاكل الاستقرار وامكانية إبقاء هذه المنظومات في حالة استقرار فيما يتعلق بوضعية التوازن من أبرز القضايا الرئيسية المتناولة . ولعل أهم هذه المشاكل هو شكل التفاعل فيما بينها أي من يرتبط بمن .إن الهدف الأساسي من هذا البحث هو تحديد كيف يؤثر شكل التفاعل على حالة الاستقرار وإمكانية الإبقاء على توازن الأنظمة في تركيبة زمنية معينة.

2.هدف البحث

دراسة استقرار وجذب المنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة ذات الطبولوجيا الثابتة، بناءً على قواعد رياضية يتم تشكيلها بالاستفادة من نظرية البيان والطبولوجيا والتحليل الرياضي.

3. طرق وأدوات البحث

في هذا البحث تم الاعتماد على التحليل والطبولوجيا ونظرية البيان، لدراسة استقرار وجذب المنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة.

4. مشكلة البحث

قد نعلم السلوك الديناميكي لمنظومة ديناميكية معينة عندما تتطور مع الزمن بشكل منفرد من خلال دراسات سابقة، إلا أن معرفتنا بهذه السلوكية المنفردة لن يؤدي إلى معرفة السلوكية الكلية لمجموعة المنظومات السابقة في حال التزاوج فيما بينها والذي ينتج عنه تأثير متبادل فيما بينها. تعتبر مسألة الربط ما بين الديناميكية المنفردة والديناميكية المتزاوجة من المسائل الهامة المفتوحة حالياً والتي لا يزال البحث فيها قائماً. ونعتبر هذا البحث مدخلاً مهماً للتعريف بهذه المسألة ومحاولة حلها والحصول على نتائج جديدة.

5. المناقشة والنتائج

من أجل متطلبات هذا البحث تلزمنا التعاريف التالية:

المجموعة الصامدة (invariant Set) : من أجل أي منظومة مرتبطة ظاهرياً بالزمن t من الشكل

$$\dot{x} = f(t, x)$$

حيث أن $f : R \times R^n \to R^n$ هي دالة مستمرة بشكل متقطع بالنسبة للمتحول الزمني t ومستمرة بالنسبة لمتحول الحالة x على $R \times R^n$.

نقول أن المجموعة $\Omega \subset R^n$ صامدة أمامياً للمنظومة إذا كان من أجل كل $t_0 \in R$ و كل $x^0 \in \Omega$ يتحقق أن $x(t, t_0, x^0) \in \Omega$، و ذلك أياً كانت $t \geq t_0$.

و بنفس الأسلوب نعرف المجموعة الصامدة خلفياً و الصامدة بشكلٍ عام.

مفهوم المجموعات المستقرة : نقول إن المجموعة الصامدة Ω أو المنظومة (بالنسبة للمجموعة الصامدة Ω)

- مُستقرة: إذا كان من أجل كل t_0 وكل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ بحيث إن

$$\|x^0\|_\Omega \leq \delta(\varepsilon, t_0) \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\|_\Omega \leq \varepsilon \;:\; \forall t \geq t_0$$

- مُستقرة بانتظام: إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ بحيث إن

$$\|x^0\|_\Omega \leq \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\|_\Omega \leq \varepsilon \;:\; \forall t \geq t_0$$

حيث يمثل النظيم $\|\cdot\|_{\Omega}$ المعرف على فضاء الحالة للمنظومة بُعد النقطة x^0 عن المجموعة Ω.

مفهوم المجموعات الجاذبة: نقول إن المجموعة الصامدة Ω

- جاذبة في المنطقة D من فضاء الحالة: إذا تحقق الشرط

$$\forall x^0 \in D \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty}\|x(t)\|_{\Omega} = 0$$

- جاذبة بانتظام في المنطقة D: إذا كان من أجل كل $c > 0$ يتحقق

$$(\|x^0\| \le c) \wedge (x^0 \in D) \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\|x(t)\|_{\Omega} = 0$$

وذلك بشكل منتظم من أجل كل x^0, t_0

- جاذبة في كل مكان، إذا كانت جاذبة على كامل الفضاء R^n.
- جاذبة بانتظام في كل مكان، إذا كانت جذابة بانتظام على كامل الفضاء R^n.

المجموعات المحدبة (convex set):

نقول عن مجموعة ما أنها محدبة إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين من المجموعة تقع بكاملها ضمن حدود المجموعة ، أي إذا تحقق الشرط التالي:

$$tx + (1-t)y \in S; \quad \forall x, y \in S, \quad t \in [0,1]$$

الهيكل المحدب للمجموعة S (convex hull):

بفرض أن $S \subset R^m$ عندئذٍ ندعو تقاطع جميع المجموعات المحدبة التي تحتوي المجموعة S بالهيكل المحدب للمجموعة S ، ويرمز لهُ بالرمز $co(S)$.

متعدد الأبعاد (polytope):

وهو الهيكل المحدب لمجموعة محدودة من النقاط $x_1,...,x_n \in R^m$ ، ونرمز لهُ بالرمز $co\{x_1,...,x_n\}$.

ملاحظة:

نرمز لداخلية S بالرمز $\operatorname{int}(S)$ وحدودية S بالرمز . $\partial(S)$

الفضاء الجزئي الناقل للمجموعة المحدبة:

لتكن S مجموعة محدبة تحوي نقطة الأصل، عندئذٍ نسمي أصغر فضاء جزئي يحوي المجموعة S بالفضاء الجزئي الناقل للمجموعة S، ونرمز لهُ بالرمز $lin(S)$،

ومن الواضح أن الفضاء الجزئي الناقل للمجموعة المحدبة S، يحتوي على جميع النقاط التي يمكن الوصول إليها من نقاط المجموعة المحدبة S عن طريق الجمع الخطي لنقاط هذه المجموعة المحدبة.

الداخلية النسبية للمجموعة المحدبة:

نرمز لها بالرمز $ri(s)$، وهي داخلية S عندما تكون مجموعة جزئية من $lin(s)$، وهي تمثل مجموعة النقاط التي يمكن الوصول إليها من داخل المجموعة المحدبة S، بحيثُ تكون محاطة بالكامل بنقاط أخرى من هذه المجموعة.

وكذلك بالنسبة للحدودية النسبية يُرمز لها بالرمز. $rb(s)$

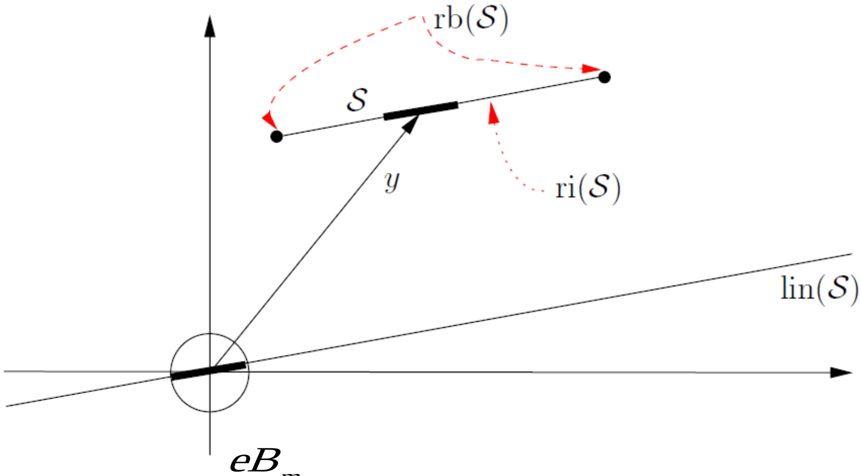
ملاحظة:

بفرض أن المجموعة S لا تحتوي نقطة الأصل فيجب تحويلها بواسطة متجه اختياري . بفرض v نقطة من المجموعة S، وبفرض $lin(S)$ تشير إلى أصغر فضاء جزئي يحوي $S-v$ و $ri(S)$ هي داخلية S عندما نعتبرها مجموعة جزئية من الفضاء الجزئي الأفيني $v+lin(S)$.

وأيضاً

$$ri(S)=\{y\in S;\exists\varepsilon>0,y+(\varepsilon B_m\cap lin(S))\subset S\}$$

حيثُ B_m كرة الوحدة في R^m .



الشكل (1) المجموعة S , $lin(S), ri(S), rb(S)$

ملاحظة:

عندما تكون S مجرد نقطة، فإن الداخلية النسبية $ri(S)$ هي نفسها، وذلك لأن الداخلية النسبية تتطلب وجود محيط حول النقطة، ولكن في حال وجود نقطة واحدة فقط، لا يمكن تكوين محيط يحتوي على نقاط أخرى، وبالتالي فأن الداخلية النسبية تتكون فقط من تلك النقطة نفسها.

ملاحظة:

من أجل أي مجموعة جزئية S غير خالية من R^m وكل $y \in R^m$ نرمز للمسافة بين y و S بالرمز

$$\|y\|_S = \inf_{z \in S} \|z - y\|$$

تعريف المخروط (cone):

نسمي المجموعة غير الخالية $k \subset R^m$ مخروط، إذا كان $\lambda y \in k$ بحيث $y \in k$ و $\lambda > 0$.

المخروط المماسي (tangent cone):

بفرض $S \subset R^m$ مجموعة محدبة مغلقة و لتكن $y \in S$، عندئذٍ المخروط المماسي للمجموعة S عند النقطة y هو مجموعة جميع المتجهات التي يمكن أن تؤخذ من النقطة y بحيث تبقى النقاط الناتجة داخل المجموعة المحدبة . ويكتب رياضياً :

$$T(y,S) = \left\{ z \in R^m : \lim_{\lambda \to \infty} \inf \frac{\|y + \lambda_z\|_S}{\lambda} = 0 \right\}$$

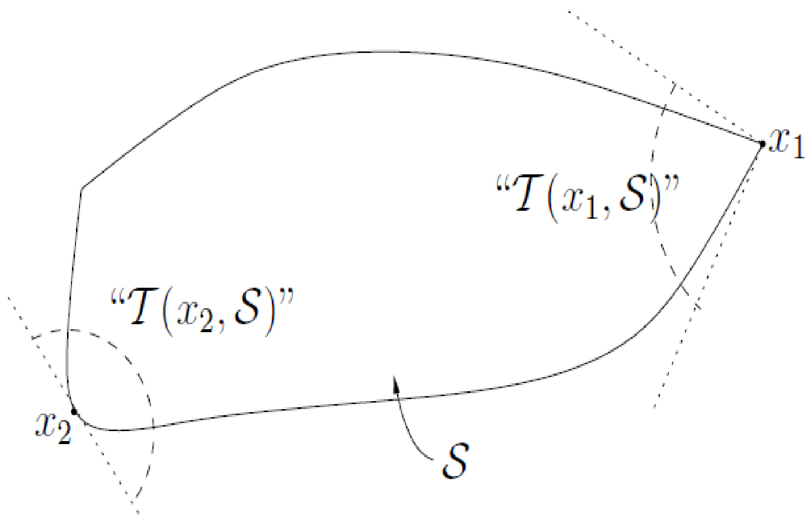
المخروط العادي (normal cone):

المخروط العادي للمجموعة S عند النقطة y هو مجموعة جميع المتجهات التي تمثل الاتجاهات التي يمكن أن نتحرك بها من النقطة y نحو خارج المجموعة المحدبة وبحيث تكون هذه المتجهات عمودية على أي اتجاه داخلي في المخروط المماسي عند تلك النقطة ويعبر عنهُ رياضياً بالعلاقة :

$$N(y,S)=\left\{z^*:\left\langle z,z^*\right\rangle \le 0 \forall z \in T(y,S)\right\}$$

ملاحظة:

إذا كانت $y \in \operatorname{int}(S)$ فإن $T(y,S)=R^m$.



الشكل (2) مخاريط المماس

يبين الشكل (2) المخاريط المماسية $T(x_1,S)$ و $T(x_2,S)$ يتم الحصول عليها من خلال تحويل $T(x_1,S)$ و $T(x_2,S)$ إلى الأصل على ∂S، في حالة خاصة إذا كانت S تتكون من نقطة واحدة فقط y عندئذٍ يكون $T(y,S)=\{0\}$ من الناحية الهندسية المخروط المماسي ل $y \in \partial S$

هو مخروط لهُ مركز في الأصل يحتوي على جميع المتجهات التي تشير اتجاهاتها من y (داخل) المجموعة S. إذا كانت هذه الحدود ملساء عند النقطة y فإن $T(y,S)$ هو نصف الفضاء المماسي المنقول إلى الأصل .

على سبيل المثال في الشكل (2) تكون حدودية x_2 ملساء في حين أن حدودية x_1 ليست ملساء لذلك فأن $T(x_2,S)$ هو نصف فضاء مماسي منقول إلى الأصل في حين أن $T(x_1,S)$ ليس كذلك.

قبل الانتهاء من هذه الفقرة، نلخص في التمهيدية التالية بعض خصائص المخاريط المماسية للمجموعات المحدبة.

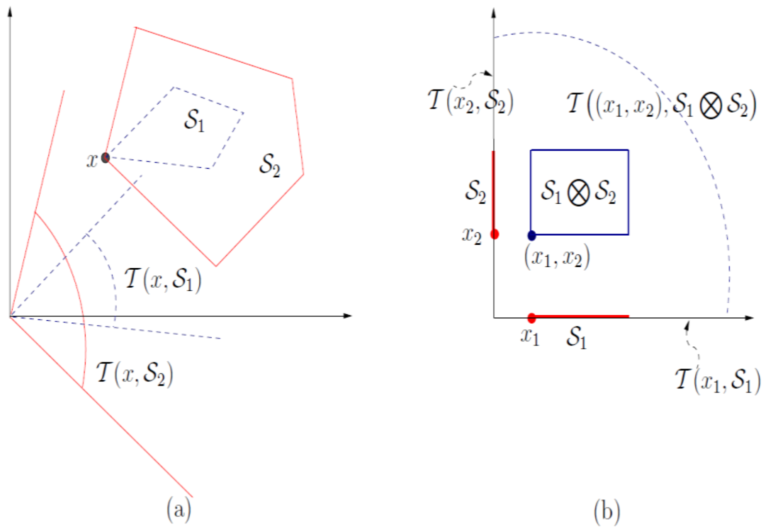
تمهيدية1:

إذا كانت المجموعة المحدبة S_2 تحتوي على مجموعة محدبة S_1، فعندئذ مخروط المماس عند أي نقطة x للمجموعة S_2 يحتوي مخروط المماس عند x للمجموعة S_1.

ملاحظة:

إذا كانت المجموعة المحدبة جداء ديكارتي لمجموعات محدبة $S_1,...,S_n$، عندئذٍ مخروط المماس عند أي نقطة $x=(x_1,...,x_n)$ للمجموعة، هو الجداء الديكارتي لهذه المخاريط المماسية $T(x_i,S_i)$ بحيث $i=1,...,n$.

على سبيل المثال في الشكل (3) ، (b) مجموعة محدبة (مربعة) في المستوى هي الجداء الديكارتي للمجموعتين S_1 و S_2، نلاحظ أن مخروط المماس عند x_1 للفترة الزمنية S_1 هو مجرد محور أفقي موجب ومخروط المماس عند x_2 للفترة الزمنية S_2 هو محور عمودي موجب، جداءهم الديكارتي هو الربع الأول وهو بالضبط مخروط المماس عند النقطة (x_1,x_2) للمجموعة المربعة.



الشكل (3) خواص المخاريط المماسية للمجموعات المحدبة

التمهيدية 2: [1]

بفرض S_i , $i=1,\dots,n$ تمثل مجموعات مغلقة محدبة في R^m. الخواص التالية محققة:

1) إذا كانت $y\in S_1\subset S_2$ عندئذٍ فإن $T(y,S_1)\subset T(y,S_2)$ وأيضاً $N(y,S_2)\subset N(y,S_1)$

2) إذا كان $x_i\in S_i\,(i=1,\dots,n)$ فإن:

$$T((x_1,\dots,x_n),\bigotimes_{i=1}^{n}S_i)=\bigotimes_{i=1}^{n}T(x_i,S_i),$$
$$N((x_1,\dots,x_n),\bigotimes_{i=1}^{n}S_i)=\bigotimes_{i=1}^{n}N(x_i,S_i).$$

مشتق ديني:

بفرض $a,b(a<b)$ عددين حقيقيين وبفرض الدالة $h:(a,b)\to R, t\to h(t)$ والنقطة $t^*\in(a,b)$ يتم تعريف مشتقة ديني العليا للدالة h عند t^* بالشكل:

$$D^+h(t^*)=\lim_{\tau\to 0^+}\sup\frac{h(t^*+\tau)-h(t^*)}{\tau}$$

التمهيدية 3: [2]

بفرض أن الدالة h مستمرة على المجال (a,b) ، عندئذٍ فإن الدالة h غير متزايدة على المجال (a,b) إذا وفقط إذا تحقق $D^+h(t)\le 0$ ، وذلك من أجل كل $t\in(a,b)$.

في تحليل الاستقرار نحن نهتم بمشتق ديني لدالة على طول حل المعادلة التفاضلية .

بفرض لدينا المنظومة غير المستقلة:

$$\dot{x}=f(t,x)$$

وليكن $x(t)$ حلاً لهذه المنظومة، وبفرض أن $V(t,x):R\times R^n\to R$ دالة مستمرة تحقق شرط ليبشتز المحلي عند x بشكل منتظم فيما يتعلق بالزمن t، بالتالي فأن مشتقة ديني العليا للدالة $V(t,x(t))$ فيما يتعلق بالزمن t تكون مُعطاة بالشكل:

$$D^+V(t,x(t))=\lim_{\tau\to 0^+}\sup\frac{V(t+\tau,x(t+\tau))-V(t,x(t))}{\tau}$$

من جهة أخرى نعرف:

$$D_f^+V(t,x)=\lim_{\tau\to 0^+}\sup\frac{V(t+\tau,x+\tau f(t,x)-V(t,x))}{\tau}$$

الدالة D_f^+V تدعى مشتقة ديني العليا للدالة V على طول الحل للمنظومة (1).

أظهر يوشيزاوا في عام 1966 [6] أن

$$D^{+}V(t^{*},x(t^{*}))=D_{f}^{+}V(t^{*},x^{*}))$$

وذلك عندما نضع $x(t^{*})=x^{*}$

التمهيدية 4 :[3,4]

بفرض $V_i(t,x):R\times R^n\to R$ تمثل الصف C^1 من أجل كل $i\in I_0=\{1,...,n\}$، وبفرض إن $V(t,x)=\max\limits_{i\in I_0}V_i(t,x)$.

وبفرض أن $I(t)=\{i\in I_0:V_i(t,x(t))=V(t,x(t))\}$ مجموعة من الأدلة.

يتم الحصول على الحد الأقصى عند t

$$D^{+}V(t,x(t))=\max_{i\in I(t)}\dot{V}_i(t,x(t))$$

مبدأ الثبات (الاستقرار):[2,5]

بفرض لدينا المنظومة المستقلة عن الزمن

$$\dot{x}=f(x)$$

وبفرض أن $f:D\to R^n$ دالة مستمرة، حيثُ D مجموعة جزئية مفتوحة من R^n .

إن تفرد الحلول غير مضمون . وبفرض x^0 نقطة من D. سيتم اختيار الزمن الأولي دوماً يساوي الصفر.

الحل الغير مستمر $x(0)=x^0$ يكتب بالشكل:

$$x:(\alpha,\omega)\rightarrow R^{n}$$

حيثُ $\alpha<0<\omega$

يتم تعيين الحد الموجب لمجموعة الحلول $x(t)$ بواسطة $\wedge^{+}(x^{0})$.

التمهيدية 5: [2]

إذا كان الحل $x(t)$ محدوداً، فإن $\wedge^{+}(x^{0})$ غير خالية ومركبة ومستمرة، وأيضاً يكون

$$x(t)\rightarrow\wedge^{+}(x^{0})\qquad t\rightarrow\omega\quad,\omega=\infty$$

الأن سوف نقدم مبرهنة لاسال

مبرهنة1: [2] لاسال

بفرض $x(t)$ تمثل حلاً للمنظومة (2) وبفرض $V:D\rightarrow R$ تمثل دالة ليبشتز بحيث أن $D^{+}V(x(t))\leq 0$ على المجال $[0,\omega)$، عندئذٍ المجموعة $\wedge^{+}(x^{0})\cap D$ موجودة في اتحاد (اجتماع) جميع الحلول التي تبقى في $Z=\{x\in D:D^{+}V(x)=0\}$ على فترات التعريف القصوى.

صياغة المسألة:

في هذا القسم نقدم نموذجاً عاماً غير خطياً للمنظومات ذات الاتصال الداخلي، يمكن أن يصف معظم المنظومات الديناميكية المتزاوجة. بفرض لدينا أسرة من المنظومات الممثلة بالمعادلات التفاضلية العادية من الشكل:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_p^{\,1}(x_1,\dots,x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_p^{\,n}(x_1,\dots,x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

حيثُ $x_i \in R^m$ تمثل حالة المنظومة الجزئية أو العضو رقم i بحيث $i = 1,\dots,n$ والعنصر p موجود ضمن المجموعة P ، حيثُ إن مجموعة الوسطاء P تمثل اسرة من نماذج المزاوجة المختلفة.

وكما نلاحظ أن المنظومة الجزئية تشترك بفضاء حالة مشترك R^m .

نقدم الحالة العامة من أجل n عضو $x = (x_1,\dots,x_n) \in R^{mn}$ النموذج بالشكل المختصر يكتب بالشكل:

$$\dot{x} = f_p(x), \qquad p \in P \tag{2}$$

حيثُ $p \in P$ و $f_p : R^{mn} \to R^{mn}$ أسرة لحقول متجهية منتظمة تحقق شرط ليبشتز يتم تحديدها بواسطة مجموعة العناصر P.

سنقدم تعريف البيان الموجه والبيان الموجه التفاعلي الديناميكي للمنظومات غير الخطية المتزاوجة.

من أجل كل $p \in P$ نربط كل حقل متجهي f_p ببيان موجه تفاعلي $\mathcal{G}_p$ ، والذي يمثل بنية التفاعل من أجل n منظومة جزئية (أعضاء).

تعريف :

البيان الموجه التفاعلي $\mathcal{G}_p(V, E_p)$ يتكون من :

- مجموعة محدودة V من العقد، العقدة i تمثل العضو i.
- مجموعة الأوتار E_p تمثل روابط بين الاعضاء.

يشير الوتر من العقدة j إلى العقدة i إن العضو j مجاور للعضو i ، بمعنى أن f_p^i تعتمد على x_j أي أنه يوجد $x_j^1, x_j^2 \in R^m$ بحيث أن:

$$f_p^i(x_1,...,x_j^1,...,x_n) \neq f_p^i(x_1,...,x_j^2,...,x_n)$$

مجموعة جوارات العضو i نرمز لها بالرمز $N_i(P)$.

بفرض $\Omega = \{x \in R^{mn}; x_1 = x_2 = ... = x_n\}$ مجموعة ثابتة للمنظومة ذات الاتصال الداخلي. كما في المنظومات الخطية المتزاوجة نحن نهتم بمعرفة مدى تأثير الاستقرار و الجذب فيما يتعلق بالمجموعة Ω للمنظومة (1) ببنية التفاعل.

المسألة:

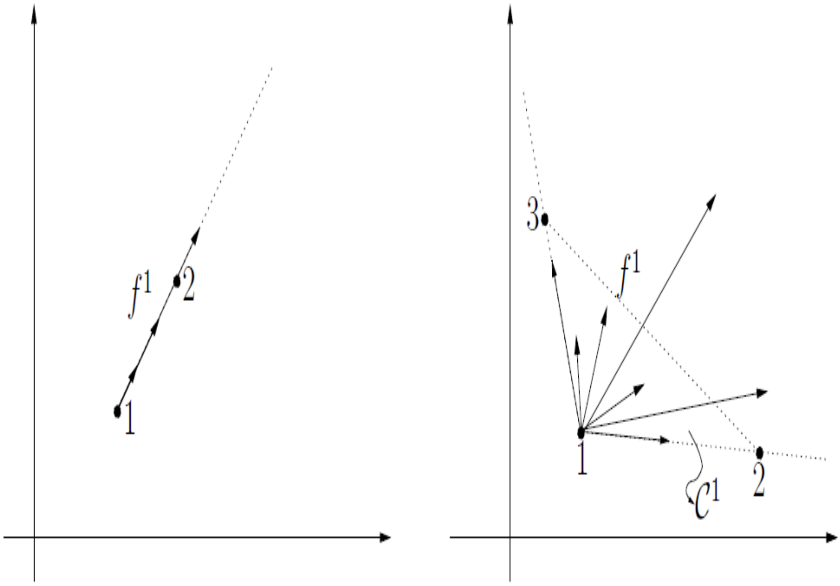
بفرض إن الحقل المتجهي f يحقق بعض الفرضيات، ما هي الشروط الواجب توفرها في البيان الموجه التفاعلي $\mathcal{G}$، التي تكون بموجبها المنظومة ذات الاتصال الداخلي مستقرة أو جاذبة فيما يتعلق بمجموعة التوازن Ω؟

بفرض $C^i = Co\{x_i, x_j : j \in N_i\}$ تمثل متعدد الأبعاد في R^m الذي شكلتهُ حالات العضو i وجوارهُ (N_i تمثل مجموعة جوارات العضو i) عندئذٍ من أجل كل $i \in I_0\{1,...,n\}$ نفرض أن:

1): f^i مستمرة على R^{mn}

2): من أجل كل $x \in R^{mn}$ و $f^i(x) \in T(x_i, c^i)$ وأيضاً $f^i(x) \neq 0$ إذا كان c^i ليس مفرداً و x^i هو رأسهُ.

الفرض 1) هو لضمان وجود الحلول. وندعو $T(x_i, c^i)$ $f^i(x) \in$ بالمخروط المماسي للمجموعة



الشكل (4) مثالان لحقول متجهية تحقق الفرض 2

c^i عند النقطة x^i، ويشار إليه أحياناً على أنهُ شرط المماسية [7].

يوضح الشكل (4) مثالان لحقول متجهية تحققان الفرض 2)، في المثال الأيسر العضو رقم 1 يملك جوار واحد فقط هو العضو رقم 2.

متعدد الابعاد c^1 هو الخط المتقطع الذي ينضم إلى x_1, x_2 ومخروط المماس $T(x_1, c^1)$ هو المتجه المغلق $\{\lambda(x_2 - x_1); \lambda \geq 0\}$

الفرض 2) يعني أن الحقل المتجهي f^1 غير صفري ونقاطهُ في اتجاه $x_2 - x_1$.

في المثال الأيمن العضو رقم 1 يملك جوارين هما الأعضاء 2,3، متعدد الأبعاد c^1 هو المثلث ذو الرؤوس x_1, x_2, x_3، ومخروط المماس $T(x_1, c^1)$ هو

$$\{\lambda_1(x_2 - x_1) + \lambda_2(x_3 - x_1); \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$$

الفرض 2) يعني أن f^1 غير صفري ونقاطهُ تقع داخل هذا المخروط المغلق .

بشكل عام الفرض 2) يتطلب أن $f^i(x)$ تملك الشكل:

$$\sum_{j \in N_i} \alpha_j(x)(x_j - x_i)$$

حيثُ $\alpha_j(x)$ دوال سلمية غير سالبة، و $f^i(x)$ تكون غير صفرية إذا كانت c^i ليست مفردة و x_i هو رأسهُا.

من أجل المنظومة غير الخطية المتزاوجة (2) مع تطبيق الفرضين 1) و 2) نعرف المجموعة التي سنقوم بدراستها من أجل الاستقرار والجذب بالشكل:

$$\Omega = \{x \in R^{mn}; x_1 = ... = x_n\}$$

لتكن $\bar{x}$ تمثل أي نقطة من المجموعة Ω ، من الواضح إنهُ من أجل أي i يكون:

$$c^i = Co\{\bar{x}_i, \bar{x}_j; j \in N_i\} = \{\bar{x}_i\}$$

بالتالي فإن $T(\bar{x}_i, c^i) = \{0\}$ بالتالي يتحقق من الفرض 2) أن $f^i(\bar{x}) = 0$ من أجل كل $i = 1,...,n$.

مما يعني أن المجموعة Ω تمثل مجموعة التوازن، وهي بالطبع أيضاً تمثل مجموعة ثابتة.

التمهيدية 6: بفرض المنظومة ذات الاتصال الداخلي المتزاوجة

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f^1(x_1,...,x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f^n(x_1,...,x_n) \end{aligned}$$

تملك حل $X(t)$ على المجال $[0,\infty)$، وبفرض

$$V_i^{\alpha}(x)=\frac{1}{2}\|x_i-\alpha\|^2 \quad \& \quad V^{\alpha}(x)=\max_{i\in I_0} V_i(x)$$

حيثُ $\alpha\in R^m$ نقطة اختيارية بالتالي على طول أي مسار $X(t)$ يكون $D^+V^{\alpha}(x(t))\le 0$

الإثبات:

ليكن $x^0\in R^{mn}$ وبفرض $X(t)$ حلاً للمنظومة المفروضة معرفاً على المجال $[0,\omega)\subseteq[0,\infty)$ بحيث $x(0)=x^0$.

بالنظر إلى الحد الأقصى للدالة $V^{\alpha}(x)$ فهي ليست تفاضلية في كل مكان لذلك نستخدم مشتقة ديني.

نعرف $I(x)=\{i\in I_0; V_i^{\alpha}(x)=V^{\alpha}(x)\}$ مجموعة الأدلة حيثُ يتم الوصول إلى الحد الأقصى من خلالها. من خلال التمهيدية 3 يتحقق أن:

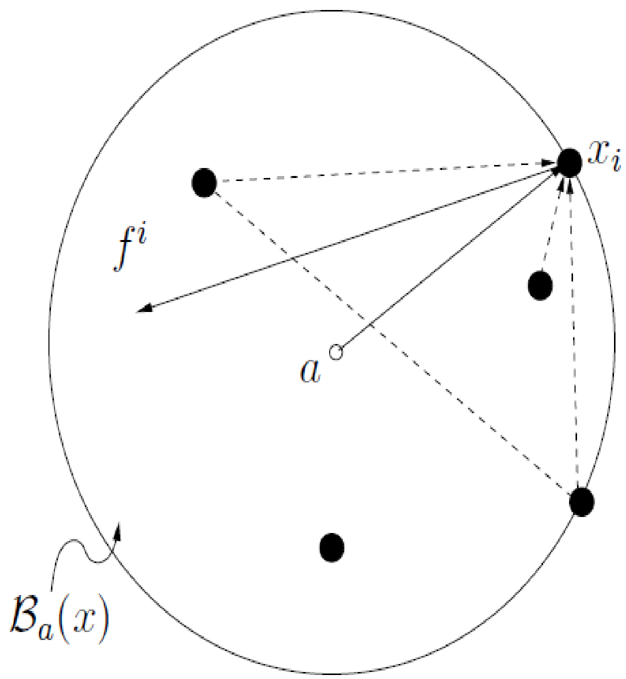
$$D^+V^{\alpha}(x(t))=\max_{i\in I(x(t))} V_i^{\alpha}(x(t)) \qquad (*)$$

نعرف كرة في الفضاء R^m بالشكل:

$$B_{\alpha}(x)=\{y\in R^m; \|y-\alpha\|^2\le 2V^{\alpha}(x)\}$$

هذا يعني أن الكرة $B_{\alpha}(x)$ تضم جميع النقاط $x_1,\dots,x_n$ وذلك من خلال متعدد الأبعاد $C^i=co\{x_i,x_j; j\in N_i\}\subset B_{\alpha}(x)$

من خلال التمهيدية (1) والفرض 2) لدينا أيضاً



الشكل (5) رسم يوضح $B_\alpha(x), f^i(x)$

$$f^i(x) \in T(x_i, C^i) \subset T(x_i, B_\alpha(x))$$

بالإضافة لذلك، عندما يكون $i \in I(x)$ هذا يعني أن العضو x_i يقع على حدودية الكرة $B_\alpha(x)$ ولذلك فإن المتجه $(x_i - \alpha)$ يمثل نصف قطر الكرة، بالتالي:

$$(x_i - \alpha) \in N(x_i, B_\alpha(x))$$

المخروط العادي للكرة $B_\alpha(x)$ في x_i

لذلك من خلال تعريف المخروط العادي يتحقق أنهُ من أجل كل $i \in I(x)$:

$$\dot{V}_i^\alpha(x) = (x_i - \alpha)^T f^i(x) \le 0$$

بالمقارنة مع المعادلة (*) ينتج:

$$D^{+}V^{\alpha}(x(t)) \le 0$$

بالإضافة إلى ذلك من الأعلى ومن خلال التمهيدية (2) نرى إن $V^{\alpha}(x(t)) \le V^{\alpha}(x(0))$ من أجل كل $t \in [0, \omega)$ ولذلك فأن الحل $x(t)$ يكون محدود وبالتالي فأن $\omega = \infty$

مبرهنة (2):

المنظومة ذات الاتصال الداخلي

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f^{1}(x_1, ..., x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f^{n}(x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

مستقرة بالنسبة لكل توازن $\bar{x} \in \Omega$

الإثبات:

بفرض إن أي توازن $\bar{x} \in \Omega$ سيكون من الشكل $\bar{x} = \zeta \otimes I_n$ من أجل بعض $\zeta \in R^m$ وبفرض

$$V^{\zeta}(x) = \frac{1}{2} \max_{i \in I_0} \left\| x_i - \zeta \right\|^2$$

يمكن التحقق بسهولة من أن $V^{\zeta}(x) = 0$ عندما $x = \bar{x}$، وأن $V^{\zeta}(x) \ge 0$ عندما $x \ne \bar{x}$. أي أن الدالة $V^{\zeta}(x)$ صامدة أمامياً بالنسبة لكل توازن $\bar{x}$.

بالإضافة لذلك من خلال التمهيدية (5) نحصل على أن مشتقة ديني على طول أي مسار للمنظومة المفروضة

$$D^{+}V^{\zeta}(x(t)) \leq 0$$

ومن خلال المبرهنة (6) [2] يتحقق أن المنظومة مستقرة بالنسبة لكل موضع توازن $\bar{x} \in \Omega$.

مبرهنة (3):

المنظومة ذات الاتصال الداخلي

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f^{1}(x_1,...,x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f^{n}(x_1,...,x_n) \end{aligned}$$

جاذبة في كل مكان فيما يتعلق بالمجموعة Ω إذا وفقط إذا كان البيان الموجه التفاعلي شبه قوي الاتصال.

الإثبات:

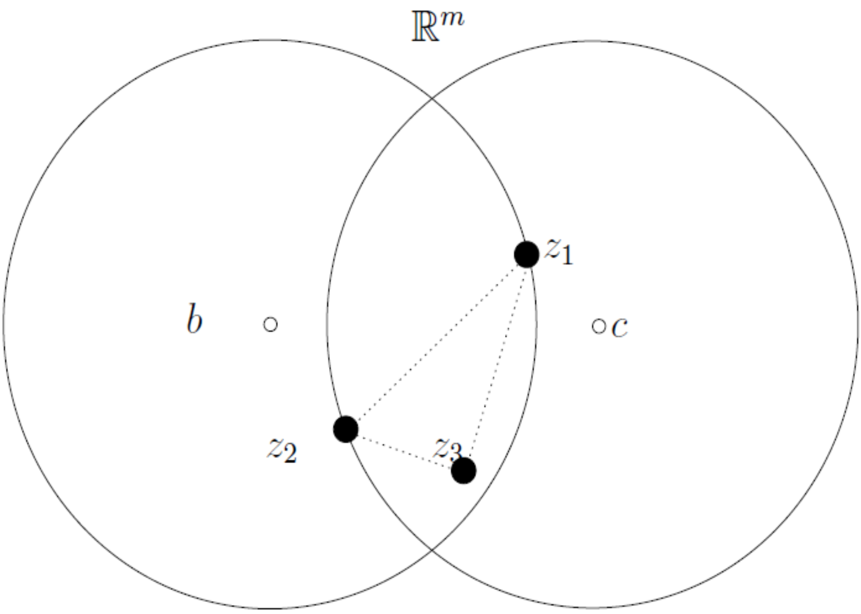
$(\Leftarrow)$ليكن $x^{0} \in R^{mn}$ عنصر اختياري، من خلال التمهيدية (5) نعلم أن المنظومة المفروضة تملك حل $x(t)$ على المجال $[0,\infty)$ و . $x(0)=x^{0}$ وبفرض $V^{\alpha}(x)$ تمثل دالة من الشكل (8) حيثُ $\alpha \in R^{m}$ نقطة اختيارية. من خلال التمهيدية (5) لدينا $D^{+}V^{\alpha}(x(t)) \leq 0$.

بفرض $\wedge^{+}(x^{0})$ تمثل مجموعة الحدود الموجبة للحلول التي تحقق $x(0)=x^{0}$. من خلال برهان التمهيدية (5) نحن نعلم أن الحل $x(t)$ محدود، بالتالي من خلال التمهيدية (4) مجموعة الحدود الموجبة $\wedge^{+}(x^{0})$ غير خالية ومركبة ومستمرة وأيضاً $x(t) \to \wedge^{+}(x_{0})$ عندما $t \to \infty$.

من جهة أخرى يتحقق من المبرهنة (1) أن $\wedge^{+}(x^{0}) \subset M$ حيثُ M تمثل اتحاد جميع الحلول التي تبقى في $Z_{\alpha}=\{x \in R^{mn}; D^{+}V^{\alpha}(x)=0\}$

نختار أي نقطتين $b,c \in R^m$ وباعتماد نفس البرهان وبالاعتماد على المبرهنة (1) نجد أيضاً أن $M' \subset \wedge^{+}(x^{0})$ حيث M' تمثل اتحاد جميع الحلول التي تبقى في $Z_b \cap Z_c$

ومن ثم نفرض أن $M' \subset \Omega$ ، ولنثبت ذلك. لنفرض العكس أنهُ توجد نقطة $q = (q_1,...,q_n) \in M'$
لكن $q \not\subset \Omega$ تشير ل k رؤوس ل $2 \le k < n; q \not\subset \Omega$ ل $co\{q_1,\dots,q_n$ بواسطة $Z_1,...,Z_k$



الشكل (5) النقطة q في M وليست في Ω

بحيثُ b,c يمكن اختيارها بحرية.

بدون المساس بعمومية المسألة يمكن أن نفرض أن هناك رأساً واحداً فقط لنقل Z_1 في حدودية الكرة $B_b(q)$ ، ويوجد رأس واحد فقط لنقل Z_2 في حدودية الكرة $B_c(q)$.

بفرض
$$I'(q)=\{i\in I_0;q_i=Z_1\}$$
$$II'(q)=\{i\in I_0;q_i=Z_2\}$$

تمثل مجموعات الأعضاء الموجودة في Z_1,Z_2 على التوالي إذا كان البيان الموجه التفاعلي $\mathcal{G}$ شبه قوي الاتصال بالتالي يتحقق أنهُ يوجد عقدة مركزية لنقل v_c وبما أن $I'(q),II'(q)$ غير مفككة، بالتالي العقدة المركزية v_c لا يمكن أن تكون في كلتا المجموعتين. بدون المساس بعمومية المسألة لنقل أنها لا تنتمي للمجموعة $I'(q)$

لتكن $x(0)=q$ وبفرض أن $x(t)$ تمثل حل للمنظومة المفروضة يغادر من q.

بما أن $q\in M'\subset Z_b\cap Z_c$ ولدينا من أجل كل $t\in[0,\infty)$ يكون :

$$D^+V^b(x(t))=\max_{i\in I'(x(t))}(x_i(t)-b)^T f^i(x(t))=0$$

حيثُ

$$I'(x(t))=\{i\in I_0;V^b(x(t))=V_i^b(x(t))\}$$

نلاحظ أنه يمكن اختيار b خارج المجموعة المركبة التي تحتوي على جميع $x_i(t)$ بحيث $t\in[0,\infty)$، لذلك من أجل كل $i\in I'(x(t))$ يكون :

$$x_i(t)-b\neq 0;\forall t\in[0,\infty)$$

أيضاً من خلال الفرض 2) وبالاستفادة من أن $T(x_i,C^i)$ محتواة بشكل كامل في $T(x_i,B_b(x))$.

إن $f^i(x(t))$ ليست عمودية على $(x_i(t)-b)$ ، لذلك فأن $D^+V^b(x(t))=0$ يتضمن أنه من أجل كل t يوجد $i\in I'(x(t))$ بحيث $f^i(x(t))=0$ أي أن $\dot{x}(t)=0$

ومن ثم من خلال تعريف المجموعة $I'(x(0))$

$$g(x(0)) = \min_{i \in I'(x(0))} V_i^b(x(0)) - \min_{j \in I_0 - I'(x(0))} V_j^b(x(0)) > 0$$

بما أن $t \to g(x(t))$ دالة مستمرة يتحقق أنه يوجد عدد موجب صغير بشكل كافٍ w_1 بحيث أنه $\forall t \in [0, w_1]$ فإن $g(x(t)) > 0$ أي انهُ من أجل أي $i \in I'(x(0))$ و $j \in I_0 - I'(x(0))$ فإن

$$V_i^b(x(t)) > V_j^b(x(t))$$

بالتالي

$$(I_0 - I'(x(0)) \cap I'(x(t)) = \phi \forall t \in [0, w_1]$$

أو بمعنى:

$$I'(x(t)) \subseteq I'(x(0)) \forall t \in [0, w_1]$$

الأن نجزأ المجموعة $I'(x(t))$ بحيث $I'(x(t)) = J(x(t)) \cup \bar{J}(x(t))$، حيثُ:

$$J(x(t)) = \{i \in I'(x(t)); f^i(x(t)) = 0\}$$
$$\bar{J}(x(t)) = \{i \in I'(x(t)); f^i(x(t)) \neq 0\}$$

بالتدريج، من أجل كل $i \in I'(x(0))$ و $x_i(0) = z_1$ ، بالتالي $i \in \bar{J}(x(0))$ يقتضي أن $x_i(0) = z_1$ و $f^i(x(0)) \neq 0$ والذي يقتضي بدورهُ أن العضو i يملك جوار في $I_0 - I'(x(0))$ بالواقع جميع جوارات $i \in \bar{J}(x(0))$ تكون في $I'(x(0))$، بالتالي $C^i(x(0))$ تكون غير مفردة، من خلال الفرض 2) و $f^i(x(0)) = 0$ والذي يناقض حقيقة أن $i \in \bar{J}(x(0))$.

بفرض $j \in I_0 - I'(x(0))$ تمثل عضو مجاور للعضو $i \in \bar{J}(x(0))$ بما أنهُ من أجل كل $t \in [0, w_1]$ يكون $I'(x(t)) \subseteq I'(x(0))$ يتحقق أن $I_0 - I'(x(0)) \subseteq I_0 - I'(x(t))$ بالتالي

الذي $i \in I'(x(t))$ يكون $t \in [0,w_1]$ لكل $j \in I_0 - I'(x(t))$ إذاً من أجل كل $t \in [0,w_1]$ يقتضي أن $x_i(t)$ تكون على حدودية الكرة $B_b(x(t))$ ولذلك فإن $x_i(t)$ تكون رأس $C^i(x(t))$. أيضاً بما أن العضو i يملك جوار $j \in I_0 - I'(x(t))$ و $C^i(x(t))$ ليست مفردة ومن خلال الفرض 2) $f^i(x(t)) \neq 0$ بالتالي تبين لنا أن :

$$(\forall t \in [0,w_1]) i \in I'(x(t)) \Rightarrow (\forall t \in [0,w_1]) f^i(x(t)) \neq 0$$

هذا يقتضي أنه خلال الفترة الزمنية $[0,w_1]$ ولا عضو في $\bar{J}(x(0))$ يمكن الوصول إليه من $\bar{J}(x(t))$ أو بشكل مكافئ :

$$\forall t \in [0,w_1] \quad J(x(t)) \subseteq J(x(0))$$

ومن ثم سوف نبين أن $J(x(t))$ موجودة بشكل تام في $J(x(0))$. بفرض العكس أن $J(x(t)) = J(x(0))$ لكل $t \in (0,w_1]$ بالتالي:

$$\forall (i \in J(x(0)) (\forall t \in [0,w_1]) f^i(x(t)) = 0$$

هذا يعني أنه خلال الفترة الزمنية $[0,w_1]$ ، $x_i(t) = z_1$ لكل $i \in J(x(0))$ بما أن $x_i(t)$ هو رأس $C^i(x(t))$ و $f^i(x(t)) = 0$ والفرض 2) يقتضي أن $C^i(x(t))$ مفردة، بالتالي من أجل كل $i \in J(x(0))$ و $t \in [0,w_1]$ يتم تجميع جميع الأعضاء المجاورين للعضو i في Z_1 وبما أن العقدة المركزية للبيان الموجه $\mathcal{G}$ لا تنتمي ل $J(x(0)) \subset I'(x(0))$ يجب أن يكون لبعض الأعضاء في $J(x(0))$ عضو مجاور j في $\bar{J}(x(0)) \cup I_0 - I'(x(0))$. كما هو موضح أعلاه فأن العضو المجاور j يكون بحيث $x_j(t) = Z_1$ من أجل كل $t \in [0,w_1]$ والذي يقتضي أن $j \not\subset I_0 - I'(x(0))$ ومن جهة أخرى أن $\forall t \in [0,w_1], x_j(t) = z_1$ الذي يقتضي أن $f^j(x(0)) = 0$. الذي يناقض حقيقة أن $j \in J(x(0))$. بالتالي فقد وضحنا أنه يوجد $t_1 \in [0,w_1]$ بحيث أن $J(x(t_1))$ تكون مجموعة جزئية تامة من $J(x(0))$. يؤدي تكرار هذا

البرهان إلى وجود t_k بحيث أن $J(x(t_k))$ تكون خالية. مما يناقض حقيقة وجود $i \in I'(x(t_k))$ بحيث أن $f^i(x(t))=0$ لذلك فأن الحل $x(t) \to \Omega$ عندما $t \to \infty$ والجاذبية في كل مكان محققة.

$(\Leftarrow)$:

بفرض العكس بفرض أن البيان الموجه $\mathcal{G}$ ليس شبه قوي الاتصال بالتالي يوجد عقدتين i^* و j^* بحيث أنه من أجل أي عقدة k لا يمكن الوصول إلى i^* و j^* من k

لتكن V_1 تمثل مجموعة جزئية من العقد التي يمكن الوصول أليها من i^* ، ولتكن V_2 تمثل مجموعة جزئية من العقد التي يمكن الوصول إليها من j^* ، من الواضح أن V_1 و V_2 مفككتان وأيضاً من أجل أي عقدة $i \in V_1$ (وكذلك من المجموعة V_2) ، مجموعة جوارات العقدة i تمثل مجموعة جزئية من V_1 (وكذلك من المجموعة V_2) .

نختار أي $z_1, z_2 \in R^m$ بحيث يكون $z_1 \neq z_2$ ونختار الشروط الأولية :

$$x_i(0) = \begin{cases} z_1 & \forall i \in V_1 \\ z_2 & \forall i \in V_2 \end{cases}$$

بالتالي خلال الفرض 2)

$$x_i(t) = \begin{cases} z_1 & \forall i \in V_1 \\ z_2 & \forall i \in V_2 \end{cases} \qquad t \geq 0$$

هذا يثبت أن المنظومة ليست جاذبة في كل مكان فيما يتعلق بالمجموعة Ω.

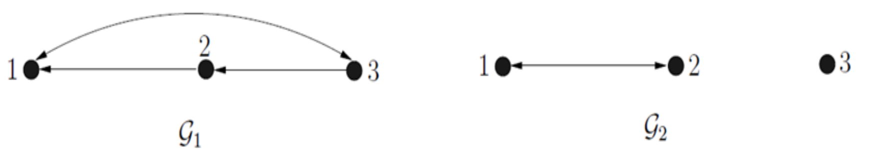
تطبيق:

بفرض لدينا اسرة من المنظومات غير الخطية المتزاوجة

$$P=1:\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1^1(x_1,x_2,x_3) \\ \dot{x}_2 = f_1^2(x_2,x_3) \\ \dot{x}_3 = f_1^3(x_1,x_3) \end{cases}$$

$$P=2:\begin{cases} \dot{x}_1 = f_2^1(x_1,x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2^2(x_1,x_2) \\ \dot{x}_3 = f_2^3(x_3) \end{cases}$$

إن البيان الموجه التفاعلي لهاتين المنظومتين هو



من الواضح أن المنظومتين مستقرتين وذلك من أجل أي موضع توازن $\bar{x} \in \Omega$ وذلك حسب المبرهنة 2

وكذلك من الواضح أن البيان الموجه التفاعلي $\mathcal{G}_1$ شبه قوي الاتصال، بالتالي فأن المنظومة الأولى جاذبة في كل مكان فيما يتعلق بوضعية التوازن، وذلك حسب المبرهنة 3.

بينما المنظومة الثانية ليست كذلك وذلك لأن البيان الموجه التفاعلي المرتبط بها ليس شبه قوي الاتصال.

المراجع:

[1] AUBIN J. P, 1991- Viability Theory. Birkhauser

[2] ROUCHE N, HABETS P, and LALOY M.,1975- Stability Theory by Liapunov's Direct Method. Springer-Verlag

[3] CLARKE F,H, 1975- Generalized gradients and applications Transactions of the American Mathematical Society, vol. 205, no. 4, pp. 247–262.

[4] DANSKIN J, M, 1966- The theory of max-min, with applications SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 14, no. 4, pp. 641–664.

[5] LASALLE J, P, 1968- Stability theory for ordinary differential equations Journal of Differential Equations, vol. 4, pp. 57–65.

[6] ROUCHE N, HABETS P, MURRAY M, 1975- Stability Theory by Liapunov Direct Method Springer- Verlag.

[7] BLANCHINI F, 1999- Set invariance in control Automatica, vol. 35, no. 11, pp1747-1767