المعادلات التفاضلية التامّة من الرتبة الثانية

الباحثة الدكتورة: سوزان مازن اليوسف

مدرّسة في قسم الرياضيات ـ كليّة العلوم ـ جامعة حمص

الملخص

عرّفنا في هذا البحث المعادلة التفاضلية التّامّة من الرتبة الثانية، ثم أثبتنا الشرط اللازم والكافي لتكون المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية وذات المعاملات المتغيرة معادلة تامّة من الرتبة الثانية وأوجدنا الحل العام لها، كما بيّننا الشروط اللازمة لتكون المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة وغير المتجانسة ذات المعاملات المتغيرة تامّة من الرتبة الثانية وأوجدنا الحل العام لها، وبشكل خاص بيّننا الحالة التي تكون فيها معادلة كوشي–أولر التفاضلية تامّة من الرتبة الثانية وأوجدنا حلها العام.

الكلمات المفتاحية:

معادلة تفاضلية – الحل العام – رتبة معادلة – تفاضل تام – تفاضل تام من الرتبة الثانية – معادلة تفاضلية خطية متجانسة – معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة – معادلة كوشي–أولر التفاضلية.

Second–order exact differential equations

Abstract:

In this paper, we defined the second–order exact differential equation, then proved the necessary and sufficient condition for the second–order differential equation with variable coefficients to be a second–order exact differential equation, and found its general solution, We also showed the conditions necessary for a homogeneous and non–homogeneous linear differential equation with variable coefficients to be a second–order exact differential equation and found its general solution, In particular, we showed the case in which the Cauchy–Euler differential equation is exact of the second order and found its general solution.

Keywords:

Differential equation, The General solution, Order of equation, exact Differential, Second–order exact differential, Homogeneous linear differential equation, Non–homogeneous linear differential equation, Cauchy–Euler differential equation.

1. مقدمة:

يطلق اسم المعادلات التفاضلية على المعادلات التي تحوي مشتقات وتفاضلات لبعض الدوال الرياضية وتظهر فيها بشكل متغيرات. عندما نتكلم عن معنى حل عام للمعادلة التفاضلية فإننا نعني إيجاد مجموعة الدوال الرياضية التي تحقق مشتقاتها هذه المعادلات.

وما زالت هذه المعادلات منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسية والحيوية بالإضافة إلى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت أهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها.

تنقسم المعادلات التفاضلية إلى قسمين مختلفين هما المعادلات التفاضلية العادية والمعادلات التفاضلية الجزئية، وقد تمت دراسة العديد من المعادلات التفاضلية العادية مثل المعادلات من الرتبة الأولى نذكر منها(المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة والتامة وغيرها)[1] والرتبة الثانية [2] حيث وضعت العديد من الدراسات عنها بما فيها المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة[3], [1] كما استخدمت طرق عدّة لدراسة المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية وذات المعاملات الثابتة نذكر منها طريقة معكوس مؤثر وطريقة العناصر المتغيّرة وطريقة متسلسلات القوى[3],[1]

أما في بحثنا هذا فسوف نتناول نوع خاص من المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية وذات المعاملات المتغيرة نسمّيه المعادلات التامّة من الرتبة الثانية، وذلك بعد ادخال مفهوم المعادلة التفاضلية التامّة من الرتبة الثانية. ومن ثم نوجد الحل العام الموافق لها، كما سندرس المعادلة الخطية التامّة من الرتبة الثانية، وبشكل خاص سنوجد الحالة التي تكون فيها معادلة كوشي–أولر التفاضلية معادلة تامّة من الرتبة الثانية ونوجد حلّها العام.

2. هدف البحث:

يهدف هذا البحث إلى عرض نوع خاص من المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية وذات المعاملات المتغيرة وهي المعادلات التامّة من الرتبة الثانية وإيجاد الحل العام لها، وأيضاً تبيان متى تكون المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية تامّة من الرتبة الثانية وبشكل خاص معادلة كوشي–أولر التفاضلية وإيجاد الحلول العامة الموافقة.

3. أهمية البحث:

تكمن أهميّة البحث في إيجاد الحل العام للمعادلات التفاضلية التامّة من الرتبة الثانية والمعادلات التفاضلية الخطية التامّة من الرتبة الثانية وذلك دون الحاجة للبحث عن حلول خاصة كما الحال في الطرق المعروفة والمستخدمة في إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية.

4. المناقشة والنتائج:

4-1 تعاريف أساسية:

تعريف1: [4]

ليكن التابع $F(x,y)$ المعرف والقابل للمفاضلة باستمرار على الساحة D من المستوي XOY، وبفرض أن y تابع لـ x عندئذ يعرف التفاضل التام للتابع $F(x,y)$ بالشكل:

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = F_x(x,y) + F_y(x,y).y'$$

$$\Longrightarrow dF(x,y) = \left[F_x(x,y) + F_y(x,y).y'\right]dx$$

$$= F_x(x,y)dx + F_y(x,y).dy$$

(فيما يلي سنكتب اختصاراً F_x بدلاً من $F_x(x,y)$ و F_y بدلاً من $F_y(x,y)$)

تعريف2:

ليكن التابع $F(x,y)$ المعرف والقابل للمفاضلة باستمرار في الساحة D من المستوي XOY، وبفرض أن مشتقاته الجزئية من الرتبة الثانية موجودة ومستمرة على D، حيث y تابع لـ x عندئذ يعرف التفاضل التام من الرتبة الثانية للتابع $F(x,y)$ بالشكل:

$$\frac{d^2F(x,y)}{dx^2} = F_{xx}(x,y) + F_{xy}(x,y).y' + F_{yx}(x,y).y' + F_{yy}(x,y).y'^2 + F_y(x,y).y''$$

وحيث إن التابع $F(x,y)$ مستمر بالنسبة للمتغيرين x,y ويمتلك مشتقات جزئية مستمرة فإن: [4],[5]

$$F_{xy} = F_{yx}$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{d^2F(x,y)}{dx^2} = F_{xx} + 2F_{xy}.y' + F_{yy}.{y'}^2 + F_y.y''$$

$$\Longrightarrow d^2F(x,y) = F_{xx}dx^2 + 2F_{xy}.dxdy + F_{yy}.dy^2 + F_y.d^2y$$

وهو التفاضل التام من الرتبة الثانية للتابع $F(x,y)$ حيث y تابع لـ x.

المعادلات التفاضلية التامّة من الرتبة الثانية:

كل معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية وذات معاملات متغيرة ومن الشكل:

$$M(x,y) + N(x,y).y' + L(x,y).{y'}^2 + P(x,y).y'' = 0$$

يمكن كتابتها بالشكل:

$$M(x,y)dx^2 + N(x,y)dxdy + L(x,y)\,dy^2 + P(x,y)d^2y = 0$$

تعريف3:

نقول عن المعادلة التفاضلية:

$$M(x,y)dx^2 + N(x,y)dxdy + L(x,y)dy^2 + P(x,y)d^2y = 0 \quad (1)$$

حيث $M(x,y), N(x,y), L(x,y), P(x,y)$ توابع قابلة للمفاضلة باستمرار على الساحة D من المستوي XOY، إنها تامّة من الرتبة الثانية، إذا كان طرفها الأيسر تفاضلاً تاماً من الرتبة الثانية لتابع ما $F(x,y)$، أي إذا وجد تابع $F(x,y)$ قابل للمفاضلة مرتين على الساحة D ويحقق:

$$d^2F(x,y) = M(x,y)dx^2 + N(x,y)dx\,dy + L(x,y)dy^2$$
$$+P(x,y)d^2\mathrm{y}$$

وهذا يتحقق إذا كان:

$$\left.\begin{aligned} F_{xx}(x,y) &= M(x,y) \\ 2F_{xy}(x,y) &= N(x,y) \\ F_{yy}(x,y) &= L(x,y) \\ F_{y}(x,y) &= P(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

وذلك حيث

$$d^2F(x,y) = F_{xx}\,dx^2 + 2F_{xy}\,dxdy + F_{yy}dy^2 + F_y\,d^2y$$

مثال1:

إن المعادلة:

$$2dx^2 + 2dy^2 + 2yd^2y = 0$$

تفاضلية تامّة من الرتبة الثانية لأنه يوجد تابع $F(x,y) = x^2 + y^2$ حيث y تابع لـ x بحيث يحقق:

$$d^2F(x,y) = 2\,dx^2 + 0 + 2dy^2 + 2y\,d^2y$$

2-4 أهم النتائج:

مبرهنة1:

الشرط اللازم والكافي لتكون المعادلة (1) تامّة من الرتبة الثانية أن يتحقق:

$$\left.\begin{aligned} 2M_y(x,y) &= N_x(x,y) \\ N_y(x,y) &= 2L_x(x,y) \\ P_y(x,y) &= L(x,y) \\ 2P_x(x,y) &= N(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

قبل البدء بإثبات المبرهنة نلاحظ أن تحقق العلاقتين الأولى والثانية من (3) يؤدي إلى تحقق العلاقة:

$$M_{yy}(x,y) = L_{xx}(x,y) \qquad \dots (3')$$

حيث باشتقاق العلاقة الأولى من (3) بالنسبة لـ y نجد:

$$2M_{yy}(x,y) = N_{xy}(x,y) = 2L_{xx}(x,y)$$

الإثبات:

لنفرض بداية أن المعادلة (1) تامّة وبالتالي يوجد تابع $F(x,y)$ يحقق العلاقات (2).

بالاستفادة من أن التابع $F(x,y)$ مستمر بالنسبة للمتغيرين x,y ويمتلك مشتقات جزئية مستمرة عندئذ تكون العلاقات الآتية محققة:

$$2F_{xxy}(x,y) = 2F_{xyx}(x,y)$$

$$2F_{xyy}(x,y) = 2F_{yyx}(x,y)$$

$$F_{yy}(x,y) = L(x,y) = P_y(x,y)$$

$$2F_{xy}(x,y) = 2F_{yx}(x,y)$$

بالتعويض من المعادلات (2) نجد:

$$2M_y(x,y) = N_x(x,y)$$

$$N_y(x,y) = 2L_x(x,y)$$

$$L(x,y) = P_y(x,y)$$

$$2P_x(x,y) = N(x,y)$$

وبذلك نكون قد أثبتنا تحقق العلاقات (3).

لنثبت الآن الشرط الكافي لتكون المعادلة تامّة من الرتبة الثانية.

لنفرض أن العلاقات (3) محققة، ولنبحث عن التابع $F(x,y)$ الذي يحقق العلاقات (2).

بمكاملة العلاقة الأولى من (2) بالنسبة لـ x تكاملاً محدوداً من x_0 إلى x وباعتبار أن y ثابتة. نجد أن:

$$F_x(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx+\emptyset_1(y) \qquad (4)$$

بالمكاملة بالنسبة لـ x نجد:

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx^2+\emptyset_1(y)(x-x_0)+\emptyset_2(y) \qquad (5)$$

نشتق العلاقة (4) بالنسبة لـ y فنجد:

$$2F_{xy}(x,y)=\int_{x_0}^{x} 2M_y(x,y)dx+2\emptyset_1'(y)$$

وبالاستفادة من العلاقة الثانية من (2) والعلاقة الأولى من (3) نجد:

$$2F_{xy}(x,y)=\int_{x_0}^{x} N_x(x,y)dx+2\emptyset_1'(y)=N(x,y)$$

$$N(x,y)-N(x_0,y)+2\emptyset_1'(y)=N(x,y)$$

$$\Longrightarrow 2\emptyset_1'(y)=N(x_0,y)$$

نكامل بالنسبة لـ y تكاملاً محدوداً من y_0إلى y فنحصل على:

$$2\emptyset_1(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy$$

نعوض العلاقة السابقة في (5):

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx^2+\int_{y_0}^{y}\frac{N(x_0,y)(x-x_0)}{2}dy+\emptyset_2(y) \qquad (5')$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ y:

$$F_y(x,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} M_y(x,y)\,dx^2 + \frac{N(x_0,y)(x-x_0)}{2} + \emptyset_2'(y)$$

$$= \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \frac{N_x(x,y)}{2}\,dx^2 + \frac{N(x_0,y)(x-x_0)}{2} + \emptyset_2'(y)$$

وبالاستفادة من العلاقات (3) نجد:

$$= \int_{x_0}^{x} [P_x(x,y) - P_x(x_0,y)]\,dx + P_x(x_0,y)(x-x_0) + \emptyset_2'(y)$$

$$= P(x,y) - P(x_0,y) - P_x(x_0,y)(x-x_0) + P_x(x_0,y)(x-x_0) + \emptyset_2'(y)$$

ولكن بالفرض لدينا من العلاقات(2) أن:

$$F_y(x,y) = P(x,y)$$

ومنه:

$$\emptyset_2'(y) = P(x_0,y) \Longrightarrow \emptyset_2(y) = \int_{y_0}^{y} P(x_0,y)dy$$

نعوض في العلاقة $(5')$ فنحصل على:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx^2 + \int_{y_0}^{y} \frac{N(x_0,y)(x-x_0)}{2}dy + \int_{y_0}^{y} P(x_0,y)dy \qquad (6)$$

بقي أن نتأكد من تحقق الشرط $F_{yy} = L(x,y)$.

نشتق العلاقة (6) مرتين متتاليتين بالنسبة لـ y:

$$F_{yy}(x,y)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}M_{yy}(x,y)\,dx^2+\frac{N_y(x_0,y)(x-x_0)}{2}+P_y(x_0,y)$$

بالاستفادة من العلاقة الثانية من (3) و $(3')$ نحصل على:

$$F_{yy}(x,y)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}L_{xx}(x,y)\,dx^2+\frac{2L_x(x_0,y)(x-x_0)}{2}+P_y(x_0,y)$$

وبالتالي بحساب التكامل الثنائي نحصل على:

$$F_{yy}(x,y)=L(x,y)-L(x_0,y)-L_x(x_0,y)(x-x_0)$$
$$+L_x(x_0,y)(x-x_0)+L(x_0,y)$$

ومنه ينتج أن:

$$F_{yy}(x,y)=\mathrm{L}(x,y)$$

إذاً العلاقة (6) هي التابع المطلوب.

ويمكن التعبير عنها أيضاً بالشكل:

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}M(x,y)\,dx^2+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\frac{N(x_0,y)}{2}dx\,dy+$$
$$+\int_{y_0}^{y}P(x_0,y)dy$$

إذاً فالمعادلة (1) تامّة من الرتبة الثانية.

حل المعادلة التفاضلية التامّة من الرتبة الثانية:

بفرض أن المعادلة (1) تامّة من الرتبة الثانية، عندئذ تكتب بالشكل:

$$d^2F(x,y)=0$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) من الشكل:

$$F(x,y) = c_1x + c_2$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

مثال2:

لتكن المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$x^2y^3 + 2x^3y^2y' + \frac{x^4y}{2}y'^2 + \frac{x^4y^2}{4}y'' = 0$$

الحل:

إن المعادلة التفاضلية تكتب بالشكل:

$$x^2y^3dx^2 + 2x^3y^2dxdy + \frac{x^4y}{2}dy^2 + \frac{x^4y^2}{4}d^2\mathrm{y} = 0$$

نلاحظ أن شروط التمام محققة، حيث:

$$2M_y = N_x = 6x^2y^2$$

$$N_y = 2L_x = 4x^3y$$

$$M_{yy} = L_{xx} = 6x^2y$$

$$P_y = L = \frac{x^4y}{2}$$

$$2P_x = N = 2x^3y^2$$

وبالتالي بأخذ $x_0 = y_0 = 0$ نحصل على التابع $F(x,y)$ من الشكل:

$$F(x,y) = \int_0^x\int_0^x M(x,y)\,dx^2 + \int_0^y \frac{N(0,y)(x-0)}{2}dy + \int_0^y P(0,y)dy$$

$$= \int_0^x\int_0^x x^2y^3\,dx^2 + 0 + 0 = \frac{x^4y^3}{12}$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{x^4y^3}{12}=c_1x+c_2$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

مثال3: إن المعادلة التفاضلية:

$$2\sin y+(4x\cos y+2e^y)y'+(-x^2\sin y+xe^y){y'}^2+$$
$$+(x^2\cos y+xe^y)y''=0$$

تكتب بالشكل:

$$2\sin y\,dx^2+(4x\cos y+2e^y)dxdy+(-x^2\sin y+xe^y)dy^2+$$
$$+(x^2\cos y+xe^y)d^2y=0$$

تامّة من الرتبة الثانية لأنها تحقق الشروط (3) وبالتالي يعطى حلها العام بالشكل:

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^x M(x,y)\,dx^2+\int_0^y\frac{N(0,y)(x-0)}{2}dy$$
$$+\int_0^y P(0,y)dy=c_1x+c_2$$
$$\Longrightarrow \mathrm{F}(x,y)=x^2\sin y+xe^y-x=c_1x+c_2$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية:

تعريف4:

ندعو المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$f(x)y+N(x)y'+P(x)y''=0 \qquad (7)$$

معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية، حيث f, N, P دوال مستمرة.

يمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل:

$$M(x, y) + N(x)y' + L(x)y'^2 + P(x)y'' = 0$$

حيث $L(x) = 0 \ , \ M(x, y) = f(x)y$.

مبرهنة2:

الشرط اللازم والكافي لتكون المعادلة (7) تامّة من الرتبة الثانية هو أن يتحقق:

$$2M_y = 2f(x) = N'$$

$$2P' = N$$

الإثبات:

نلاحظ أن $P_x = P' \ , \ N_x = N'$ حيث $P \ , N$ تابعين لـ x فقط (حيث نرمز بـ $'$ للاشتقاق العادي بالنسبة لـ x).

من الواضح أن المعادلة (7) تحقق الشروط الآتية:

$$N_y = 2L_x = 0$$

$$P_y = L = 0$$

$$M_{yy} = L_{xx} = 0$$

إذاً بحسب المبرهنة1 حتى تكون المعادلة تامّة من الرتبة الثانية فهذا يكافئ تحقق العلاقتين:

$$2M_y = 2f(x) = N_x = N'$$

$$2P_x = 2P' = N$$

حل المعادلة التفاضلية الخطية التامّة من الرتبة الثانية

في هذه الحالة يكون الحل العام من الشكل:

$$F(x,y) = y\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx^2 + \frac{N(x_0)(x-x_0)(y-y_0)}{2} +$$
$$+P(x_0)(y-y_0) = c_1x + c_2$$

المعادلة الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية:

لتكن المعادلة الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية:

$$f(x)y + N(x)y' + P(x)y'' = g(x)$$

حيث f, N, P, g دوال مستمرة، يمكن إعادة كتابتها بالشكل:

$$[f(x)y - g(x)]dx^2 + N(x)dxdy + P(x)d^2y = 0$$

في هذه الحالة يكون

$$M(x,y) = f(x)y - g(x) \quad , \quad L(x,y) = 0$$

وشروط التمام تبقى ذاتها كما في حالة الخطية المتجانسة

$$2M_y = 2f(x) = N_x = N'$$
$$2P_x = 2P' = N$$

ويكون الحل العام الموافق لها من الشكل:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} [f(x)y - g(x)]\,dx^2 + \frac{N(x_0)(x-x_0)(y-y_0)}{2} +$$
$$+P(x_0)(y-y_0) = c_1x + c_2$$

مثال4:

إن المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية والمتجانسة:

$$x^5y'' + 10x^4y' + 20x^3y = 0$$

تكتب بالشكل:

$$x^5 d^2 y + 10x^4 dxdy + 20x^3 y dx^2 = 0$$

وهي تامّة من الرتبة الثانية لتحقق الشروط

$$2M_y = 40x^3 = N_x$$
$$2P_x = 10x^4 = N$$

وبالتالي يكون الحل العام لها:

$$F(x,y) = y\int_0^x \int_0^x f(x)\,dx^2 + \frac{N(0)(x-x_0)(y-y_0)}{2} +$$
$$+P(0)(y-y_0) = c_1 x + c_2$$
$$= y\int_0^x \int_0^x 20x^3\,dx^2 + 0 + 0 = c_1 x + c_2$$
$$F(x,y) = yx^5 = c_1 x + c_2$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

معادلة كوشي–أولر التفاضلية:

نعلم أن معادلة كوشي–أولر التفاضلية من الرتبة الثانية من الشكل:

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = f(x) \tag{8}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية وغير متجانسة تكتب بالشكل:

$$[cy - f(x)]dx^2 + bx\,dxdy + ax^2 d^2 y = 0$$

حيث $M = cy - f(x)\,,\ N = bx\ ,\ L = 0\ ,\ P = ax^2$

مبرهنة3:

تكون معادلة كوشي–أولر التفاضلية (8) تامّة من الرتبة الثانية إذا وفقط إذا كان:

$$b = 4a = 2c$$

الإثبات:

بحسب المبرهنة السابقة، تكون المعادلة (8) تامّة من الرتبة الثانية إذا وفقط إذا تحققت

$$2M_y = N'$$

$$2P' = N$$

ولكن $N' = b$ وبالتالي:

$$2M_y = N' \Leftrightarrow 2c = b$$

كما أن $P' = 2ax$ ومنه:

$$2P' = N \Leftrightarrow 4ax = bx \Leftrightarrow 4a = b$$

من العلاقتين السابقتين نستنتج أن المعادلة (8) تامّة من الرتبة الثانية إذا وفقط إذا تحقق:

$$2c = b = 4a$$

ملاحظة:

تكتب معادلة كوشي–أولر التفاضلية التامّة من الرتبة الثانية:

$$[cy - f(x)] + bxy' + ax^2y'' = 0$$

بالشكل:

$$[cy - f(x)]dx^2 + bx\,dxdy + ax^2d^2y = 0$$

وباختيار x_0, y_0 ثوابت ضمن ساحة التعريف وبالتعويض في العلاقة (6) نحصل على:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}[cy - f(x)]\,dx^2 + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\frac{bx_0}{2}dx\,dy + \int_{y_0}^{y}ax_0^2\,dy$$

$$= \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}[cy - f(x)]\,dx^2 + \frac{bx_0}{2}(x - x_0)(y - y_0) + ax_0^2(y - y_0)$$

$$= \frac{cy(x - x_0)^2}{2} - \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx^2 + \frac{bx_0}{2}(x - x_0)(y - y_0) +$$

$$+ax_0^2(y - y_0)$$

وبالتالي يعطى الحل العام بالشكل:

$$F(x, y) = \frac{cy(x - x_0)^2}{2} - \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx^2 + \frac{bx_0}{2}(x - x_0)(y - y_0)$$

$$+ax_0^2(y - y_0) = c_1x + c_2 \qquad (9)$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

مثال5:

إنّ معادلة كوشي–أولر التفاضلية

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \cos x$$

هي تامة من الرتبة الثانية حيث:

$$a = 1\ \ ,b = 4\ \ ,c = 2$$

وبالتالي بالتعويض في العلاقة (9) وباختيار الثوابت

$x_0 = y_0 = 0$ ويكون الحل العام من الشكل:

$$F(x, y) == \frac{cy(x - x_0)^2}{2} - \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx^2 + \frac{bx_0}{2}(x - x_0)(y - y_0)$$

$$+ax_0^2(y - y_0) = c_1x + c_2$$

$$F(x,y) = yx^2 - \int_0^x \int_0^x \cos x\, dx^2 + 0 = c_1 x + c_2$$

$$= yx^2 + \cos x - 1 = c_1 x + c_2$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

مثال6:

$$\frac{1}{2}x^2 y'' + 2xy' + y = -\frac{1}{x^2}$$

هي معادلة كوشي–أولر التفاضلية وهي تامة من الرتبة الثانية حيث:

$$\left(a = \tfrac{1}{2}\ , b = 2\ \ , c = 1\right)$$

بوضع $x_0 = 1\ \ ,\ y_0 = 0$ وبالتعويض في (9) نحصل على الحل العام بالشكل:

$$F(x,y) = \frac{y(x-1)^2}{2} - \int_1^x \int_1^x \frac{-1}{x^2} dx^2 + (x-1)y + \frac{y}{2} = c_1 x + c_2$$

$$= \frac{y(x-1)^2}{2} - \ln x + x - 1 + (x-1)y + \frac{y}{2} = c_1 x + c_2$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

النتائج:

مبرهنة1:

الشرط اللازم والكافي لتكون المعادلة (1) تامّة من الرتبة الثانية أن يتحقق:

$$\left.\begin{array}{c} 2M_y(x,y) = N_x(x,y) \\ N_y(x,y) = 2L_x(x,y) \\ P_y(x,y) = L(x,y) \\ 2P_x(x,y) = N(x,y) \end{array}\right\} \qquad (3)$$

مبرهنة2:

الشرط اللازم والكافي لتكون المعادلة (7) تامّة من الرتبة الثانية هو أن يتحقق:

$$2M_y = 2f(x) = N_x$$
$$2P' = N$$

مبرهنة3:

تكون معادلة كوشي-أولر التفاضلية (8) تامّة من الرتبة الثانية إذا وفقط إذا كان:

$$b = 4a = 2c$$

- ومن النتائج أيضاً أننا أوجدنا الحل العام الموافق لكل من المعادلات التامة المذكورة في المبرهنات الثلاث السابقة.

المقترحات والتوصيات:

1. إيجاد عوامل التكميل للمعادلة التفاضلية غير التامّة من الرتبة الثانية.
2. إيجاد عوامل التكميل للمعادلة التفاضلية الخطية غير التامّة من الرتبة الثانية وبشكل خاص لمعادلة كوشي-أولر التفاضلية.

المراجع العلمية:

[1] AL-ABDUL AL-RAZZAQ. I, 2013-Mathematics /3/. Homs University publications, Syria, 666p.

[2] HASSANI. S, 2013-Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations. Springer International Publishing, Second edition, Switzerland, 1198p.

[3] AHMAD. S, 2012-Numerical Differential Equations. University Book House, United Arab Emirates, 397p.

[4] AHMAD. S, 2012-Differentiation.University Book House, United Arab Emirates, 481p.

[5] AL-HUSSEIN. S, 2004-Analysis (2). Homs University publications, Syria, 502p.