

دراسة أثر الإضافة التبددية في الكمون الضوئي

للمنظومة ($P+^{96}\text{Rh}$) باستخدام طريقة VMA

د. مفيد دياب

أ.د. أنيس بلال

ملك العلي

الملخص :

تم في هذا البحث دراسة تحليلية عددية لتبعثر البروتونات بواسطة نظير الروديوم-96 (^{96}Rh) في مجال الطاقات المنخفضة والمتوسطة باستخدام النموذج الضوئي التبددي وذلك بطريقة التقريب التغييري للعزوم (VMA) التي تنطلق من العلاقة التبددية للكمون الضوئي بجزيئه (الحقيقي و التخيلي)، تم إجراء تحليل للبيانات المتعلقة بالتفاعل ($P+^{96}\text{Rh}$) باستخدام برنامجين (Genoa-SPI) و (VMA-SPI) لإجراء الحسابات اللازمة .

وتم الحصول على البارامترات المثالية للكمون الضوئي التبددي للتفاعل ($P, ^{96}\text{Rh}$) و استنتاج العلاقة الشاملة للكمونات ضمن مجال واسع من الطاقة .

بعدئذ قمنا بإيجاد القيم العددية لمقاطع التفاعل الكلية $\sigma_{tot}(E)$ في المجال الطاقى المنخفض والمتوسط وتم إيجاد المقاطع التفاضلية $\sigma(\theta)$ من أجل مجال واسع من الزوايا وذلك عند قيمة طاقة محددة ، و تبين من خلال الإضافة التبددية في الكمون الضوئي و مقارنتها مع مثيلاتها المرجعية (التجريبية) (التصنيفات الوسيطة الشاملة للكمونات) تقاربها بشكل جيد مع وجود مقدار الخطأ المرتكب صغير جداً بمقدار (0.01) وهو أقل بكثير من قيمة الخطأ المرتكب فيما لم يتم أخذ بعين الاعتبار الإضافة التبددية .

أيضاً تم تحديد التكاملات الحجمية بالنسبة للجزء الحقيقي و التخيلي وكموناتها للمنظومة ($P+^{96}\text{Rh}$) و أظهرت توافقاً جيداً مع مثيلاتها التجريبية .

تمَّ تحديد أنصاف الأقطار للمنظومة ($P+^{96}\text{Rh}$) في المجال الطاقوي المنخفض و المتوسط وأظهرت الحسابات بتقاربها مع الدراسة المرجعية الدقة العالية بتحديد البارامترات الهندسة للكمون الضوئي و للطريقة التبددية.

الكلمات المفتاحية:

العلاقة التبددية ، طريقة (VMA) ، المقطع الكلي للتفاعل ، الكمون الضوئي

Studing the effect of dispersion addition in the Optical potential for the (P+⁹⁶Rh) system using (VMA) method

Abstract:

In this research, a numerical analytical study was conducted of the scattering of protons by the isotope rhodium-96 (⁹⁶Rh) in the field of low and medium energies using the dissipative optical model using the variational approximation of moments (VMA) method, which is based on the dissipative relationship of the photocattern with its two parts (real and imaginary) An analysis of the data related to the reaction (P+⁹⁶Rh) was carried out using two programs (SPI-Genoa) and (VMA-SPI) to perform the necessary calculations.

The ideal parameters for the dissipative light potential of the reaction (P,⁹⁶Rh) were obtained and the comprehensive relationship of the potentials within a wide energy range was deduced.

Then we found the numerical values of the total reaction sections $\sigma_{tot}(E)$ in the low and medium energy range, and the differential sections $\sigma(\theta)$ were found for a wide range of angles at a specific energy value, It was shown through the dissipative addition in the optical potential and comparing it with its reference (experimental) counterparts (the comprehensive intermediate classifications of potentials) that it converges well, with the amount of error committed being very small by (0.01), which is much less than the value of the error committed, while the addition was not taken into account Dissipative .

The volumetric integrals were also determined with respect to the real and imaginary parts and their potentials for the system ($P+^{96}\text{Rh}$) and showed good agreement with their experimental counterparts.

The radii of the ($p+^{96}\text{Rh}$) system in low and medium energy ranges were also determined. The calculations highlighted their convergence with high-precision reference studies, underscoring the accuracy of the geometric parameterization of the optical potential and the effectiveness of the dispersive method.

Keywords: Dispersive relation, VMA method, Total reaction cross section, Optical potential.

مقدمة:

تُعتبر الفيزياء النووية فرعاً حيوياً من فروع العلوم الفيزيائية التي تركز على دراسة نوى الذرة، وما تحتويه من مكونات أساسية مثل البروتونات والنيوترونات، بالإضافة إلى التفاعلات النووية التأثيرات المتبادلة التي تحدث بين هذه الجسيمات. منذ اكتشاف النواة في أوائل القرن العشرين، شهدت الفيزياء النووية تطوراً كبيراً، حيث أسهمت في فهم العديد من الظواهر الطبيعية، بالإضافة إلى تطبيقاتها المتعددة وخاصة في المجال الطبي التصوير الإشعاعي.

وفي الفيزياء النووية تعتبر دراسة التأثير المتبادل بين النيكليونات والنواة من الدراسات المهمة، لما تقدمه من معلومات قيّمة ومفيدة عن التفاعلات النووية ولذلك يجب أن نوليها اهتماماً خاصاً، خاصة بعد ظهور النماذج الحديثة والمتطورة كالنموذج الضوئي التبددي (Dispersiv Optical- Model) اختصاراً (DOM) [1].

ومن أجل دراسة البنية النووية للذرات ، فقد وضعت العديد من النماذج التي توصف النواة الذرية كالنموذج الضوئي الذي يعتبر النواة عبارة عن وسط متصل /مصمت/ يبدي

انكساراً وامتصاصاً لأمواج /دي- بروي/ الخاصة بالجسيمات التي تسقط عليها لذلك درست النواة في هذه الحالة كدراسة خواص الضوء من الانعكاس والانكسار والامتصاص وهكذا يفترض بناءً على هذا النموذج أن للجسيم الوارد مساراً حراً وسطياً (Mean) Free path معيناً في النواة بمعنى أنه يوجد احتمال معين للامتصاص أثناء عبوره للنواة ويدرس عبور الجسيم للنواة عن طريق ادخال الانكسار المركب وبشكل أدق الكمون المركب الذي يفهم بالتابع المركب:

$$U = V + iW$$

حيث V : (يمثل الجزء الحقيقي للجهد الذي يصف عملية تبعثر النيكلونات عن النواة).

W : (يمثل الجزء التخيلي للجهد و يصف عملية امتصاص النيكلونات). [2]

في الوقت الحاضر يستخدم النموذج الضوئي والطبقي في دراسة بنية النوى الذرية وفي التفاعلات النووية، وعلى مر السنوات الماضية فقد حقق النموذج الضوئي نجاحاً وخاصة في تقديره لقيم مقاطع التفاعل وتقديره معطيات عن التبعثر (المرن و اللامرن) ولكن على مر العقدين الماضيين كرسست دراسات وأبحاث لإعطاء صياغة صحيحة للحقل الوسطي (الكمون) في المجال الطاقات الموجبة والسالبة ونتج عن ذلك تحديث وتطوير للنموذج الضوئي إلى نموذج آخر دعي بالنموذج الضوئي التبددي [3-4].

عرفت بـ (VMA) أي التقريب التغايري للعزوم التي تعتبر أن مكوني الكمون الضوئي (الحقيقي والتخيلي) ذات ارتباط داخلي من خلال العلاقة التبددية (DR) مما يجعل عدد البارامترات الهندسية لا يتجاوز الاثنين والباقي يتم تثبيته بشكل كامل. [5]

طبقت هذه الطريقة بدايةً لدراسة منظومات النوى السحرية $(P+^{40}\text{Ca})$, $(P+^{208}\text{Pb})$ وقد حققت نجاحاً لافتاً ، لذلك طبقت لدراسة النوى غير السحرية التي تمتاز بنيوكليون ونيوكليونين أعلى من الطبقة السحرية وقد حققت نجاحاً جيداً بتوصيفها لآلية التبعثر المرن وفي مجالات طاقة مختلفة ، لذلك قمنا بهذا البحث معتمدين هذه الطريقة لدراسة

التفاعل ($P+^{96}Rh$) وذلك لمعرفة ماهي الخصائص والنتائج التي يمكن التوصل عليها من خلالها.

هدف البحث: معرفة مقدار التحسين في الكمون الضوئي الناجم عن الإضافة التبددية وتأثيره على مقاطع التبعثر (الكلية والتفاضلية) للتفاعل ($P, ^{96}Rh$). في إطار النموذج الضوئي التبددي طريقة (VMA)، و وضع قائمة بالبيانات الجديدة لمقاطع التفاعل الكلية والتفاضلية المبنية على البارامترات الهندسية المستخدمة للكمون الضوئي التبددي.

منهجية ومحتوى طريقة VMA: [5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16]

يعطى الكمون الضوئي الذي ينتج عن التأثير المتبادل (نكليون - نواة) بالعلاقة التالية :

$$U(r,E)=V(r,E)+iW(r,E)+V_{LS}(r,E)+V_c(r) \quad (1)$$

حيث أن الحد الأول من العلاقة (1) هو الجزء الحقيقي للكمون الضوئي $V(r,E)$ و يتكون من مجموع مركبتين:

المركبة الأولى : كمون هارتي فوك V_{HF} .

المركبة الثانية : المساهمة التبددية (تتألف من مجموع حدين تبددي سطحي $\Delta V_d(r,E)$ و تبددي حجمي $\Delta V_w(r,E)$.

و الحد الثاني هو الجزء التخيلي للكمون الضوئي $W(r,E)$ يتكون من مركبتين (تخيلية سطحية $W_d(r,E)$ وتخيلية حجمية $W_w(r,E)$

والحد الثالث هو الكمون السبيني المداري $V_{LS}(r,E)$ (ينتج عن التأثير المتبادل بين العزم السبيني والعزم المداري)

والحد الرابع هو الكمون الكولوني $V_c(r)$ ويعبر عنه بدلالة نصف القطر المتبادل $R_c = r_c A^{1/3}$.

تبعاً لما سبق تكتب العلاقة بالصيغة التفصيلية الآتية:

$$U = (r, E) = V_{HF}(r, E) + \Delta V_d(r, E) + \Delta V_w(r, E) + i(W_d(r, E) + W_w(r, E)) + V_{LS}(r, E) + V_c(r) \quad (2)$$

يقترح استخدام شكل كمون وودا ساكسون (Woods-Saxon form) لوصف التابعية القطرية لكل من الحدود الواردة في العلاقة (2) والذي يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$V(r, E) = V_j(E) \cdot f(r, R_j, a_j) \quad (3)$$

حيث أن :

$$f(r, R_j, a_j) = \frac{1}{1 + e^{\left(\frac{r - R_j}{a_j}\right)}} \quad , \quad R_j = r_j A_j^{1/3}$$

نعتبر قيم الوسطاء الخاصة بالكمون $V_{LS}(r, E)$ و الكمون الكولوني غير تابعة للطاقة لذلك تؤخذ كقيم ثابتة .

$$V_{LS} = 6.8 \text{ Mev} \quad r_{LS} = 1.2 \text{ Fm} \quad a_{LS} = 0.6 \text{ Fm} \quad r_c = 1.22 \text{ Fm}$$

محتوى طريقة ال VMA:

الهدف الأساسي تحديد مكونات الحقل النووي الوسطي في العلاقة (1) من أجل التفاعل المدروس كما يلي:

بدايةً نحدد القيمة العددية للمكون التبددي للجهد (السطحي والحجمي) برمجياً من خلال العلاقاتين :

$$\Delta V_w(r, E) = \frac{2}{\pi} (E - E_F) \int_{E_F}^{\infty} \frac{W_w(r, E) dE}{(E - E_F)^2 - (E - E_F)} \quad (4)$$

$$\Delta V_d(r, E) = \frac{2}{\pi} (E - E_F) \int_{E_F}^{\infty} \frac{W_d(r, E) dE}{(E - E_F)^2 - (E - E_F)} \quad (5)$$

ثم نحدد الكمون التخليبي الحجمي (W_w) والسطحي (W_d) من خلال العلاقة التبددية للجزوم :

$$[r^2]_w(E) = [r^2]_{ww}(E) + [r^2]_{wd}(E) = \frac{4\pi}{A} \int_0^\infty [W_d(r, E) + W_w(r, E)] r^2 dr \quad (6)$$

حيث $[r]^2(E)$ يمثل التكامل الحجمي للكمون الضوئي (العزوم من المرتبة الثانية) بالنسبة للجزء التخيلي (السطحي والحجمي) و يحددان تحليلياً وفق علاقة (براون-راو):

$$[r^2]_{wwd}(E) = \beta_2 \left[\frac{(E-E_0)^2}{(E-E_0)^2 + \rho_2} - \frac{(E-E_0)^2}{(E-E_0)^2 + \rho_w} \right] \quad (7)$$

حيث: ρ_w, ρ_2, β_2 تمثل وسطاء براون راو (Brown-Rho)

و E طاقة القذيفة ، E_0 بارامتر يتعلق بخصائص المستويات الفرعية للتفاعل (P+A)

و يعطى بالعلاقة $E_0 = \frac{E_F}{2}$ حيث E_F طاقة سوية فيرمي بوحدة Mev

$$E_F = 3.95 \quad E_0 = 1.97 \quad \text{حيث أن :}$$

وبعد نقوم بحساب عزم هاتري فوك من خلال العلاقة التالية:

$$J_{HF} = \frac{4\pi}{3} \frac{R_{HF}^3}{A} \left[1 + \left(\frac{\pi a_{HF}}{R_{HF}} \right)^2 \right] \cdot U_{HF}(E) = g_{HF} \cdot V_{HF}(E)$$

$$U_{HF}(E) = V_0 - \left(\frac{N-Z}{A} \right) \cdot V_1 = 54,4 - \left(\frac{51-45}{96} \right) \cdot 42,8 = 56.6625$$

$$R_{HF} = r_{HF} A^{1/3} = 5.6594$$

$$V_0 = 54.4$$

$$V_1 =$$

$$42.8 \quad \text{العمل وفق [17]}$$

$$a_{HF} = 0.62$$

$$r_{HF} = 1.236$$

ونوجد الوسطاء (r_w, r_d, a_w, a_d) نثبتها كقيم وسطية للبارامترات العشوائية للكمون

الضوئي العادي بعد الانتهاء من تحديد مكونات العلاقة (2) يصبح الحقل بصيغته

النهائية بالشكل:

$$U(r, E) = \frac{[r^2]_{HF}(E_F)}{g_{HF}} \exp[\alpha_{HF}(E - E_F)] f(x_{HF}) + \Delta V_w(E) f(x_w) + \Delta V_d(E) g(x_d) + iW_w f(x_w) + iW_d g(x_d) + V_{ls}(r, E) + V_c(r) \quad (8)$$

وأخيراً وبعد تحديد جميع مكونات الكمون الضوئي وتحديد وسطائه، يتم حل معادلة شرودينغر الموجية المتضمنة لشكل الكمون وهي:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} (E - U)\psi = 0$$

و باستخدام SPI يتم إيجاد مقاطع التفاعل ضمن المجال الطاقى المدروس و مقارنتها مع مثيلاتها التجريبية و مع التمثيلات العالمية و الوسطية [19-18]

خطوات العمل:

1- أجريت في البداية تحليلات للبيانات المرجعية المتعلقة بالمنظومة ($P + {}^{96}Rh$) ضمن المجال الطاقى المدروس (الطاقات المنخفضة والمتوسطة)، وتم الحصول على بارامترات أولية للكمون الضوئي و معلومات للعزوم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء الحقيقي و التخيلي (السطحي والحجمي) للكمون.

2- شكلت وكخطوة أولية البيانات المتعلقة بالعزوم من المرتبة الثانية (التكاملات الحجمية) بالنسبة للجزء الحقيقي للكمون J_R والتخيلي J_W (الحجمي J_{Ww} والسطحي J_{Wd}) مجموعة تناسقية يمكن البناء عليها و قبلت بيانياً ضمن المجال الطاقى المدروس وبطريقة المحاكاة تم تحديد قيم الوسطاء الهندسية E_0 ، E_F ، ρ_w ، ρ_2 ، β_2 و قيمها تساوي :

$$E_F = 3.95 \text{ MeV}$$

$$E_0 = 1.97 \text{ MeV}$$

$$\beta_2 = 94 \text{ MeV Fm}^3$$

$$\rho_2 = 52 \text{ MeV}$$

$$\rho_w = 3 \text{ MeV}$$

باستخدام العلاقات:

$$J_W(E) = \beta_2 \frac{(E - E_0)^2}{(E - E_0)^2 + \rho_2^2}$$

$$J_{Ww}(E) = \beta_2 \frac{(E - E_0)^2}{(E - E_0)^2 + \rho_w^2}$$

$$J_{wd}(E) = \beta_2 \left[\frac{(E - E_0)^2}{(E - E_0)^2 + \rho_2^2} - \frac{(E - E_0)^2}{(E - E_0)^2 + \rho_w^2} \right]$$

3- وفقاً لمنهجية طريقة (VMA) ، أخذت قيم البارامترات الهندسية (الأولية) للكمونات الضوئية (الحقيقية والتخيلية) (الحجمية والسطحية)) كقيم وسطية منها:

$$\bar{r}_V, \bar{a}_V \quad \bar{r}_w = \bar{r}_d \quad \bar{a}_w = \bar{a}_d$$

أما وسطاء كمون هاتري (r_{HF}, a_{HF}) فتم إيجادها من المرجع [] وقيمها

$r_{HF} = 1.263 \text{ Fm}$ و $a_{HF} = 0.62 \text{ Fm}$ وقيمة عزم هاتري-فوك الموافقة وفق

العلاقة ($J_{HF}(E_F) = \frac{4\pi}{3} \frac{R_{HF}^3}{A} \left[1 + \left(\frac{\pi a_{HF}}{R_{HF}} \right)^2 \right] U_{HF}(E_F)$) تساوي :

$$J_{HF}(E_F) = J_{HF} = 501.235 \text{ MeV Fm}^3$$

4- تم ادخال تلك المعطيات:

$\beta_2, \rho_2, \rho_w, E_F, E_0, V_{ls}, r_{ls}, a_{ls}, J_{HF}, \bar{r}_w = \bar{r}_d; \bar{a}_w = \bar{a}_d$ إلى ملف

الدخل في البرنامج (VMA-SPI GENOA) وبمجال طاقي واسع ضمن المدروس

وخارجة وبخطوة طاقة $\Delta E = 5 \text{ MeV}$.

5- تم ربط البيانات من ملف الخرج (VMA-SPI) مع ملف الدخل (SPI) ليتم تصديرها إلى (SPI)، والحصول على البيانات المتعلقة بمقاطع التفاعل (الكليّة والتفاضلية) والعزوم من المرتبة الثانية بالنسبة لجزأي الكمون (الحقيقي والتخيلي) (الحجمي والسطحي).

النتائج والمناقشة:

استناداً إلى ما تم إجراؤه من الخطوات أعلاه فقد تمّ التوصل إلى ما يلي :

1 - التعيين المثالي للبارامترات الهندسية (وسطاء) للكمون الضوئي التبددي للمنظومة ($P, {}^{96}Rh$) في المجال الطاقي المختار بخطوة طاقة ($\Delta E = 5MeV$).

وتمّ ادراجها ضمن الجدول (1):

جدول (1): الوسطاء الهندسية للكمون الضوئي التبددي للمنظومة ($P, {}^{96}Rh$)

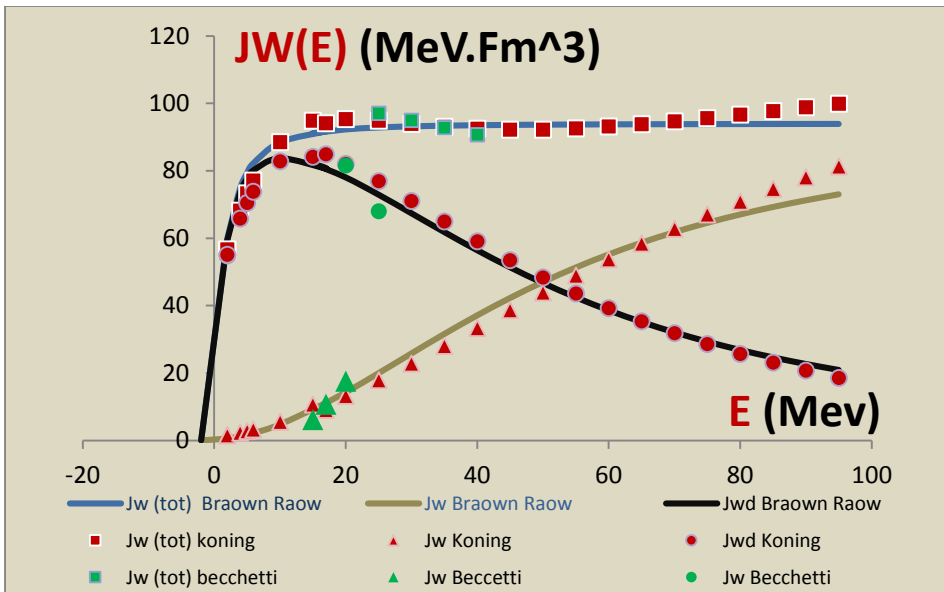
E (Mev)	V_v (Mev)	r_v (Fm)	a_v (Fm)	W_w (Mev)	r_w (Fm)	a_w (Fm)	W_d (Mev)	r_d (Fm)	a_d (Fm)
1.97	55.111	1.289	0.596	0.056	1.2	0.5	5.458	1.2	0.5
2	55.103	1.289	0.596	0.056	1.2	0.5	5.488	1.2	0.5
3.95	54.617	1.279	0.596	0.125	1.2	0.5	6.812	1.2	0.5
5	54.358	1.273	0.596	0.172	1.2	0.5	7.188	1.2	0.5
5.92	54.132	1.269	0.596	0.219	1.2	0.5	7.406	1.2	0.5
10	53.134	1.254	0.596	0.490	1.2	0.5	7.749	1.2	0.5
15	51.894	1.24	0.596	0.938	1.2	0.5	7.600	1.2	0.5
17	51.387	1.236	0.596	1.144	1.2	0.5	7.467	1.2	0.5
20	50.611	1.23	0.596	1.476	1.2	0.5	7.224	1.2	0.5
25	49.273	1.222	0.596	2.065	1.2	0.5	6.751	1.2	0.5
30	47.884	1.216	0.596	2.672	1.2	0.5	6.239	1.2	0.5
35	46.452	1.211	0.596	3.271	1.2	0.5	5.723	1.2	0.5

دراسة أثر الإضافة التبديدية في الكمون الضوئي للمنظومة ($P+^{96}\text{Rh}$) باستخدام طريقة VMA

40	44.994	1.207	0.596	3.843	1.2	0.5	5.225	1.2	0.5
45	43.523	1.203	0.596	4.377	1.2	0.5	4.756	1.2	0.5
50	42.052	1.20	0.596	4.868	1.2	0.5	4.324	1.2	0.5
55	40.595	1.198	0.596	5.314	1.2	0.5	3.931	1.2	0.5
60	39.16	1.197	0.596	5.717	1.2	0.5	3.575	1.2	0.5
65	37.755	1.195	0.596	6.078	1.2	0.5	3.255	1.2	0.5
70	36.384	1.194	0.596	6.401	1.2	0.5	2.969	1.2	0.5
75	35.052	1.193	0.596	6.689	1.2	0.5	2.714	1.2	0.5
80	33.761	1.192	0.596	6.947	1.2	0.5	2.485	1.2	0.5
85	32.511	1.191	0.589	7.177	1.2	0.5	2.281	1.2	0.5
90	31.305	1.19	0.589	7.382	1.2	0.5	2.099	1.2	0.5
95	30.141	1.189	0.596	7.566	1.2	0.5	1.935	1.2	0.5
$V_{so} = 6.8 \text{ (Mev)}$ $r_{so}=1.2 \text{ (Fm)}$ $a_{so}=0.6 \text{ (Fm)}$ $r_c=0.6$ (Mev)									

كما هو ملاحظ من الجدول أعلاه أن مع ازدياد الطاقة فإن الجزء الحقيقي للكمون يتناقص وأيضاً يتناقص نصف القطر، يعزى ذلك إلى اقتراب الجسيمات المقذوفة (البروتونات) من الهدف و تبادلها التأثير مع عدد محدود من الجسيمات داخل النواة ، وأيضاً نلاحظ من الجدول أعلاه: أن مع ازدياد الطاقة فإن الكمون التخيلي الحجمي و نصف قطره يزداد مع ازدياد الطاقة بينما نجد أن التخيلي السطحي يزداد إلى أن يصل إلى قيمة عظمى ثم ينهار مع ازدياد الطاقة يعزى ذلك إلى المنافسة بين التأثيرات السطحية والحجمية .

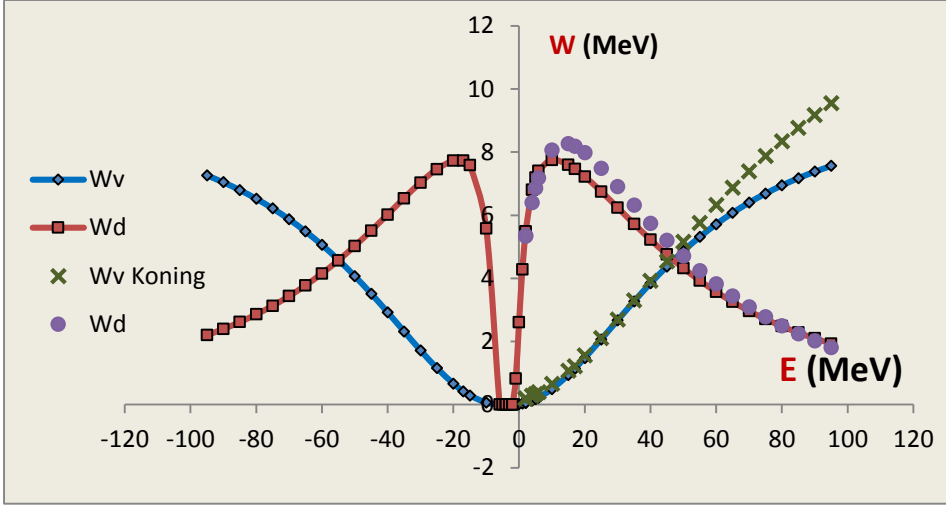
2- تقييم وتعيين العزوم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخيلي للكمون J_{ww} (الحجمي J_w و السطحي J_d) باستخدام علاقة براون - راو (Brown-Row) وتم تمثيلها بيانياً بالشكل (1):



الشكل (1): التابعة الطاقةية للتكاملات الكلية التخيلية J_{w_w} (الحجمية J_w والسطحية J_d) للمنظومة $(P, {}^{96}Rh)$ وفي المجال الطاقى المدروس و مقارنتها مع مثيلاتها المرجعية [20-21].

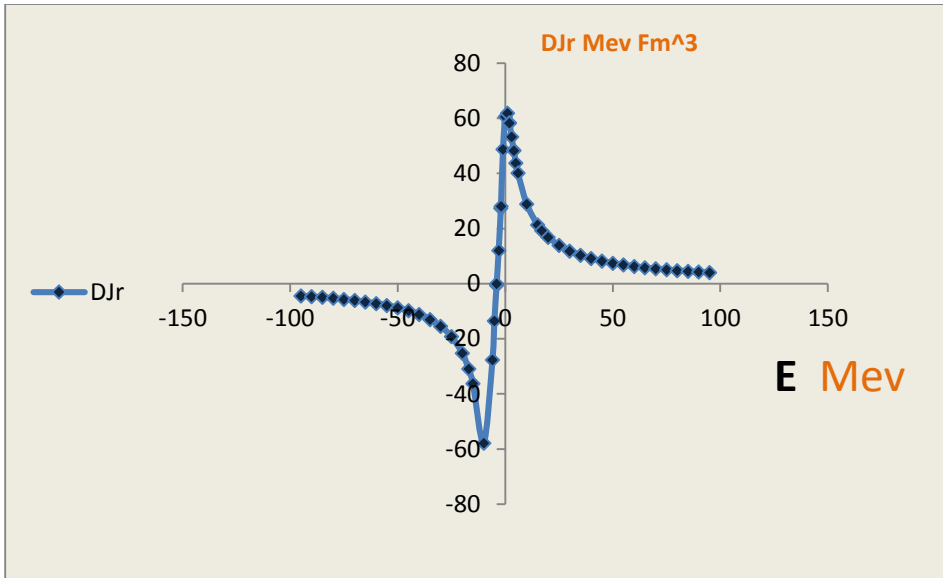
كما هو مبين من الشكل (1) التوافق والتطابق الجيد بين التكاملات الكلية التخيلية (الحجمية والسطحية) المحسوبة وفق (SPI) ومثيلاتها المرجعية [20-21].

3- باستخدام الوسطاء الهندسية في الجدول (1) وبمساعدة البرنامج SPI فقد تم تعيين قيم التأثيرات المتبادلة (الكومات التخيلية (الحجمية W_w والسطحية W_d) للمنظومة $(P, {}^{96}Rh)$ وفي المجال الطاقى المنخفض والمتوسط المدروس وتم تمثيلها بيانيا من الشكل (2) .



الشكل (2): الدالة الطاقية لسلوك الكمونات التخيلية (الحجمية والسطحية) للمنظومة ($P, {}^{96}\text{Rh}$) ضمن المجال الطاقى المدروس ومقارنتها مع المرجعية [20].

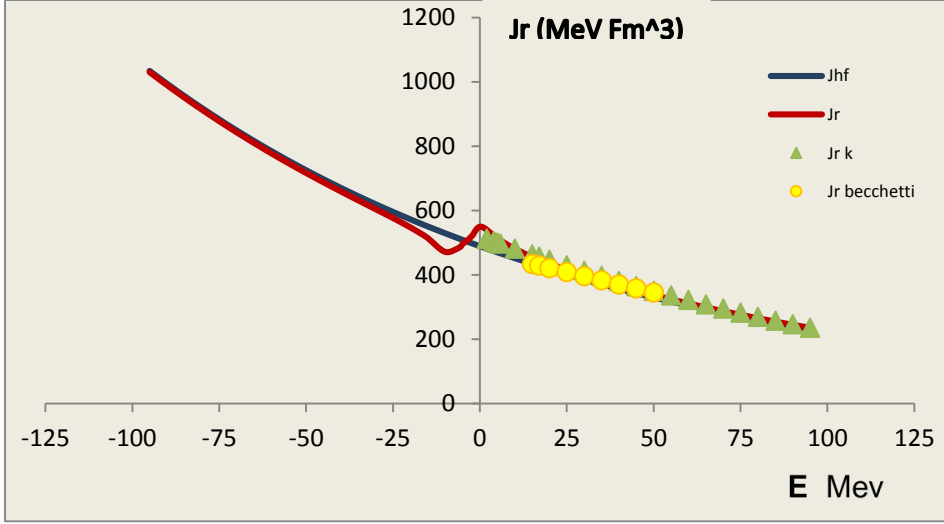
نلاحظ من الشكل (2): الانحراف في السلوك للكمونات بتابعيتها للطاقة خاصة بالقرب من عتبة التفاعل في المجال الطاقى المنخفض و يعزى ذلك إلى المشاركة الفعالة لجميع قنوات التفاعل (وخاصة الامتصاص) في التفاعل بالقرب من طاقة الحاجز الكولوني [3] 4- تحديد المشاركة التبددية عبر التفاعل الحجمي للكمون التبددي ΔJ_r بمساعدة البرنامج (VMA-SPI) المدمج مع (SPI)، فقد تمّ تعيين (حسابياً) قيم التكاملات الحجمية التبددية للمنظومة ($P, {}^{96}\text{Rh}$) وضمن المجال الطاقى المحدد.



الشكل (3) : الدالة الطاقية لسلوك التكاملات الحجمية للمنظومة ($P, {}^{96}Rh$) وضمن المجال الطاقى المدروس.

ويظهر من الشكل (3) سلوكاً متماثلاً في مجال الطاقات الموجبة والسالبة القريب من الحاجز الكولوني للأسباب المذكورة أعلاه.

5- الدالة الطاقية لسلوك التكاملات الحجمية J_r (الحقيقية) وهاتري فوك J_{HF} للمنظومة المدروسة ضمن المجال الطاقى المدروس . ثم باستخدام الجدول (1) (الوسطاء الهندسية للكمون الضوئي التبددي) وبمساعدة البرنامج (VMA-SPI) تم إيجاد القيم العددية للتكاملات الحجمية للكمون الحقيقي ولهاتري-فوك للمنظومة ($P, {}^{96}Rh$) وفي المجال الطاقى المختار وأيضاً في المجال السالب (الحالات المترابطة) وتمّ تمثيلها بيانياً في الشكل (4).



الشكل (4): الدالة الطاقية للتكاملات الحجمية بالنسبة للكمون الحقيقي وأيضاً بالنسبة لكمون (هاتري-فوك) للمنظومة المدروسة ($P + ^{96}Rh$) في المجال الطاقى $(-80 \leq E_p \leq +80)$ وتمّ مقارنتها مع مثيلاتها المرجعية [20-21].

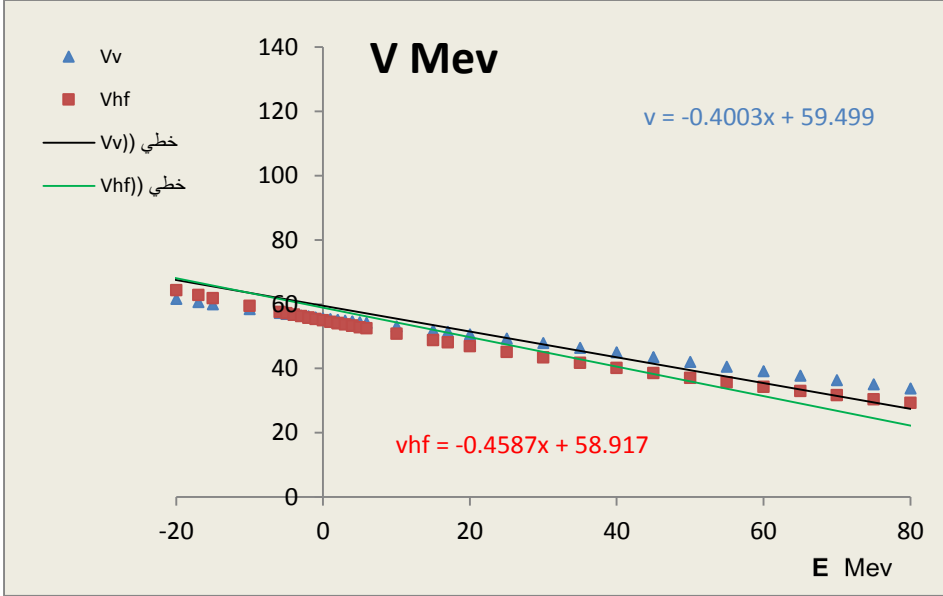
نلاحظ من الشكل التوافق الجيد لـ (J_r) المحسوب وفق (VMA) ومع مثيلاتها المرجعية وكما نلاحظ كما هو مبين من الشكل نلاحظ من المنحني الأول سلوكاً متميزاً بالقرب من الحاجز الكولوني حيث تبدي التابعية $J_r(E)$ تغيراً ملحوظاً بسلوكه حيث يأخذ قيمة عظمى بالقرب من طاقة الحاجز الكولوني يدعى هذا التغير بالانحراف العتيبي (الشذوذ) نتيجة كما ذكرنا لمشاركة عدد كبير من القنوات في التفاعل (التفاعل المرن والتفاعل اللامرن والامتصاص) ، بعدها يتناقص مع ازدياد الطاقة لكونه يقتصر على قناة أو قناتين للتفاعل المرن واللامرن .

أما في الطاقة السالبة فتظهر لنا السويات الطاقية (سوية فيرمي E_F والسويات الأعلى منها E_F^+ والسويات الأخفض منها E_F^-) وانشغالها بالنيوكليونات (البروتونات)، وهذه السويات حددت بعلاقة رياضية محددة وقيمها وجد بأنها تتوافق مع مثيلاتها المرجعية، فمن أجل طاقة فيرمي يلاحظ تقاطع وتلاقي (1) مع (2) ويشير بذلك إلى عدم حدوث

أية عملية من عمليات التفاعل ، أما من أجل الطاقة E_0^+ المقابلة للسويات الأعلى من سوية فيرمي الفارغة أو المشغولة جزئياً فيلاحظ بوجود قيم للعزوم ويعزى ذلك لوجود عمليات امتصاص وتفاعلات وأيضاً يحدث من أجل E_0^- (المقابلة للسويات الأحفض من سوية فيرمي (الممتلئة) نلاحظ بوجود أيضاً قيم للعزوم ويعزى ذلك لنفس السبب أعلاه (طبعاً هنا تمثل حالة وصفية للنموذج الطبقي والمتحيز لكمون حقيقي فقط، وهنا يظهر الدور الذي يلعبه النموذج الضوئي حيث يظهر البيانات الخاصة بالطاقات الموجبة والسالبة ويربط بينها من خلال كمون (لكمون من حدين حقيقي وتخليي) .

6- الدالة الطاقية لسلوك الكمون الضوئي (الحقيقي V_V وهاتري-فوك) للمنظومة ضمن المجال المدروس (المخفوض والمتوسط) وخارجه .

بالاستفادة والاستعانة بالجدول (1) وتحديداً قيم للكمونات (الحقيقي والتخليي) بدلالة الطاقة الناتجة من ملفي الخرج للكودين (VMA-SPI) و (SPI-Genoa) فقد تم تمثيلها بيانياً كما هو في الكل (6):



الشكل (6) : الدالة الطاقية للكمون البروتوني الضوئي V_V وهاتري-فوك V_{HF} للمنظومة المدروسة ($P, ^{96}Rh$) وضمن المجال الطاقى المدروس نلاحظ من الشكل لتباعد بين الكمونين ويعود ذلك إلى الإضافة التبددية في الكمون الحقيقي والنقائهما عند طاقة فيرمي والسبب يعود إلى ما تم ذكره أعلاه ويلاحظ أيضاً التوافق الجيد لقيم تلك المنحنيات المحسوبة وفق برنامج (VMA-SPI) مع مثيلاتها المرجعية وانحرافها (ابتعادها) قليلاً في بعض القيم الطاقية ويعود ذلك إلى الطريقة المتبعة في بعض المراجع وحساسية بارامتراتها لذلك .

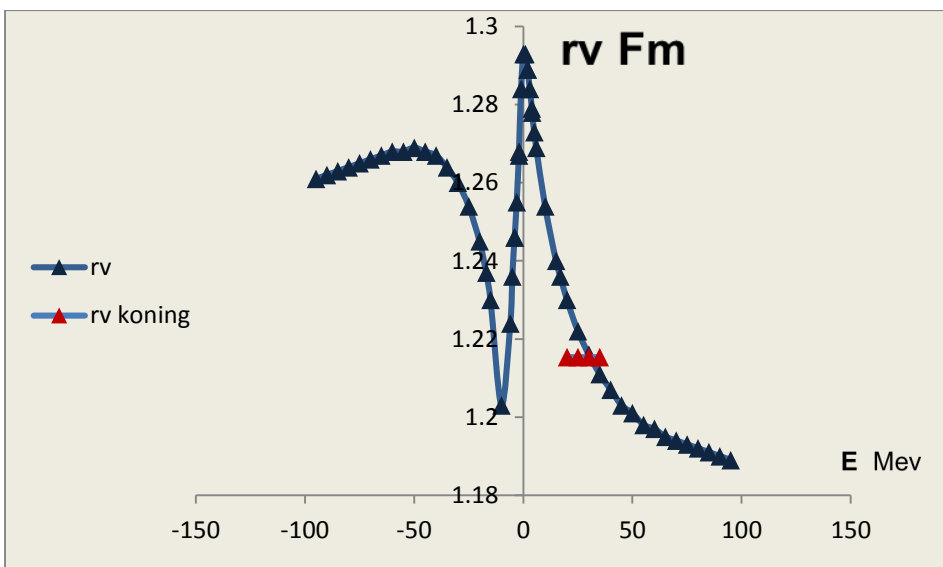
أيضاً يلاحظ من الشكل (6) السلوك الخطي للكمونين - الكمون التبددي الخطي وكمون هاتري-فوك و التعبير عنهما بعلاقيتين رياضيتين كما في الصيغة التالية:

$$V_V = -0.4003E + 59.499 \quad (1)$$

$$V_{HF} = -0.4587E + 58.917 \quad (2)$$

يمكن من خلال هاتين العلاقتين تحديد وتوصيف شكل الكمونات من أجل كل خطوة طاقة ضمن المجال الطاقى المدروس وخارجه.

7- الدالة الطاقية لنصف قطر الكمون البروتوني الضوئي للمنظومة المدروسة ($P, {}^{96}\text{Rh}$) وضمن المجال الطاقى المحدد ومثيلاتها المرجعية [20].
تمّ وبالاتماد على طريقة (VMA) ومن النتائج الواردة في الجدول (1) تمثيل القيم العددية لأنصاف أقطار الكمون البروتوني الضوئي المحسوبة باستخدام الكودين (VMA-SPI)، (SPI) للمنظومة المدروسة بيانياً في الشكل (7) المبين :



الشكل (8): الدالة الطاقية لنصف قطر الكمون البروتوني الضوئي للمنظومة المدروسة ($P, {}^{96}\text{Rh}$) وضمن المجال الطاقى المدروس وخارجه ومثيلاتها المرجعية [20] ،
بالإضافة إلى مثيلاتها من نتائج التحليل المراجع [20].

وكما هو مبين من المنحني البياني السلوك المرافق والمماثل للكمون، حيث يظهر لدينا في مجال الطاقات المنخفضة تزايداً مع ازدياد الطاقة إلى الوصول قيمة عظمى المقابلة لطاقة الحاجز الكولوني وانخفاضاً بعدها بازدياد الطاقة ، ويعزى ذلك إلى أن بالقرب من الحاجز الكولوني يطرأ تغيراً ملحوظاً بسلوكه ما يعرف بظاهرة شذوذ العتبة . كما أشرنا إليه

أعلاه نتيجة للمشاركة الفعالة لجميع قنوات التفاعل (التفاعل المرن و اللامرن والامتصاص) بعدها تقتصر المشاركة إلى قناة أو قناتين على الأكثر ، وهذا الظهور لظاهرة الشذوذ نتيجة الإضافة التبددية في الكمون الضوئي .

أيضاً من الشكل يلاحظ التوافق الجيد مع بعض قيم المرجع [20] من أجل نفس قيم الطاقة واختلافها عن القيم والسبب لأن المرجع [20] اعتبر أن أنصاف الأقطار غير تابعة للطاقة ، أيضاً يلاحظ التوافق الجيد مع نتائج التي قمنا من تحليل البيانات الخاصة بأنصاف الأقطار المراجع [20].

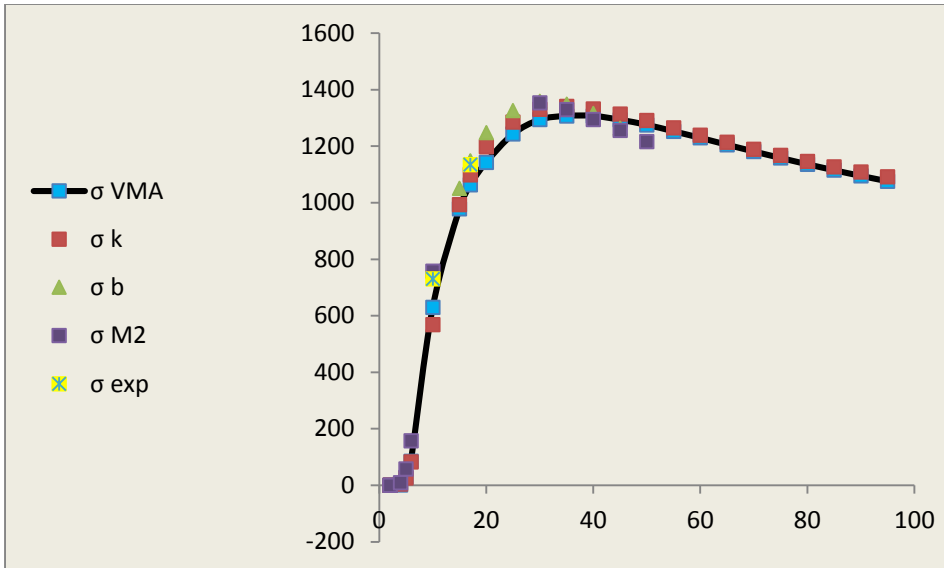
أيضاً يلاحظ السلوك المماثل والمناظر للمنحني البياني في مجال الطاقات السالبة ولكن بشكل مقلوب وهو يعكس عمق الحفرة الكمونية في تلك المنطقة حتى يصل إلى أخفض قيمة مقابلة لقيمة طاقة فيرمي و من ثم يزداد بازدياد الطاقة ويعزى إلى الظهور النشاط لقنوات الامتصاص في تلك المناطق الطاقية.

8- الدالة الطاقية لسلوك مقاطع التفاعل للمنظومة ($P, ^{96}Rh$) في المجال الطاقى المعين وخارجة و مثيلاتها المرجعية [20-21-22] ومن نتائج تحليل مقاطع التفاعل المرجعية والمعالجة بالبرنامج SPI

باستخدام الجدول (1) والمعالجة البرمجية باستخدام الكودين (VMA-SPI) و (SPI) عبر ملفات الدخول والخرج . فقد تم التوصل إلى القيم العددية لمقاطع التفاعل بعد حل معادلة شرودنغر الموجية ضمن الكود SPI وتم وضعها في الجدول (2):

جدول (2) يُبين مقارنة بين قيم مقاطع التفاعل ($P + {}^{96}_{45}Rh_{51}$)						
E (MeV)	σ Koning (mb)	σ Becchitte (mb)	σ Menet el al (mb)	σ exp (mb)	σ spi (mb)	σ VMA (mb)
1.97	0.001013	-	0.0019638	-	-	0.001263
2	0.001245	-	0.0014787	-	-	0.001548
3.95	4.07021	-	9.24712	-	-	0.64859
5	26.6314	-	57.6771	-	-	28.6992
5.92	83.8478	-	156.851	-	-	84.7009
10	649.068	-	769.083	730	713.603	629.296
15	1008.66	1050.6	1153.11	-	-	978.558
17	1098.59	1147.89	1242.59	1135	1170.67	1063.43
20	1188.81	1247.36	1310.83	-	-	1142.95
25	1281.34	1325.62	1349.13	-	-	1243.05
30	1328.45	1358.94	1352.29	-	1323.44	1293.83
35	1336.02	1348.92	1328.01	-	-	1307.04
40	1329.86	1315.58	1293.22	-	-	1307.26
45	1311.87	1264.18	1254.85	-	-	1293.43
50	1288.2	1198.89	1216.11	-	1284.08	1275.47
55	1263.37	-	1179.17	-	-	1252.66
60	1238.3	-	1145.06	-	1230.46	1229.36
65	1213.39	-	1114.46	-	-	1204.99
70	1189.54	-	1087.08	-	1187.66	1181.28
75	1167.03	-	1064.89	-	-	1158.23
80	1146.01	-	1045.46	-	1148.72	1136.02
85	1126.58	-	1031.78	-	-	1114.85
90	1108.6	-	1021.65	-	-	1094.79
95	1092.01	-	1015.95	-	-	1075.76

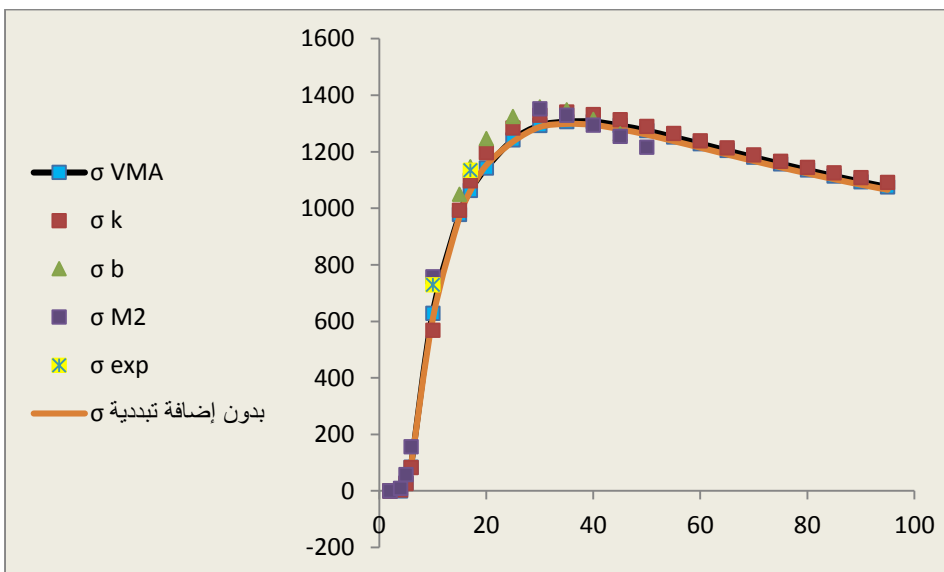
وتمثيلها بيانياً في الشكل (8) :



الشكل (8): الدالة الطاقية لمقاطع التفاعل ($P + ^{96}Rh$) في المجال الطاقى المحدد وخارجة وقيم مثيلاتها المرجعية [20-21-22] ومن تحليلاتنا يظهر الشكل (8) سلوكاً مميزاً لمقاطع تفاعل البروتونات المقذوفة بطاقات منخفضة ومتوسطة بواسطة نواة الهدف (^{96}Rh)، حيث وكما نلاحظ من الشكل أن مع ازدياد الطاقة (طاقة المقذوف) ، أي مع تسريعه عبر مسرعات خاصة إلى طاقات محددة فإن مقاطع التفاعل ستزداد كما هو واضح إلى الوصول إلى قيمة معينة مقابلة لطاقة محدودة، ثم يحافظ على قيمة ثابتة مع ازدياد الطاقة . ويعزى ذلك للمشاركة الفعالة لمراكز التبعثر التي تعترض مسار الحزمة المسرعة من البروتونات. فكلما ازدادت طاقة التسريع كلما اقترب أكثر من نواة الهدف وانخفض أيضاً نصف قطر التأثير المتبادل وهذا واضح من الشكل (7).

نلاحظ التوافق الجيد والمثالي مع مثيلاتها المرجعية [20-21-22] ضمن مجالات طاقة معينة ومع تحليلاتنا المنهجية لقيمتها من المراجع [22] ، ويلاحظ ابتعادها عن بعض المراجع والسبب يعود لكون بعض المراجع اعتمدت طريقة مغايرة جداً عن طريق (VMA) من حيث إيجادها للبارامترات الهندسية للكمون الضوئي.

إن هذا التوافق الجيد لقيم مقاطع التفاعل بدلالة الطاقة وفق الطريقة المتبعة (VMA) مع البيانات سواء التجريبية أو التمثيلات الوسيطة لبارامترات الكمون الضوئي يعكس بالدرجة الأولى الدقة في تحديد البارامترات الهندسية للكمون الضوئي والذي أدى بدوره إلى خلق كل آخر (استنباط) للكمون منسجم إلى حد كبير جداً مع كينونته لخط الاقتراب الفعلي للبروتونات المقذوفة من نواة الهدف (وهذا كما قلنا سابقاً عائداً إلى أثر الإضافة التبددية المنطوية ضمن جوهر طريقة (VMA) ولدى غيابها (غياب الإضافة التبددية) رأينا ابتعاداً كبيراً عن القيم العددية لمقاطع التفاعل المحسوبة باستخدام (VMA-SPI) و تراجعاً حاداً لسلوكها عن مثيلاتها المرجعية والشكل (9) يبين ذلك والجدول (3) أيضاً يوضح ذلك



الشكل (9) الدالة الطاقية لمقاطع التفاعل ($P + {}^{96}\text{Rh}$) في مجال الطاقات المنخفضة والمتوسطة مع مثيلاتها المرجعية [20-21-22] وبدون إضافة تبددية

الجدول (3):

جدول (3) يبين مقدار ونسبة تأثير الإضافة التبددية على مقطع العرضي ل $^{96}\text{Rh}_{51}$				
E (MeV)	المقطع مع إضافة تبددية	المقطع بدون إضافة تبددية	قيمة الإضافة	نسبة الإضافة %
1.97	0.001263	0.003567	-0.0023	-182.463
2	0.001548	0.00167362	-0.00013	-8.08427
3.95	0.64859	5.28691	-4.63832	-715.139
5	28.6992	31.3628	-2.6636	-9.28109
5.92	84.7009	87.1619	-2.461	-2.90552
10	629.296	607.843	21.453	3.409048
15	978.558	969.999	8.559	0.874654
17	1063.43	1060.47	2.96	0.278345
20	1142.95	1151.95	-9	-0.78744
25	1243.05	1235.49	7.56	0.608181
30	1293.83	1287.38	6.45	0.49852
35	1307.04	1298.39	8.65	0.661801
40	1307.26	1294.99	12.27	0.938604
45	1293.43	1279.82	13.61	1.052241
50	1275.47	1260.64	14.83	1.162709
55	1252.66	1237.71	14.95	1.19346
60	1229.36	1214.47	14.89	1.211199
65	1204.99	1190.45	14.54	1.206649
70	1181.28	1167.25	14.03	1.187695
75	1158.23	1144.84	13.39	1.156074
80	1136.02	1123.34	12.68	1.116178
85	1114.85	1102.89	11.96	1.07279
90	1094.79	1083.53	11.26	1.028508
95	1075.76	1065.19	10.57	0.982561

الاستنتاجات والتوصيات:

- (1)- من تحليل البيانات المتعلقة بمقاطع التفاعل التجريبية والنظرية للمنظومة ($P + ^{96}\text{Rh}$) في المجال الطاقي المدروس باستخدام الكود (SPI)، تمّ التوصل إلى

مجموعة من البارامترات الهندسية للكمون الضوئي ، الذي تمّ اعتبارها كنقريب أولي للبارامترات الهندسية التي نسعى لإيجادها.

(2)- وجدنا ووفقاً لتقنية طريقة (VMA) النموذج الضوئي التبددي المبنية على العلاقة التبددية وبعد حلها التحليلي والعدي من خلال علاقة (براون - براو) فقد تمّ إيجاد الوسطاء الهندسية ل (VMA) وهي:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 94 \text{ MeV Fm}^3 & \rho_2 &= 52 \text{ MeV} & \rho_w &= 3 \text{ MeV} \\ E_F &= 3.95 \text{ MeV} & E_0 &= 1.97 \text{ MeV} & J_{HF} &= 501.235 \text{ MeV Fm}^3 \end{aligned}$$

(3)- تمّ وباستخدام طريقة (VMA) والبرنامج (SPI-VMA) معالجة البيانات الناتجة والتوصل إلى القيمة العددية للعزوم من المرتبة الثانية (التكاملات الحجمية) بالنسبة للجزء الحقيقي والتخيلي للكمون الضوئي ومنها على سبيل المثال:

$$\begin{aligned} J_r(E_k) &= 337.56 \text{ MeV Fm}^3 \\ J_{ww} &= 46.973 \text{ MeV Fm}^3 \\ J_{wa} &= 46.715 \text{ MeV Fm}^3 \end{aligned}$$

حيث أظهرت قيمها العددية توافقاً جيداً مع مثيلاتها المرجعية وسلوكاً مميزاً بالنسبة للطاقة وخاصة في المجال الطاقى المنخفض ، إذ يبدي المنحني الخاص بتابعية العزوم للطاقة شذوذاً في سلوكه بالقرب من عتبة التفاعل، نتيجة للمشاركة الفعّالة لجميع قنوات التفاعل (مثل التفاعل المرن والتفاعل اللامرن والامتصاص)، وهذه الظاهرة تعرف بظاهرة شذوذ العتبة ، وهي نتيجة للإضافة التبددية في الكمون الضوئي التبددي.

(4)- تم إيجاد شكل الكمونات المدروسة بالنسبة للجزء التخيلي (الحجمي والسطحي) والحقيقي للمنظومة المدروسة ($P + {}^{96}\text{Rh}$) في المجال الطاقى المدروس وكانت ذات

دقة عالية من التحديد وظهرت تطابق مقاطع التفاعل الحسابية مع مثيلاتها التجريبية وكمون (هاتري-فوك) وتمّ التوصل إلى العلاقتين التاليتين للكمون الحقيقي:

$$V_V = -0.4003E + 59.499 \quad (1)$$

$$V_{HF} = 0.4587E + 58.917 \quad (2)$$

يمكن من خلال هاتين العلاقتين إيجاد قيمة الكمون وعند كل خطوة طاقة أو فاصلة طاقة .

(5)- تمّ أيضاً تحديد القيمة العددية لأنصاف أقطار الكمونات للمنظومة المدروسة ($P, ^{96}Rh$) وضمن المجال الطاقى المختار ووجدنا أن سلوكها يتباين مع الطاقة ويعزى ذلك إلى الإضافة التبددية التي أظهرت ذلك، بينما نجد أن ذلك غير وارد في التمثيلات الوسيطة الشاملة لبارامترات الكمون الضوئي.

(6)- تم تحديد القيم العددية لمقاطع التفاعل للمنظومة ($P + ^{96}Rh$) وضمن المجال الطاقى المدروس وخارجه ، وتبين توافقها بشكل جيد مع مثيلاتها التجريبية و التمثيلات الوسيطة الشاملة . ويعزى هذا التوافق والتطابق أيضاً إلى الأضافة التبددية في الكمون الضوئي ولدقة عمل البارامترات الهندسية للكمون الضوئي.

(7)- حددنا أبعاد المنطقة الإشعاعية (الوسطاء الهندسية للكمون الضوئي) ، التي تحدث فيها عمليات التأثيرات المتبادلة بين الجسيمات المقذوفة ونواة الهدف من خلال المعالجة لتلك العمليات باستخدام الكودين البرنامجين (VMA-SPI)، (SPI).

(8)- حددنا قيمة نسبة المشاركة التبددية الفعّالة بدلالة الطاقة ، حيث تبين أن قيمتها تتراوح في المجال الطاقى المنخفض (5-10 MeV) وفي المجال الطاقى المتوسط (10-80 MeV).

التوصيات:

- (1)- توسيع الدراسة لتشمل مجالات طاقية أعلى و نوى أهداف العناصر المختلفة .
- (2)- أرشفة النتائج التي تمّ التوصل إليها في قاعدة بيانات تكون مرجعاً للدراسات البحثية القادمة و المستقبلية.

المراجع:

- [1]– MAHAUX . C, SARTOR . R , 1991, Nucl . Phys .V. 528.P. 253.
- [2]– أنيس بلال – محاضرات الفيزياء النووية 2-السنة الرابعة فيزياء- جامعة البعث،كلية العلوم-قسم الفيزياء(2015-2025).
- [3]-MAHAUX . C, BORTINGNON P.F, 1985 -Dynamics of the shell model. Phys. Rep, V.120 , p.p.1- 274.
- [4] - MAHAUX . C, SARTOR . R ,1989 , Nucl . Phys .V. 503, P.525.
- [5]-Molhum Ussef, & Anis Belal. (2020). Study of the dispersive contribution effect for neutrons scattering with energy($60 \leq E_n \leq 80$)MeV, Nuclear Science, Science PG, Vol.5,Issue Number 4,December 2020.
- [6]- HODGSON . P. E , 1991- The Dispersive Optical Model, OUNP, 91-11, p.p.1- 7.
- [7]- GURBICH . A . F, LIONEV. A , 1983- Analysis Proton Optical - Model potential near the coulomb barrier, bninsk – USSR.
- [8]-استخدام النموذج الضوئي التبددي لدراسة تبعثر البروتونات المقذوفة بطاقة $10 \leq E_p \leq 50 \text{ Mev}$ على نواة الهدف ^{57}Fe . مجلد 40 جامعة البعث.
- [9]- PEREY F.G. code SPI-GENOA (unpublished)1976.
- [10]- Hodgson, P. E. (1990). The unification of the nuclear optical potential, Contemporary Physics, 31: 5, 295-308, DOI: 10.1080/00107519008213780.

[11] KONING. A, HILAIRE. S, GORIELY. S, 2015- TALYS-1.8, A nuclear reaction program, User Manual. First edition. NRG Petten, the Netherlands and CEA 45679599-leChâtel, France, 41-533p.

[12] Koning, A. J., & Delaroche, J. P. (2003). Nucl. Phys. A713, 231.

[13]- معروف، إبراهيم، أنيس بلال، (2023) ، تحديد نسبة المساهمة التبددية في المقاطع العرضية والكمونات النووية للتفاعل $^{112}\text{Cd}(n,n)^{112}\text{Cd}$ بطاقة قذف $80 \leq E_n \leq 100 \text{ Mev}$ باستخدام طريقة VMA. المجلد 45.

[14] IAEA, (2006). Handbook for Calculations of Nuclear Reaction Data, RIPL-2, IAEA in Austria, (Final report of a coordinated research project, IAEATECDOC-1506), pp. 47- 69.

[15] Al-Mustafa, H., & Belal, A. (2019). A Dispersive Optical Model Analysis of the Protons Scattering by Titanium Element Nucleus and Its Natural Isotopes. *Nuclear Science*, 6(1), 44-51.

[16] مرح علي. (2023). تحديد البارامترات الهندسية للكمون الضوئي بطريقة VMA للمنظومة $^{28}_{-26}[\text{Fe}] + n$ مجلة جامعة البعث-سلسلة العلوم الأساسية. 45(5) ,

[17]-Bear, K., & Hodgson, P. E. (1978). The systematics of nuclear bound states. *Journal of Physics G: Nuclear Physics*, 4(12), L287.

[18]-KONING A.J. AND D. ROCHMAN, 2011- Nuclear Research and Consultancy Group (NRG) Petten, The Netherlands. Release date: December 29.

- [19] P.G. Young, Los Alamos National Laboratory-(1994), Experience at los alamos with use of the optical model for applied nucleia data calculations, (report la-ur-94-3104).
- [20]- Koning, A. J., & Rochman, D. (2012). Modern nuclear data evaluation with the TALYS code system. Nuclear data sheets, 113(12), 2841-2934.
- [21]-Perey, C. M., & Perey, F. G. (1976). Compilation of phenomenological optical-model parameters 1954–1975. Atomic data and nuclear data tables, 17(1), 1-101.
- [22] Perey, F. G. (1963). Optical-model analysis of proton elastic scattering in the range of 9 to 22 MeV. Physical Review, 131(2), 745.