

الحل العددي لمعادلة التوصيل الحراري في بعد واحد باستخدام خوارزمية (SM-RG)

(1) أ. د. برلنت صبري مطيط

(2) قتيبة أحمد العلي

جامعة دمشق – كلية العلوم – قسم الرياضيات

ملخص

تتناول هذه المقالة الحل العددي لمعادلة التوصيل الحراري باستخدام أسلوب الشبكات العشوائية المُسمَّى SM-RG. حيث يهدف البحث إلى تطوير منهجية الفروق المنتهية كإحدى الطرائق العددية الفعّالة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية. وتعتمد خوارزمية SM-RG على توزيع النقاط بشكل عشوائي ضمن الشبكة، مع إدخال تحسينات على معادلات الفروق لتعزيز الاستقرار العددي ورفع مستوى الدقة.

تتضمن الدراسة تطبيق خوارزمية SM-RG على معادلة الحرارة أحادية البعد، مع عرض لمراحل التنفيذ، حيث يتم تعديل معادلة الفروق ومعالجة الشروط الحدية والابتدائية. أظهرت النتائج أن خوارزمية SM-RG تُحقق دقة أعلى للحلول وتقلل نسبة الخطأ. علماً أن الطريقة المتبعة في هذا البحث غير فعالة من أجل المناطق غير البسيطة وغير المنظمة

الكلمات المفتاحية: معادلة تفاضلية جزئية، معادلة الحرارة في بعد واحد، طريقة الفروق المنتهية، طريقة CN، خوارزمية SM-RG.

(1) عضو هيئة تدريسية في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق.

(2) طالب ماجستير، جامعة دمشق، كلية العلوم، قسم الرياضيات.

Numerical Solution of the one-dimensional Heat Equation Using the (SM-RG) Algorithm

(1) Prof. Brillant Sabry Matit

(2) Qutaibah Ahmad Ali

Damascus University - Faculty of Science - Department of Mathematics

Abstract

This paper presents a numerical solution of the heat conduction equation using a random grid approach called the SM-RG algorithm. The research aims to develop a finite difference scheme as one of the effective numerical methods for solving partial differential equations. The SM-RG algorithm relies on random point distribution within the computational grid while incorporating improvements to the difference equations to enhance numerical stability and increase accuracy.

The study involves applying the SM-RG algorithm to a one-dimensional heat equation, detailing the implementation stages, including modification of the difference equation and treatment of boundary and initial conditions. The results demonstrated that the SM-RG algorithm yields higher solution accuracy and reduces the error rate. It should be noted that the method employed in this study is ineffective for non-simple and irregular regions.

Keywords: partial differential equation, the 1D Heat equation, Finite difference method, CN method, SM-RG algorithm.

- (1) A faculty member in the Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Damascus.
- (2) Master's student, Damascus University, Faculty of Science, Department of Mathematics.

مقدمة

برزت أهمية المعادلات التفاضلية الجزئية في العديد من فروع العلوم والتكنولوجيا، مثل نظرية الكهرومغناطيسية، المرونة، ميكانيكا الموائع، انتقال الحرارة، الصوتيات، ميكانيكا الكم وغيرها. تُشكل هذه المعادلات عند اقترانها بشروط ابتدائية وشروط حدية مسألة تُعرف بمسألة قيم ابتدائية حدية، ظهرت العديد من الدراسات التي تبحث عن حل المعادلات التفاضلية بشكل تحليلي أو عددي، إلا أن الوصول إلى حل دقيق للمعادلات التفاضلية يعد أمراً صعباً باستخدام الطرائق التحليلية التقليدية. من هنا برزت طريقة الفروق المنتهية كأحدى الطرائق العددية الفعالة التي تُستخدم لحل هذه المعادلات، حيث تقوم هذه الطريقة بتقريب المشتقات في المعادلات التفاضلية بدوال عددية تعتمد على تقسيم المجال المدروس إلى شبكة من النقاط، حيث يمكن حساب الحلول بشكل تقريبي ودقيق [1]، ولقد اعتمد في هذا البحث دراسة خوارزمية SM-RG التي تهدف إلى تطوير طريقة الفروق المنتهية. وتطبيق خوارزمية SM-RG على معادلة الحرارة في بعد واحد.

هدف البحث:

تطبيق خوارزمية SM-RG لحل معادلة الحرارة في بعد واحد باستخدام طريقة الفروق المنتهية على شبكات عشوائية.

1. طريقة الفروق المنتهية Finite Difference method:

تُعد طريقة الفروق المنتهية إحدى الطرائق العددية المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية، سواء كانت المعادلات التفاضلية عادية أو جزئية [2]. تعتمد هذه الطريقة على تقريب المشتقات باستخدام فروق قيم الدالة عند نقاط محددة [3]. تعود الجذور الرياضية لهذه الطريقة إلى متسلسلة تايلور، التي شكلت الأساس النظري لتطوير التقريب العددي للمشتقات [3]. ومع تطور الأبحاث العلمية وخاصة في مجال المعادلات التفاضلية حاول العلماء لسنوات طويلة حل هذه المعادلات بشكل تحليلي، إلا أنهم صادفوا نماذج من المعادلات التفاضلية يتعذر حلها بشكل تحليلي وكانت هذه نقطة الانطلاق العلمي في مسار جديد يبحث في حل المعادلات التفاضلية بالطرائق العددية ومنها طريقة الفروق المنتهية التي تتميز بسهولة تطبيقها. ومع ظهور الحواسيب شهدت طريقة الفروق المنتهية تطوراً نوعياً وأصبحت أداة فعالة في حل المعادلات التفاضلية. وفي نهاية القرن العشرين وبداية القرن الحادي والعشرين أسهم تطور الحوسبة الرقمية في تعزيز مكانة طريقة الفروق المنتهية حيث تم دمجها مع طرائق عديدة أخرى لتحسين أدائها في النمذجة الرياضية للظواهر العلمية المعقدة [4]. تُستخدم طريقة الفروق المنتهية عندما تكون منطقة الدراسة بسيطة ومنتظمة (هذا يعني أن الطريقة غير فعالة من أجل المناطق غير البسيطة وغير المنتظمة) حيث يتم تقسيم منطقة المسألة المدروسة إلى شبكة منتظمة واستبدال المشتقات بما يقابلها من الدوال العددية وبعد ذلك نحصل على جملة من المعادلات الخطية نحلها بالطرائق المباشرة. ومن أجل زيادة دقة الشبكة نقوم بزيادة عدد التقسيمات وبالتالي يزداد عدد المعادلات الجبرية الخطية، لحلها نلجأ إلى الطرائق العددية مثل طريقة غاوس سيدل.

2. معادلة الحرارة في بعد واحد The One-Dimensional Heat Equation: [5]

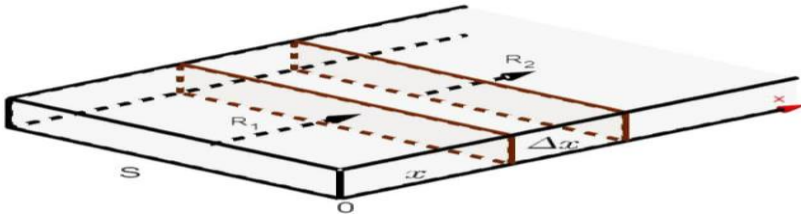
نبدأ هذه الفقرة باستنتاج معادلة الحرارة في بعد واحد، ثم سنقوم بصياغة مسائل القيم الابتدائية الحدية، والتي تتضمن معادلة الحرارة والشرط الابتدائي والشرط الحدية.

أولاً نُذكر بثلاث مبادئ فيزيائية أساسية:

1. تتدفق الحرارة من درجة حرارة أعلى إلى درجة حرارة أقل.
2. كمية الحرارة في جسم ما تتناسب مع كتلته ودرجة حرارته.
3. معدل تدفق الحرارة عبر سطح ما يتناسب مع تلك المساحة ومع معدل تغير درجة الحرارة بالنسبة للمسافة العمودية على تلك المساحة.

ثانياً: استنتاج معادلة الحرارة

بفرض لدينا قضيب متجانس ذو مقطع عرضي منتظم S بوحدة (cm^2) . ولنفترض أن الجوانب مغطاة بمادة عازلة للحرارة بحيث تكون خطوط تدفق الحرارة متوازية وعمودية على المقطع العرضي S . لنأخذ أحد الطرفين كنقطة مبدأ واتجاه التدفق كاتجاه المحور x (الشكل 1) ولتكن ρ هي الكثافة بوحدة (g/cm^3) و s هي السعة الحرارية النوعية بوحدة $(cal/g deg)$ و k التوصيل الحراري بوحدة $(cal/cm deg sec)$.



الشكل(1): التدفق الحراري

لنفترض أن $u(x, t)$ تمثل درجة الحرارة عند مسافة x من النقطة O . إذا كان Δu هو التغير في درجة الحرارة ضمن شريحة بسماكة Δx من القضيب، فإنه وفق المبدأ (2) كمية الحرارة في هذه الشريحة ($slab$) تُعطى بالعلاقة:

$$slab = \rho S \Delta x \Delta u$$

وبالتالي فإن معدل زيادة الحرارة في هذه الشريحة أي $\rho S \Delta x \Delta u_t$ ، يُعطى بالفرق بين معدل تدفق الحرارة الداخل والخارج:

$$\rho S \Delta x \Delta u_t = R_1 - R_2 \quad (4)$$

حيث أن R_1 و R_2 هما على التوالي معدل تدفق الحرارة الداخل والخارج من الشريحة بوحدة (cal/sec) . وبما أن معدل انتشار الحرارة (أي كمية الحرارة التي تنتقل عبر مساحة مقطع عرضي S عند الإحداثي x في وحدة الزمن وفقاً للمبدأ (3) يُعطى بقانون فورييه:

$$q = -k u_x S$$

حيث k هو ثابت يعتمد على مادة الجسم ويُعرف باسم التوصيل الحراري، من هذا ينتج أن:

$$R_1 = -kS \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \quad \text{and} \quad R_2 = -kS \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

تظهر الإشارة السالبة كنتيجة للمبدأ (1)، بالتعويض في (4) نحصل على:

$$\begin{aligned} \rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} &= -kS \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x + kS \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{k}{\rho} \left\{ \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x}{\Delta x} \right\} \end{aligned}$$

نرمز إلى الحد ($c^2 = \frac{k}{s\rho}$)، المعروف باسم معامل الانتشار الحراري بوحدة (cm^2/sec)، وبأخذ النهاية عندما $\Delta x \rightarrow 0$ نحصل على معادلة توصيل الحرارة في قضيب متجانس:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \alpha, \quad t > 0, \quad c > 0 \quad (5)$$

أو بالشكل:

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \alpha, \quad t > 0, \quad c > 0$$

وتسمى أيضا معادلة الحرارة أو معادلة الانتشار الحراري أو معادلة التوصيل الحراري، وهي معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الثانية من النمط المكافئ، تصف التوصيل الحراري، أو تغير الحرارة في الأجسام. وحتى يكون لمعادلة الحرارة حل وحيد يجب أن تحقق الدالة $u = u(x, t)$ شروط ابتدائية وشروط حدية تتعلق بطبيعة المسألة. بفرض أنه عندما $t = 0$ يتم إعطاء درجة حرارة تساوي $f(x)$ أي:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \alpha \quad (6)$$

وهذا يُعرف بالشروط الابتدائية.

وعند إعطاء قيمة الدالة على حدود المنطقة المدروسة نحصل على الشروط الحدية:

$$u(0, t) = T_1, \quad u(\alpha, t) = T_2, \quad t > 0 \quad (7)$$

تُشكل العلاقة (5) عند اقترانها بالشروط (6) و (7) مسألة القيم الابتدائية الحدية، ولحل هذه المسألة نستخدم طريقة الفروق المنتهية، والتي يتفرع منها خوارزمية SM-RG.

3. تقريبات الفروق المنتهية Approximate Finite Difference [6]

تعتمد طريقة الفروق المنتهية على تقريب المشتقات في المعادلة التفاضلية بناءً على قيم الدالة نفسها عند نقاط منفصلة.

صيغ الفروق المنتهية:

• الفروق التقدمة (Forward differences)

المشتقات من المرتبة الأولى:

$$u_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + o(\Delta x) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i,j}}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$$

$$u_t = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} + o(\Delta t) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

المشتقات من المرتبة الثانية:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x) \\ &\approx \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i,j}}{h^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+2} - 2u_{i,j+1} + u_{i,j}}{(\Delta t)^2} + o(\Delta t) \approx \frac{u_{i,j+2} - 2u_{i,j+1} + u_{i,j}}{(\Delta t)^2} \\ &= \frac{u_{i,j+2} - 2u_{i,j+1} + u_{i,j}}{k^2} \end{aligned}$$

• الفروق التراجعية (Backward differences)

المشتقات من المرتبة الأولى:

$$u_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + o(\Delta x) \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}$$

$$u_t = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta t} + o(\Delta t) \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}$$

المشتقات من المرتبة الثانية:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x) \\ &\approx \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{(\Delta t)^2} + o(\Delta t) \approx \frac{u_{i,j} - 2u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{(\Delta t)^2} \\ &= \frac{u_{i,j} - 2u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{k^2} \end{aligned}$$

• الفروق المركزية (Central differences)

المشتقات من المرتبة الأولى:

$$\begin{aligned} u_x &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2(\Delta x)} + o((\Delta x)^2) \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2(\Delta x)} \\ &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \end{aligned}$$

$$u_t = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2(\Delta t)} + o((\Delta t)^2) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2(\Delta t)}$$

$$= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}$$

المشتقات من المرتبة الثانية:

$$u_{xx} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + o((\Delta x)^2)$$

$$\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

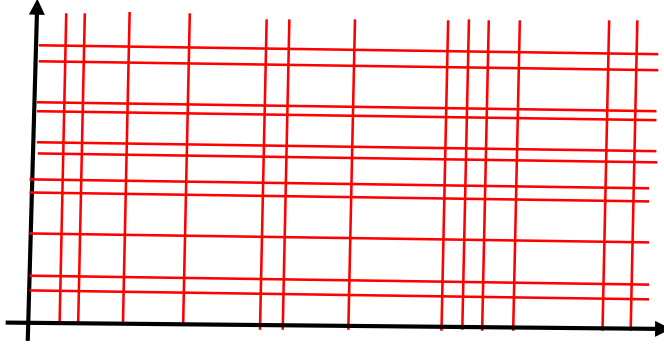
$$= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$u_{tt} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta t)^2} + o(\Delta t) \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

4 . خوارزمية (SM-RG) Sanaullah Mastoi-Random Grids [7].

تم تقديم خوارزمية SM لأول مرة من قبل الباحث Sanaullah Mastoi عام 2020، ثم طور Sanallah الخوارزمية من خلال إنشاء شبكات مولدة عشوائياً (RG (Random Grids و ذلك لتحسين طريقة الفروق المنتهية. حيثُ أظهرت النتائج التي حصل عليها Sanaullah Mastoi أن تطبيق طريقة الفروق المنتهية على شبكات مولدة عشوائياً تحقق تقارباً أسرع وتحسن دقة الحلول للمسائل المطروحة من خلال تقليل الخطأ، يوضح الشكل (2) التوزيع العشوائي لنقاط الشبكة.



الشكل (2): التوزيع العشوائي لنقاط الشبكة

5. خوارزمية SM-RG:

إن فكرة خوارزمية SM-RG تتلخص بتوزيع نقاط عشوائية على المحاور الاحداثية [8] أو على إحداها، ثم نطبق طريقة من طرائق الفروق المنتهية عند قيمة ما.

خطوات خوارزمية SM-RG:

- توزيع النقاط بشكل عشوائي على المحاور الإحداثية.
- اختيار طريقة مستقرة من طرائق الفروق المنتهية.
- تعديل معادلة الفروق للطريقة المختارة وفق إحدى الحالات التالية:

$$1. k_{min} = \text{minimum}(k_{j-1}, k_{j+1}) \quad , \quad h_{min} = \text{minimum}(h_{i-1}, h_{i+1})$$

[8-11]

$$k_{avg} = \text{average}(k_{j-1}, k_{j+1}) \quad , \quad h_{min} =$$

2. $\text{average}(h_{i-1}, h_{i+1})$ [8-11]

$$k_{max} = \text{maximum}(k_{j-1}, k_{j+1}) \quad , \quad h_{max} =$$

3. $\text{maximum}(h_{i-1}, h_{i+1})$ [8-11]

6. تطبيق عددي: [12]

مسألة: بفرض لدينا مسألة التوصيل الحراري التالية:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} ; \quad t > 0 , \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$T(x, t = 0) = x + \sin(\pi x)$$

$$T(x = 0, t) = 0 , \quad T(x = 1, t) = 1$$

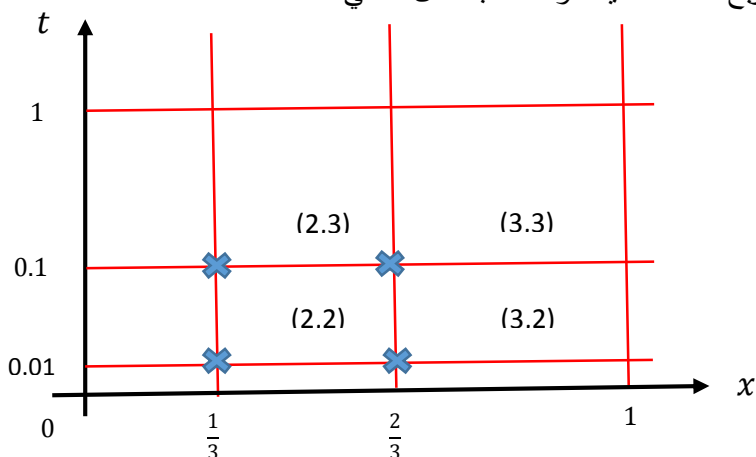
الحل: إن هذه المعادلة هي معادلة الحرارة في بعد واحد حيث أن $a = 1$

نأخذ متجه عقد منتظم على محور الفواصل:

$$x = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right\} ; \quad h = \frac{1}{3}$$

$$t = \{ 0, 0.01, 0.1, 1 \} ; \quad k = \{ 0.01, 0.09, 0.9 \}$$

يوجد أربع نقاط داخلية موضحة بالشكل التالي:



لدينا من الشرط الحدي الأول:

$$T(x = 0, t) = 0 \Rightarrow T_{1,j} = 0 ; j = 2:3$$

لدينا من الشرط الحدي الثاني:

$$T(x = 1, t) = 1 \Rightarrow T_{4,j} = 1 ; j = 2:3$$

لدينا من الشرط الابتدائي:

$$T(x, t = 0) = x + \sin(\pi x) \Rightarrow T_{i,1} = x_i + \sin(\pi x_i) ; i = 1:4$$

$$\Rightarrow T_{1,1} = 0 , \quad T_{2,1} = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{6} , \quad T_{3,1} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{6} , \quad T_{4,1} = 1$$

نعلم أن معادلة الفروق المنتهية لطريقة كرنك نيكلسون تُعطى بالشكل: [12]

$$\begin{aligned} & -\lambda T_{i+1,j+1} + 2(1 + \lambda)T_{i,j+1} - \lambda T_{i-1,j+1} \\ & = \lambda T_{i+1,j} + 2(1 - \lambda)T_{i,j} + \lambda T_{i-1,j} ; \lambda = \frac{ak}{h^2} \end{aligned}$$

لنعدل المعادلة السابقة حسب خوارزمية SM-RG في حالة \min :

$$\begin{aligned} & -\lambda_{\min} T_{i+1,j+1} + 2(1 + \lambda_{\min})T_{i,j+1} - \lambda_{\min} T_{i-1,j+1} \\ & = \lambda_{\min} T_{i+1,j} + 2(1 - \lambda_{\min})T_{i,j} + \lambda_{\min} T_{i-1,j} ; \lambda_{\min} \\ & = \frac{ak_{\min}}{h^2} \end{aligned}$$

| (i, j) | k_{\min} | h | λ_{\min} |
|----------|------------|---------------|------------------|
| (2,2) | 0.01 | $\frac{1}{3}$ | 0.09 |
| (3,2) | 0.01 | $\frac{1}{3}$ | 0.09 |
| (2,3) | 0.09 | $\frac{1}{3}$ | 0.81 |

| | | | |
|-------|------|---------------|------|
| (3,3) | 0.09 | $\frac{1}{3}$ | 0.81 |
|-------|------|---------------|------|

من أجل $j = 1$:

$$-\lambda_{min} T_{i+1,2} + 2(1 + \lambda_{min})T_{i,2} - \lambda_{min} T_{i-1,2} = \lambda_{min} T_{i+1,1} + 2(1 - \lambda_{min})T_{i,1} + \lambda_{min} T_{i-1,1}$$

عندما $i = 2$:

$$-0.09T_{3,2} + 2.18T_{2,2} - 0.09T_{1,2} = 0.09T_{3,1} + 1.82T_{2,1} + 0.09T_{1,1}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$-0.09T_{3,2} + 2.18T_{2,2} = 2.320775188 \quad (1)$$

عندما $i = 3$:

$$-0.09T_{4,2} + 2.81T_{3,2} - 0.09T_{2,2} = 0.09T_{4,1} + 1.82T_{3,1} + 0.09T_{2,1}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$2.81T_{3,2} - 0.09T_{2,2} = 3.077441855 \quad (2)$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين (1) و(2):

$$T_{3,2} = 1.458106151, \quad T_{2,2} = 1.124772817$$

من أجل $j = 2, i = 2$:

$$-0.81T_{3,3} + 3.62T_{2,3} - 0.81T_{1,3} = 0.81T_{3,2} + 0.38T_{2,2} + 0.81T_{1,2}$$

$$\Rightarrow -0.81T_{3,3} + 3.62T_{2,3} = 1.608479653 \quad (3)$$

من أجل $j = 2, i = 3$:

$$-0.81T_{4,3} + 3.62T_{3,3} - 0.81T_{2,3} = 0.81T_{4,2} + 0.38T_{3,2} + 0.81T_{2,2}$$

$$\Rightarrow 3.62T_{3,3} - 0.81T_{2,3} = 3.085146319 \quad (4)$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين (3) و(4):

$$T_{3,3} = 1.00183143 \quad , \quad T_{2,3} = 0.6684980971$$

لحساب الخطأ في حالة min :

$$|r_1| = 2.320775188 + 0.09T_{3,2} - 2.18T_{2,2} = 5.3 \times 10^{-10}$$

$$|r_2| = 3.077441855 - 2.81T_{3,2} + 0.09T_{2,2} = -6.5 \times 10^{-10}$$

$$e_1 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 8.386894539 \times 10^{-10}$$

$$|r_3| = 1.608479653 + 0.81T_{3,3} - 3.62T_{2,3} = 1.56 \times 10^{-10}$$

$$|r_4| = 3.085146319 - 3.62T_{3,3} + 0.81T_{2,3} = -7.1243 \times 10^{-8}$$

$$e_2 = \sqrt{r_3^2 + r_4^2} = 7.12431708 \times 10^{-8}$$

وبالتالي فإن الخطأ الأعظمي هو:

$$e_{max} = \max(e_1, e_2) = 7.12431708 \times 10^{-8}$$

لنحل المسألة في حالة Avg :

| (i, j) | k_{avg} | h | λ_{avg} |
|----------|-----------|---------------|-----------------|
| (2,2) | 0.05 | $\frac{1}{3}$ | 0.45 |

الحل العددي لمعادلة التوصيل الحراري في بعد واحد باستخدام خوارزمية (SM-RG)

| | | | |
|-------|-------|---------------|-------|
| (3,2) | 0.05 | $\frac{1}{3}$ | 0.45 |
| (2,3) | 0.495 | $\frac{1}{3}$ | 4.455 |
| (3,3) | 0.495 | $\frac{1}{3}$ | 4.455 |

لنعديل معادلة الفروق المنتهية لطريقة كرنك نيكلسون حسب خوارزمية SM-RG في حالة Avg :

من أجل $j = 1$:

$$-\lambda_{avg} T_{i+1,2} + 2(1 + \lambda_{avg}) T_{i,2} - \lambda_{avg} T_{i-1,2} = \lambda_{avg} T_{i+1,1} + 2(1 - \lambda_{avg}) T_{i,1} + \lambda_{avg} T_{i-1,1}$$

عندما $i = 2$:

$$-0.45T_{3,2} + 2.9T_{2,2} - 0.45T_{1,2} = 0.45T_{3,1} + 1.1T_{2,1} + 0.45T_{1,1}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$-0.45T_{3,2} + 2.9T_{2,2} = 2.009006043 \quad (1)$$

عندما $i = 3$:

$$-0.45T_{4,2} + 2.9T_{3,2} - 0.45T_{2,2} = 0.45T_{4,1} + 1.1T_{3,1} + 0.45T_{2,1}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$2.9T_{3,2} - 0.45T_{2,2} = 3.125672709 \quad (2)$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين (1) و(2):

$$T_{3,2} = 1.214560289 , T_{2,2} = 0.8812269563$$

من أجل $j = 2$

$$\begin{aligned} -\lambda_{avg} T_{i+1,3} + 2(1 + \lambda_{avg}) T_{i,3} - \lambda_{avg} T_{i-1,3} \\ = \lambda_{avg} T_{i+1,2} + 2(1 - \lambda_{avg}) T_{i,2} + \lambda_{avg} T_{i-1,2} \end{aligned}$$

عندما $i = 2$:

$$-4.455T_{3,3} + 10.91T_{2,3} - 4.455T_{1,3} = 4.455T_{3,2} - 6.91T_{2,2} + 4.455T_{1,2}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$\Rightarrow -4.455T_{3,3} + 10.91T_{2,3} = -0.6784121805 \quad (3)$$

من أجل $i = 3$:

$$-4.455T_{4,3} + 10.91T_{3,3} - 4.455T_{2,3} = 4.455T_{4,2} - 6.91T_{3,2} + 4.455T_{2,2}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$\Rightarrow 10.91T_{3,3} - 4.455T_{2,3} = 4.443254493 \quad (4)$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين (3) و(4):

$$T_{3,3} = 0.4582888445 \quad , \quad T_{2,3} = 0.124555107$$

لحساب الخطأ في حالة Avg :

$$|r_1| = -0.45T_{3,2} + 2.9T_{2,2} - 2.009006043 = 2.2 \times 10^{-10}$$

$$|r_2| = 2.9T_{3,2} - 0.45T_{2,2} - 3.125672709 = 1.235 \times 10^{-9}$$

$$e_1 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 1.254442107 \times 10^{-9}$$

$$|r_3| = -4.455T_{3,3} + 10.91T_{2,3} + 0.6784121805 = 1.05 \times 10^{-11}$$

$$|r_4| = 10.91T_{3,3} - 4.455T_{2,3} - 4.443254493 = 3.265 \times 10^{-10}$$

$$e_2 = \sqrt{r_3^2 + r_4^2} = 3.266687925 \times 10^{-10}$$

وبالتالي فإن الخطأ الأعظمي هو:

$$e_{max} = \max(e_1, e_2) = 1.254442107 \times 10^{-9}$$

لنحل المسألة في حالة max :

| (i, j) | k_{max} | h | λ_{max} |
|----------|-----------|---------------|-----------------|
| (2,2) | 0.09 | $\frac{1}{3}$ | 0.81 |
| (3,2) | 0.09 | $\frac{1}{3}$ | 0.81 |
| (2,3) | 0.9 | $\frac{1}{3}$ | 8.1 |
| (3,3) | 0.9 | $\frac{1}{3}$ | 8.1 |

لنعدل معادلة الفروق المنتهية لطريقة كرنك نيكلسون حسب خوارزمية SM-RG في حالة max :

من أجل $j = 1$:

$$\begin{aligned} -\lambda_{max} T_{i+1,2} + 2(1 + \lambda_{max}) T_{i,2} - \lambda_{max} T_{i-1,2} \\ = \lambda_{max} T_{i+1,1} + 2(1 - \lambda_{max}) T_{i,1} + \lambda_{max} T_{i-1,1} \end{aligned}$$

عندما $i = 2$:

$$-0.81T_{3,2} + 3.62T_{2,2} - 0.81T_{1,2} = 0.81T_{3,1} + 0.38T_{2,1} + 0.81T_{1,1}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$-0.81T_{3,2} + 3.62T_{2,2} = 1.697236879 \quad (1)$$

عندما $i = 3$:

$$-0.81T_{4,2} + 3.62T_{3,2} - 0.81T_{2,2} = 0.81T_{4,1} + 0.38T_{3,1} + 0.81T_{2,1}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$3.62T_{3,2} - 0.81T_{2,2} = 3.173903564 \quad (2)$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين (1) و(2):

$$T_{3,2} = 1.033417637 \quad , \quad T_{2,2} = 0.7000842998$$

من أجل $j = 2$

$$\begin{aligned} -\lambda_{\max} T_{i+1,3} + 2(1 + \lambda_{\max})T_{i,3} - \lambda_{\max} T_{i-1,3} \\ = \lambda_{\max} T_{i+1,2} + 2(1 - \lambda_{\max})T_{i,2} + \lambda_{\max} T_{i-1,2} \end{aligned}$$

عندما $i = 2$:

$$-8.1T_{3,3} + 18.2T_{2,3} - 8.1T_{1,3} = 8.1T_{3,2} - 14.2T_{2,2} + 8.1T_{1,2}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$\Rightarrow -8.1T_{3,3} + 18.2T_{2,3} = -1.570514197 \quad (3)$$

من أجل $i = 3$:

$$-8.1T_{4,3} + 18.2T_{3,3} - 8.1T_{2,3} = 8.1T_{4,2} - 14.2T_{3,2} + 8.1T_{2,2}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$\Rightarrow 18.2T_{3,3} - 8.1T_{2,3} = 7.196152383 \quad (4)$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين (3) و(4):

$$T_{3,3} = 0.4451636049 \quad , \quad T_{2,3} = 0.1118302749$$

لحساب الخطأ في حالة max :

$$|r_1| = -0.81T_{3,2} + 3.62T_{2,2} - 1.697236879 = 3.06 \times 10^{-10}$$

$$|r_2| = 3.62T_{3,2} - 0.81T_{2,2} - 3.173903564 = 8.98 \times 10^{-10}$$

$$e_1 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 9.487043797 \times 10^{-10}$$

$$|r_3| = -8.1T_{3,3} + 18.2T_{2,3} + 1.570514197 = 4.9 \times 10^{-10}$$

$$|r_4| = 18.2T_{3,3} - 8.1T_{2,3} - 7.196152383 = 5.1 \times 10^{-10}$$

$$e_2 = \sqrt{r_3^2 + r_4^2} = 7.072481884 \times 10^{-10}$$

وبالتالي فإن الخطأ الأعظمي هو:

$$e_{max} = \max(e_1, e_2) = 9.487043797 \times 10^{-10}$$

وأخيراً لنحل المسألة في حالة شبكة منتظمة:

نأخذ متجه عقد منتظم على المحور الفواصل ومحور الترتيب:

$$x = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\} ; \quad h = \frac{1}{3}$$

$$t = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\} ; k = \frac{1}{3}$$

$$-\lambda T_{i+1,j+1} + 2(1 + \lambda)T_{i,j+1} - \lambda T_{i-1,j+1}$$

$$= \lambda T_{i+1,j} + 2(1 - \lambda)T_{i,j} + \lambda T_{i-1,j} ; \lambda = \frac{ak}{h^2}$$

$$\lambda = \frac{ak}{h^2} = 3 \text{ بما أن متجه العقد منتظم على كلا المحورين فإن:}$$

من أجل $j = 1$:

$$-\lambda T_{i+1,2} + 2(1 + \lambda)T_{i,2} - \lambda T_{i-1,2} = \lambda T_{i+1,1} + 2(1 - \lambda)T_{i,1} + \lambda T_{i-1,1}$$

عندما $i = 2$:

$$-3T_{3,2} + 8T_{2,2} - 3T_{1,2} = 3T_{3,1} - 4T_{2,1} + 3T_{1,1}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$-3T_{3,2} + 8T_{2,2} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{6} \quad (1)$$

عندما $i = 3$:

$$-3T_{4,2} + 8T_{3,2} - 3T_{2,2} = 3T_{4,1} - 4T_{3,1} + 3T_{2,1}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$8T_{3,2} - 3T_{2,2} = \frac{26 - 3\sqrt{3}}{6} \quad (2)$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين (1) و(2):

$$T_{3,2} = 0.4936415859 , T_{2,2} = 0.1601282526$$

من أجل $j = 2$

$$-\lambda T_{i+1,3} + 2(1 + \lambda)T_{i,3} - \lambda T_{i-1,3} = \lambda T_{i+1,2} + 2(1 - \lambda)T_{i,2} + \lambda T_{i-1,2}$$

عندما $i = 2$:

$$-3T_{3,3} + 8T_{2,3} - 3T_{1,3} = 3T_{3,2} - 4T_{2,2} + 3T_{1,2}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$\Rightarrow -3T_{3,3} + 8T_{2,3} = 0.8404117473 \quad (3)$$

من أجل $i = 3$:

$$-3T_{4,3} + 8T_{3,3} - 3T_{2,3} = 3T_{4,2} - 4T_{3,2} + 3T_{2,2}$$

وبالاستفادة من الشروط:

$$\Rightarrow 8T_{3,3} - 3T_{2,3} = 4.505818414 \quad (4)$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين (3) و(4):

$$T_{3,3} = 0.7012324101 \quad , \quad T_{2,3} = 0.3680136222$$

لحساب الخطأ في حالة max :

$$|r_1| = -3T_{3,2} + 8T_{2,2} - \frac{4 - 3\sqrt{3}}{6} = 5.399997822 \times 10^{-4}$$

$$|r_2| = 8T_{3,2} - 3T_{2,2} - \frac{26 - 3\sqrt{3}}{6} = 1.439999851 \times 10^{-3}$$

$$e_1 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 1.537920458 \times 10^{-3}$$

$$|r_3| = -3T_{3,3} + 8T_{2,3} - 0.8404117473 = 0$$

$$|r_4| = 8T_{3,3} - 3T_{2,3} - 4.505818414 = 2 \times 10^{-10}$$

$$e_2 = \sqrt{r_3^2 + r_4^2} = 2 \times 10^{-10}$$

وبالتالي فإن الخطأ الأعظمي هو:

$$e_{max} = \max(e_1, e_2) = 1.537920458 \times 10^{-3}$$

7. النتائج ومناقشتها:

تعتمد هذه الدراسة على الحل العددي لمعادلة الحرارة في بُعد واحد مع شروط حدية من نوع ديرخلية وشرط ابتدائي باستخدام خوارزمية SM-RG التي تُعتبر تعديل لطريقة الفروق المنتهية وتتميز عنها:

- التوزيع العشوائي لنقاط الشبكة.
- تعديل المعاملات في معادلة الفروق.

أ. تحليل النتائج العددية:

- أظهرت النتائج عند استخدام الشبكة العشوائية (SM-RG) في حالات (min, avg, max) أخطاءً أصغر من الأخطاء الناتجة عن طرائق الفروق المنتهية، والسبب يعود إلى أن التوزيع العشوائي للنقاط يقلل من تراكم الأخطاء الناتجة عن الانتظام في الشبكات المنتظمة.
- المرونة في تعديل معاملات معادلة الفروق يؤدي إلى التحكم في انتشار الخطأ.
- الطريقة غير فعالة من أجل المناطق غير البسيطة وغير المنتظمة.

8. الاستنتاجات والتوصيات

قمنا في هذه الدراسة بتحليل لخوارزمية SM-RG حيث تمكنا من إيجاد حلول عددية لمعادلة الحرارة التفاضلية مع شرط ابتدائي وشروط حدية من نوع ديرخليه. أظهرت النتائج أن خوارزمية SM-RG تُحقق دقة أعلى للحلول مقارنةً بالشبكات المنتظمة لمعادلة الحرارة وهذا يفتح المجال لتعدد المسارات البحثية لتوسيع نطاق هذا العمل، ومن أبرزها:

- أنظمة التحكم البيئي (التكييف والتبريد).
- النمذجة المالية والاقتصادية.
- ديناميكا الموائع الحسابية.
- النمذجة العددية للظواهر العلمية المعقدة.

كما يمكن تعميم خوارزمية SM-RG عن طريق دمجها مع طرائق عددية أخرى مما يفتح آفاق جديدة لتحسين الدقة والكفاءة في المحاكاة العددية.

المراجع:

- [1] Huang, S., *et al.* (2025). Partial differential equations meet deep neural networks: A survey. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems.p20
- [2] SOBCZYK, T. J. (2022). 1D and 2D finite-difference operators for periodic functions on arbitrary mesh. *Archives of Electrical Engineering*, 265-275.
- [3] CAUSON, D. M., & MINGHAM, C. G. (2010). Introductory finite difference methods for PDEs. Bookboon.p144
- [4] IVANOVIC, M., SVICEVIC, M., SAVOVIC, S. (2017). Numerical solution of Stefan problem with variable space grid method based on mixed finite element/finite difference approach. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 27(12), 2682-2695.
- [5] AGARWAL, R. P., O'REGAN, D. (2008). Ordinary and partial differential equations: with special functions, Fourier series, and boundary value problems. Springer Science & Business Media.p410
- [6] LEVEQUE, R. J. (2007). Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems. Society for Industrial and Applied Mathematics.p 431
- [7] MASTOI, S., *et al.* (2020). Numerical Solutions of Second order fractionalPDE's by using Finite-difference Method over randomly generated grids. *International Journal of Advanced Science and Technology*, 29, 373-381.
- [8] MASTOI, S., *et al.* (2022). Numerical solution for two-dimensional partial differential equations using SM's method. *Open Physics*, 20(1), 142-154.

[9] MASTOI, S., Othman, W. A. M. (2020). A Finite difference method using randomly generated grids as non-uniform meshes to solve the partial differential equation. *International Journal of Disaster Recovery and Business Continuity*, 11(1).

[10] MASTOI, S., et al. (2021). Finite difference algorithm on Finite random grids. *International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology*.

[11] MASTOI, S., et al. (2020). Numerical solution of Partial differential equations for nonlinear Local Fractional PDE's and Randomly generated grids. *International Journal of Disaster Recovery and Business Continuity*, 11(01), 2429-2436.

[12] مطيط، برلنت. (2015). الحلول العددية للمعادلات التفاضلية التكاملية والتفاضلية الجزئية ومسائل القيم الحدية. منشورات جامعة دمشق. ص620.