حركة وتحريك الآلة الخماسية المعدلة

إعداد: سراء عبدالله اشراف: أ.د. مصطفى حسن

جامعة حمص، كلية العلوم، قسم الرياضيات

الملخص

تعتبر الآلة الخماسية المعدّلة من أهم الآلات القضبانية في المجال التقني، نريد تزويد الآلة الخماسية بنواس، للاستفادة من الحرارة الناتجة عن حركة النواس من أجل تحويلها لاحقاً إلى طاقة كهربائية بواسطة مولد خاص لتصبح الآلة ذاتية الحركة. يهدف هذا العمل لإيجاد المعادلات التفاضلية لحركة الآلة الخماسية المعدّلة ودراسة حركة النواس النسبيّة والجريّة.

الكلمات المفتاحية: الآلة الخماسية المعدّلة، المعادلات التفاضلية، الطاقة الكهربائية، النواس، ذاتية الحركة.

Motion and dynamics of modified Five–bar mechanism

Dr .Mustafa Hasan   Sraa Abdullah

Homs University, Faculty of Science, Mathematics Department

Keyword: Modified Five-bar mechanism , Differential Equations,

Abstract

The modified five–bar mechanism is considered one of the most significant linkage–based systems in the technical field. This study proposes equipping the mechanism with a pendulum to harness the thermal energy generated by its motion and subsequently convert it into electrical energy using a dedicated generator, thereby enabling autonomous operation

The objective of this work is to derive the differential equations governing the motion of the modified five–bar mechanism and to analyze both the relative and translational dynamics of the .pendulum

Electrical energy, Pendulum, Self–Propelled.

المقدمة:

شهدت الآلات تطوراً كبيراً على مر العصور. بدأت الآلات البسيطة ثم تطورت إلى آلات أكثر تعقيداً. ومع تقدم التكنولوجيا، ظهرت آلات جديدة ومبتكرة، مثل الآلات الرقمية، والروبوتات، والذكاء الاصطناعي. ومن المتوقع أن يستمر تطور الآلات في المستقبل، مع ظهور تقنيات جديدة مثل الطباعة ثلاثية الأبعاد، والواقع الافتراضي والذكاء الاصطناعي. هذه التقنيات ستفتح آفاقاً جديدة لتطبيقات الآلات، مما سيؤثر بشكل كبير على حياتنا اليومية وفي مختلف الصناعات.

الآلة التقليدية: هي تصميم ناتج عن وصل جسمين صلبين أو أكثر بواسطة مفاصل حركيّة تتيح هذه المفاصل للأجسام قابلية الحركة، مع الأخذ بعين الاعتبار وجود جسم ثابت بين أجسام هذه الآلة، ويستخدم هذا التصميم لإنجاز عمل معين.

كمثال على هذه الآلات الشكل(1) آلة تقليدية (كماشة) مؤلفة من أجسام صلبة ومفاصل حركية.

الشكل(1) يمثل آلة تقليدية (كماشة)

الآلة المرنة: إن الآلات المرنة تنقل أو تعطي حركة، كما هو الحال في الآلات التقليدية، ولكن تختلف عن آلات التقليدية أنها تؤمن الحركة جزئيّاً أو كليّاً اعتماداً على مرونة أجزائها المرنة، وليس فقط اعتماداً على المفاصل الحركية التقليدية، يظهر الشكل(2) آلة بأجزاء مرنة مناظرة للكماشة، إنّ القوة المعطاة هي باتجاه المخرج، كما

في الآلة التقليدية، ولكن يوجد هنا احتفاظ ببعض الطاقة في الأجزاء المرنة، فلو كانت الآلة صلبة بالكامل لتحولت إلى تركيب فقط (غير فعال بمفرده).

الشكل (2) يمثل آلة بأجزاء مرنة

أول من قام بدراسة خصائص النواسات بدءاً من عام 1602 هو العالم الإيطالي جاليلو جاليلي (Galileo Galilei)، وفي عام 1620 كان العالم البريطاني فرانسيس بيكون (Francis Bacon) من الأوائل الذي اقترحوا استخدام النواس لقياس الجاذبية حيث أخذ نواس إلى أعلى قمة جبل لمعرفة اذا كانت الجاذبية تختلف مع الارتفاع[1]، وفي عام 1656 أصبحت الساعة التي اخترعها كريستيان هويجنز (Christiaa Huygens) وهي أول ساعة تعتمد على النواس وهي الساعة المستعملة في المنازل والمكاتب لمدة 270 عاماً وحققت دقة تبلغ حوالي ثانية واحدة سنوياً قبل أن تحل محلها ساعة الكوارتز في العالم، وتم اختراع النواس المقاوم لدرجة الحرارة[2] والنواس الزئبقي[3] عام 1721 لأنهم وجدوا أن السبب الرئيسي للخطأ في الساعة التي تستعمل النواس هو أن قضيب النواس يتمدد وينكمش مع التغيرات في درجة الحرارة المحيطة به مما يؤدي إلى تغيير فترة التأرجح، أما في عام 1737 أجرى عالم الرياضيات الفرنسي بيربوغوير (Pierre Bouguer) تجارب في جبال الأنديز في البيرو وفيها استخدم نواساً نحاسياً على شكل مخروط مزدوج معلّق بخيط حيث أرجح نفس النواس على ثلاثة ارتفاعات مختلفة عن مستوى سطح البحر إلى قمة مرتفعات البيرو ومقارنة ذلك مع جاذبية الأرض وتمكن من إجراء أول تقدير تقريبي لكثافة الأرض، وفي عام 1851 استخدم جان برنارد ليون فوكو (Jean Bernard Leon Foucautt) النواس لإثبات دوران الأرض وذلك من خلال

تعليق ثقل قدره 28 كغ بسلك طوله 67 م (220 قدماً) إلى قبة كنيسة بانتيون في باريس مشكلاً بذلك نواساً عملاقاً، وقد لاحظ أن مستوى التأرجح يتقدم 360 درجة في اتجاه عقارب الساعة كل 32.7 ساعة وكان هذا أول دليل على دوران الأرض[4].

2-هدف البحث:

إيجاد المعادلات التفاضلية التي تعيين حركة الآلة الخماسية المعدّلة ودراسة حركة النواس النسبية والجريّة وربط حركته بحركة الآلة.

3-مواد وطرق البحث:

سوف نستخدم نظرية البيان ونظرية الطاقة الحركية ونظرية العزم الحركي ونظرية كمية الحركة.

-الآلة الخماسية: هي آلة مكونة من خمسة أجسام مرتبطة بخمسة مفاصل دورانية.

-الآلة الخماسية المعدّلة: هي ذاتها الآلة الخماسية، ولكنها مزودة بنواس والهدف من هذه الزيادة هي الاستفادة من الطاقة الحرارية الناتجة عن حركة النواس وتحويلها بواسطة مولد خاص إلى طاقة كهربائية لتصبح الآلة ذاتية الحركة.

الدراسة التحريكية للآلة الخماسية المعدلة:

الشكل(3) يوضح لنا الآلة الخماسية المعدّلة والوسطاء الكافية لتعيينها والقوى الخارجية المؤثرة عليها حيث OXY جملة مقارنة ثابتة قاعدتها $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$. تمثل المستوي الشاقولي الذي تتحرك فيه الآلة حيث المحور الأفقي OX ينطبق على القضيب الثابت OD, ويكون المحور OY عمودياً عليه في O, وهذه الآلة تتألف من خمسة قضبان ونواس وهي: OD,OA,AB,PN,BC,CD حيث OD قضيب ثابت، لنفرض أن كتلته كل من القضبان OA,AB,BC,CD هي m_1,m_2,m_3,m_4 على الترتيب ومراكز كتلها على

الترتيب أيضاً هي c_1, c_2, c_3, c_4 وطول كل من قضبان على الترتيب r_2, r_3, r_4, r_5 وكتلة النواس هي m_5 ومركز كتلته c_5 وطوله L، أما طول القضيب OD فهو a، ويكون وسطاء هذه الآلة: $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \theta$ ولكن هذه الوسطاء ليست مستقلة، بل يوجد بينها ارتباطات لتوفر طريقاً مغلقاً واحداً $[5]$هو:

$$q_1 + q_2 - q_3 - q_4 + q_5 = 0 \quad ...(1')$$

بالإسقاط الشكل(3) على المحاور الاحداثية نجد:

$$\begin{aligned}
&r_2 \cos q_1 + r_3 \cos(q_1 + q_2) + L\cos(q_1 + q_2 + \theta) + r_4 c\,os(q_1 + q_2 + q_5) \\
&+ r_5 \cos q_3 - a = 0 \\
&r_2 \sin q_1 + r_3 \sin(q_1 + q_2) + L\sin(q_1 + q_2 + \theta) + r_4 \sin(q_1 + q_2 + q_5) \\
&+ r_5 \sin q_3 = 0 \quad ...(2')
\end{aligned}$$

نزيل الوسيط q_3 بتربيع العلاقة$(2')$ وبالجمع ومنه نجد:

$$q_5 = f_1(q_1, q_2, \theta)$$

من العلاقة $(2')$ لدينا:

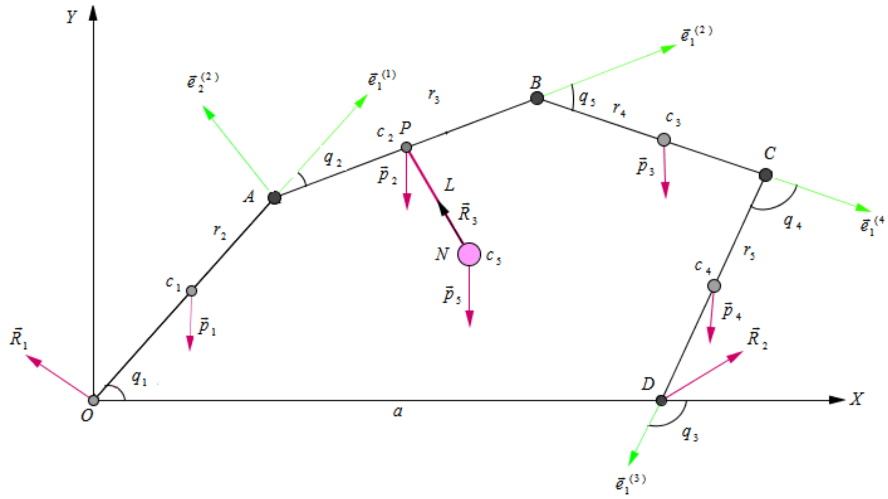
$$q_3 = \frac{1}{r_5} \arctan \frac{r_2 \sin q_1 + r_3 \sin(q_1 + q_2) + L\sin(q_1 + q_2 + \theta) + r_4 \sin(q_1 + q_2 + q_5)}{r_2 \cos q_1 + r_3 \cos(q_1 + q_2) + L\cos(q_1 + q_2 + \theta) + r_4 \cos(q_1 + q_2 + q_5) - a}$$

$$\Rightarrow q_3 = f_2(q_1, q_2, \theta)$$

من$(1')$ لدينا

$$q_4 = f_3(q_1, q_2)$$

$\Leftarrow$إذاً الآلة تتعين حركتها بالوسطاء q_1, q_2, θ



الشكل(3) يمثل آلة خماسية معدلة

لإيجاد المعادلات التفاضلية التي تعين حركة الآلة الخماسية المعدّلة: هذه الآلة تتعين بمعرفة ثلاثة وسطاء مستقلة أي تملك ثلاث درجات حريّة أي نحتاج لإيجاد ثلاث معادلات تفاضلية.

لإيجاد معادلة تفاضلية الأولى نطبق نظرية الطاقة الحركية وذلك بالشكل:

$$T_0\left(s\right)=U+h \ ...(1)$$

حيث $T_0\left(s\right)$ الطاقة الحركية للمجموعة المادية المكونة للآلة الخماسية المعدّلة أما U فهي مجموع أعمال القوى الخارجية أما h فهو ثابت يمكن حسابه من شروط البدء: إن الطاقة الحركية للآلة الخماسية المعدّلة تحسب بالشكل:

$$T_0\left(s\right)=T_0\left(oA\right)+T_0\left(AB\right)+T_0\left(PN\right)+T_0\left(BC\right)+T_0\left(CD\right)...(2)$$

القضيب OA الذي كتلته m_1 وطوله r_2 ومركز كتله c_1 حركته دورانية حول المحور الأفقي العمودي على مستوي الحركة في O أي حول محور OZ بالزاوية الدوران q_1 إن طاقته الحركية تعطى بالشكل التالي:

$$T_0\left(oA\right)=\frac{1}{2}I_{0z}.\dot{q}_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{m_1.r_2^2}{3}\right)\dot{q}_1^2\Rightarrow T_0\left(oA\right)=\frac{1}{6}m_1.r_2^2.\dot{q}_1^2...(3)$$

أما القضيب AB الذي كتلته m_2 وطوله r_3 فإن حركته عامة في المستويOXY ولإيجاد طاقته الحركية نطبق نظرية كونيغ الثانية:

$$T_0\left(AB\right)=T_{C_2}\left(AB\right)+T_0\left(c_2\right)$$

حيث c_2 مركز كتل القضيب AB، إن حركة AB حول c_2 هي حركة دورانية بزاوية الدوران q_2 حول المحور المار من c_2 والعمودي على مستوي الحركة وبالتالي فأن:

$$T_{C_2}\left(AB\right)=\frac{1}{2}I_{C_2z}\dot{q}_2^2=\frac{1}{2}\left(\frac{m_2.r_3^2}{12}\right)\dot{q}_2^2$$

$$\Rightarrow T_{c_2}\left(AB\right)=\frac{1}{24}m_2.r_3^2.\dot{q}_2^2$$

أما الطاقة الحركية لمركز الكتل c_2 بالنسبة لـO فهي:

$$T_0\left(c_2\right)=\frac{1}{2}m_2.v^2\left(c_2\right)$$

ولحساب $\vec{V}\left(c_2\right)$ نوجد متجه الموضع $\overrightarrow{OC_2}$ بالشكل:

$$\overrightarrow{OC_2}=\overrightarrow{oA}+\overrightarrow{AC_2}=$$

$$\left[r_2\cos q_1+\frac{1}{2}r_3\cos\left(q_1+q_2\right)\right]\vec{i}+\left[r_2\sin q_1+\frac{1}{2}r_3\sin\left(q_1+q_2\right)\right]\vec{j}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{v\ \left(c_2\right)}=\left[-r_2\dot{q}_1\sin q_1-\frac{1}{2}r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\sin\left(q_1+q_2\right)\right]\vec{i}$$

$$+\left[r_2\dot{q}_1\cos q_1+\frac{1}{2}r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos\left(q_1+q_2\right)\right]\vec{j}$$

$$\Rightarrow v^2\left(c_2\right)=r_2^2\dot{q}_1^2+\frac{1}{4}r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)^2+r_2r_3\dot{q}_1\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos q_2$$

وبالتالي نجد أن $T_0\left(c_2\right)$ بالشكل:

$$T_0\left(C_2\right)=\frac{1}{2}m_2\left[r_2^2\dot{q}_1^2+\frac{1}{4}r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)^2+r_2r_3\dot{q}_1\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos q_2\right]$$

وبالتالي الطاقة الحركية للقضيب AB هي:

$$T_0\left(AB\right)=\frac{1}{24}m_2r_3^2\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}m_2\left[r_2^2\dot{q}_1^2+\frac{1}{4}r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)^2+r_2r_3\dot{q}_1\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos q_2\right]...(4)$$

لحساب الطاقة الحركية للنواس الذي كتلته m_5 وطوله L يتحرك حركة مستوية (دوراني وانسحابية) حيث زاوية دورانه θ نطبق نظرية كوينغ الثانية:

$$T_0\left(PN\right)=T_{c_5}\left(PN\right)+T_0\left(c_5\right)$$

$$T_{c_5}\left(PN\right)=\frac{1}{2}I_{c_5z}\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_5L^2\right)\dot{\theta}^2=\frac{1}{3}m_5L^2\dot{\theta}^2$$

$$T_0\left(c_5\right)=\frac{1}{2}m_5v^2(c_5)$$

حيث m_5 هي كتلة النواس PN وهي مجموع كتلة نقاط النواس وهي ثابتة، ومركز كتله c_5.

$$\overrightarrow{oc_5} = \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{oc_5} = \left[r_2 \cos q_1 + \frac{1}{2} r_3 \cos\left(q_1 + q_2\right) + L\cos\left(q_1 + q_2 + \theta\right)\right]\vec{i} +$$

$$\left[r_2 \sin q_1 + \frac{1}{2} r_3 \sin\left(q_1 + q_2\right) + L\sin\left(q_1 + q_2 + \theta\right)\right]\vec{j}$$

$$\vec{v}\left(c_5\right) = \frac{d\overrightarrow{oc_5}}{dt} =$$

$$\left[-r_2\dot{q}_1 \sin q_1 - \frac{1}{2} r_3\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)\sin\left(q_1 + q_2\right) - L(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{\theta})\sin\left(q_1 + q_2 + \theta\right)\right]\vec{i}$$

$$+\left[r_2\, \dot{q}_1 cos\, q_1 + \frac{1}{2} r_3\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)cos\left(q_1 + q_2\right) + L(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{\theta})cos\left(q_1 + q_2 + \theta\right)\right]\vec{j}$$

$$\Rightarrow v^2(c_5) = r_2^2\dot{q}_1^{\,2} + \frac{1}{4} r_3^2\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 + L^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} r_2 r_3 \dot{q}_1\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)\cos q_2$$

$$+\frac{1}{2} r_3 L\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{\theta})\cos\theta + r_2 L\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{\theta})cos\left(q_2 + \theta\right) \Rightarrow$$

$$T_0\left(PN\right) = \frac{1}{2} m_5 v^2(c_5) + \frac{1}{3} m_5 L^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} m_5 (r_2^2\dot{q}_1^{\,2} + \frac{1}{4} r_3^2\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)^2 + L^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} r_2 r_3 \dot{q}_1\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)\cos q_2$$

$$+\frac{1}{2} r_3 L\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{\theta})\cos\theta + r_2 L\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{\theta})cos\left(q_2 + \theta\right)) + \frac{1}{3} m_5 L^2\dot{\theta}^2$$

$\ldots(5)$

حساب الطاقة الحركية للقضيب BC:

إن القضيب BC الذي كتلته m_3 وطوله r_4 يتحرك حركة عامة في المستوي OXY وبالتالي لحساب الطاقة الحركية نطبق نظرية كونيغ الثانية بالشكل:

$$T_0\left(BC\right) = T_{C_3}\left(BC\right) + T_0\left(C_3\right)$$

إن القضيبBC يتحرك حركة دورانية آنية حول المحور المار من مركز كتلته C_3 والعمودي على مستوي الحركة أي حول المحور C_3Z بزاوية الدوران q_5 وبالتالي فإن طاقته الحركية حول C_3 هي:

$$T_{C_3}\left(BC\right)=\frac{1}{2}I_{C_3Z}\dot{q}_5^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m_3r_4^2\right)q_5^2=\frac{1}{24}m_3r_4^2\dot{q}_5^2$$

أمّا الطاقة الحركية ل C_3 يمكن حسابها بالشكل:

$$T_0\left(c_3\right)=\frac{1}{2}m_3v^2\left(c_3\right)$$

$$\overrightarrow{OC_3}=\left[r_2\cos q_1+r_3\cos\left(q_1+q_2\right)+\frac{1}{2}r_4\cos\left(q_1+q_2+q_5\right)\right]\vec{i}$$
$$+\left[r_2\sin q_1+r_3\sin\left(q_1+q_2\right)+\frac{1}{2}r_4\sin\left(q_1+q_2+q_5\right)\right]\vec{j}$$
$$\vec{V}\left(c_3\right)=\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC_3}=$$
$$\left[-r_2\dot{q}_1\sin q_1-r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\sin\left(q_1+q_2\right)-\frac{1}{2}r_4\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5\right)\sin\left(q_1+q_2+q_5\right)\right]\vec{i}+$$
$$\left[r_2\dot{q}_1\cos q_1+r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos\left(q_1+q_2\right)+\frac{1}{2}r_4\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5\right)\cos\left(q_1+q_2+q_5\right)\right]\vec{j}$$

وبالتالي نجد أن القضيب BC طاقته الحركية هي:

$$T_0\left(BC\right)=\frac{1}{24}m_3r_4^2\dot{q}_5^2+\frac{1}{2}m_3r_2^2\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}m_3r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)^2+\frac{1}{8}m_3r_4^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}m_3r_3r_2\dot{q}_1\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos q_2+\frac{1}{4}m_3r_4r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5\right)\cos q_5$$
$$+\frac{1}{4}m_3r_2r_4\dot{q}_1\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5\right)\cos\left(q_2+q_5\right)...(6)$$

لنحسب الأن الطاقة الحركية للقضيب CD الذي كتلته m_4 وطوله r_5 ومركز كتله c_4 الذي حركته دورانية حول المحور الأفقي العمودي على مستوي الحركة بزاوية الدوران q_3 فأن طاقته الحركية:

$$T_0\left(CD\right)=\frac{1}{2}I_{CZ}\dot{q}_3^2=\frac{1}{2}\left(\frac{m_4r_5^2}{3}\right)\dot{q}_3^2=\frac{1}{6}m_4r_5^2\dot{q}_3^2...(7)$$

نعوض العلاقات (3)، (4)، (5)، (6)، (7)، في العلاقة (2) نحصل على الطاقة الحركية للآلة الخماسية المعدلة:

$$\begin{pmatrix} T_0(S)=\frac{1}{6}\left[m_1r_2^2\dot{q}_1^2+m_4r_5^2\dot{q}_3^2\right]+ \\ \frac{1}{24}\left(m_2r_3^2\dot{q}_2{}^2+m_3r_4^2\dot{q}_5^2\right) \\ +\frac{1}{2}(m_2r_2^2\dot{q}_1^2+m_2r_3r_2\dot{q}_1\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos\left(q_2\right)+m_5r_2^2\dot{q}_1{}^2+m_5L^2(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta})^2+ \\ r_2Lm_5\dot{q}_1\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta}\right)\cos\left(q_2+\theta\right)+m_3r_2^2\dot{q}_1^2+m_3r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)^2+m_3r_3r_2\dot{q}_1\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos\left(q_2\right)) \\ +\frac{1}{8}(m_2r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)^2+m_3r_4^2(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5)^2+m_5r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)^2+) \\ +\frac{1}{3}m_5L^2\dot{\theta}^2 \\ +\frac{1}{4}(m_5r_3r_2\dot{q}_1\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos\left(q_2\right)+r_3Lm_5\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta}\right)\cos\left(\theta\right)+ \\ m_3r_3r_4\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5)\cos\left(q_5\right)+m_3r_2r_4\dot{q}_1(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5)\cos\left(q_2+q_5\right)) \end{pmatrix} \quad ...(8)$$

إن القوى الخارجية المؤثرة على المجموعة المادية المكونة للآلة الخماسية المعدلة وهي قوى الثقل $\vec{P_1},\vec{P_2},\vec{P_3},\vec{P_4}$ للقضبان OA,AB,BC,CD وقوة ثقل نواس $\vec{P}_5$

على الترتيب بالإضافة إلى قوة رد فعل المفصل الثابت O وقوة رد فعل في المفصل الثابت D وقوة شد الخيط $\vec{R}3$ لنحسب أعمال هذه القوى:

القوة $\vec{P_1}$ هي قوة ثقل القضيب OA نقطة تأثيرها c_1 وهي قوة شاقولية نحو الأسفل وتعطى $\vec{P_1}=-m_1\vec{gj}$ وعملها يساوي:

$$U\left(\vec{P_1}\right)=\int\vec{P_1}d\overrightarrow{oc_1}=\int-m_1\vec{gj}d\left(\frac{1}{2}r_2\cos q_1\vec{i}+\frac{1}{2}r_2\sin q_1\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow U\left(\vec{P_1}\right)=-\frac{1}{2}m_1gr_2\sin q_1$$

القوة $\vec{P_2}$ قوة ثقل القضيب AB نقطة تأثيرها C_2 وهي قوة شاقولية تتجه نحو الأسفل وتكتب $\vec{P_2}=-m_2\vec{gj}$ وعملها يساوي:

$$U\left(\vec{P_2}\right)=\int\vec{P_2}d\overrightarrow{oc_2}$$

$$\Rightarrow U\left(\overrightarrow{P_2}\right)=-m_2 g\left(r_2\sin q_1+\frac{1}{2}r_3\sin\left(q_1+q_2\right)\right)$$

القوة $\overrightarrow{P_3}$ قوة ثقل القضيب BC نقطة تأثيرها C_3 وهي قوة شاقولية تتجه نحو الأسفل نحسب عملها:

$$\overrightarrow{P_3}=-m_3 g\overrightarrow{j}$$
$$\Rightarrow U\left(\overrightarrow{P_3}\right)=-m_3 g\left[r_2\sin q_1+r_3\sin(q_1+q_2)+\frac{1}{2}r_4\sin(q_1+q_2+q_5)\right]$$

القوة $\overrightarrow{P_4}$ قوة ثقل القضيب CD وهي قوة شاقولية نحو الأسفل وتكتب:

$$\overrightarrow{P_4}=-m_4 g\overrightarrow{j}$$
$$\Rightarrow U\left(\overrightarrow{P_4}\right)=\int\overrightarrow{P_4}d\overrightarrow{oc_4}=-\frac{1}{2}m_4 g r_5\sin q_3$$

أما $\overrightarrow{p_5}$ فهي قوة ثقل النواس PN :

$$U\left(\overrightarrow{p_5}\right)=-m_5 g\left(r_2\sin q_1+\frac{1}{2}r_3\sin\left(q_2+q_1\right)+L\sin\left(q_2+q_1+\theta\right)\right)$$

القوى $\overrightarrow{R_1}$ هي قوى رد فعل في المفصل الثابت O والتي عملها معدوم لأن نقطة تأثيرها ساكنة وبالتالي الانتقال الذي تسببه معدوم وبالمثل قوة $\overrightarrow{R_2}$ قوى رد فعل في المفصل الثابت D عملها معدوم لنفس السبب وقوة الشد الخيط $\vec{R}_3$.

مما تقدم نجد أن مجموع أعمال القوى الخارجية المؤثرة بالمجموعة المادية:

$$\begin{pmatrix} U=-\frac{1}{2}m_1 g r_2\sin q_1-m_2 g\left(r_2\sin q_1+\frac{1}{2}r_3\sin\left(q_1+q_2\right)\right) \\ -m_3 g\left(r_2\sin q_1+r_3\sin\left(q_1+q_2\right)+\frac{1}{2}r_4\sin\left(q_1+q_2+q_5\right)-\frac{1}{2}m_4 g r_5\sin q_3\right) \\ -m_5 g\left(r_2\sin q_1+\frac{1}{2}r_3\sin\left(q_1+q_2\right)+L\sin\left(q_1+q_2+\theta\right)\right)+\vec{R}_3 \end{pmatrix}\ldots(9)$$

نعوض(8) و(9) في (1) نحصل على المعادلة التفاضلية الأولى للحركة بالشكل:

$$\frac{1}{6}\left[m_1r_2^2\dot{q}_1^2+m_4r_5^2\dot{q}_3^2\right]+\frac{1}{24}\left(m_2r_3^2\dot{q}_2{}^2+m_3r_4^2\dot{q}_5^2\right)+\frac{1}{2}(m_2r_2^2\dot{q}_1^2+m_2r_3r_2\dot{q}_1\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos\left(q_2\right)$$
$$+m_5r_2^2\dot{q}_1{}^2+m_5L^2(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta})^2+r_2Lm_5\dot{q}_1\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta}\right)\cos\left(q_2+\theta\right)+m_3r_2^2\dot{q}_1^2+m_3r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)^2$$
$$+m_3r_3r_2\dot{q}_1\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos\left(q_2\right))+\frac{1}{8}(m_2r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)^2+m_3r_4^2(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5)^2+m_5r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)^2)+\frac{1}{3}m_5L^2\dot{\theta}^2+$$
$$\frac{1}{4}(m_5r_3r_2\dot{q}_1\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos\left(q_2\right)+r_3Lm_5\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta}\right)\cos\left(\theta\right)+$$
$$m_3r_3r_4\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5)\cos\left(q_5\right)+m_3r_2r_4\dot{q}_1(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5)\cos\left(q_2+q_5\right))=$$
$$-\frac{1}{2}m_1gr_2\sin q_1-m_2g\left(r_2\sin q_1+\frac{1}{2}r_3\sin\left(q_1+q_2\right)\right)-m_3g$$
$$\left(r_2\sin q_1+r_3\sin\left(q_1+q_2\right)+\frac{1}{2}r_4\sin\left(q_1+q_2+q_5\right)-\frac{1}{2}m_4gr_5\sin q_3\right)$$
$$-m_5g\left(r_2\sin q_1+\frac{1}{2}r_3\sin\left(q_1+q_2\right)+L\sin\left(q_1+q_2+\theta\right)\right)+\vec{R}_3+h \qquad ...(*)$$

لإيجاد المعادلة التفاضلية الثانية نطبق نظرية العزم الحركي بالنسبة ل O وذلك كما يلي:

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_o}\left(s\right)=\sum_{i=1}^{5}\overrightarrow{M_0om}\left(\overrightarrow{p_i}\right)+\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{M_0om}\left(\overrightarrow{R_i}\right)...(10)$$

تحسب العزم الحركي للقضيب OA الذي حركته دورانية:

$$\overrightarrow{\sigma_0}\left(oA\right)=I_{Oz}\dot{q}_1\,\vec{k}=\frac{1}{3}m_1r_2^2\dot{q}_1\,\vec{k}$$

أما العزم الحركي للقضيب AB الذي حركته عامة في المستوي oxy يحسب من نظرية كونيغ الأولى:

$$\overrightarrow{\sigma_0}\left(AB\right)=\overrightarrow{\sigma c_2}\left(AB\right)+\overrightarrow{\sigma_0}\left(C_2\right)=$$
$$I_{c_2z}\dot{q}_2\vec{k}+\overrightarrow{oc_2}\wedge m_2\vec{v}\left(c_2\right)$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{\sigma_0}\left(AB\right)=\left[\frac{1}{12}m_2r_3^2\dot{q}_2+m_2r_2^2\dot{q}_1+\frac{1}{4}m_2r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)+\frac{1}{2}m_2r_3r_2\left(2\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos q_2\right]$$

أما العزم الحركي للنواس PN الذي حركته عامة في المستوي oxy:

$$\overrightarrow{\sigma_0}(PN)=\overrightarrow{\sigma c_5}(PN)+\overrightarrow{\sigma_0}(C_5)=$$
$$I_{c_5z}\dot{\theta}\vec{k}+\overrightarrow{oc_5}\wedge m_5\vec{v}(c_5)=\frac{2}{3}m_5\dot{\theta}L^2\vec{k}+\overrightarrow{oc_5}\wedge m_5\vec{v}(c_5)$$
$$\overrightarrow{oc_5}\wedge m_5\vec{v}(c_5)=\begin{bmatrix} r_2^2m_5\dot{q}_1+\frac{r_3^2}{4}m_5\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)+m_5L^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta}\right)+\frac{1}{2}r_2r_3m_5(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos q_2+ \\ Lm_5r_2\left(2\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta}\right)\cos(q_2+\theta)+\frac{1}{2}m_5Lr_3(2\dot{q}_1+2\dot{q}_2+\dot{\theta})\cos(\theta) \end{bmatrix}\vec{k}$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{\sigma_0}(PN)=\begin{bmatrix} \frac{2}{3}m_5\dot{\theta}L^2+r_2^2m_5\dot{q}_1+\frac{r_3^2}{4}m_5\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)+m_5L^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta}\right)+\frac{1}{2}r_2r_3m_5(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos q_2+ \\ Lm_5r_2\left(2\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta}\right)\cos(q_2+\theta)+\frac{1}{2}m_5Lr_3(2\dot{q}_1+2\dot{q}_2+\dot{\theta})\cos(\theta) \end{bmatrix}\vec{k}$$

أمّا العزم الحركي للقضيب BC حركته عامة في المستوي oxy:

$$\overrightarrow{\sigma_0}(BC)=\overrightarrow{\sigma_{C_3}}(BC)+\overrightarrow{\sigma_0}(C_3)=$$
$$I_{c_3z}\dot{q}_5\vec{k}+\overrightarrow{oc_3}\wedge m_3\vec{v}(c_3)$$
$$=\left[\frac{1}{12}m_3r_4^2\dot{q}_5-m_3r_2^2\dot{q}_1-m_3r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}m_3r_4^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5\right)-m_3\left(1+\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\left(r_2r_3\cos q_2-\frac{1}{2}r_2r_4\cos\left(q_5+q_2\right)-\frac{1}{2}r_3r_4\cos q_5\right)\right]\vec{k}$$

أمّا العزم الحركة للقضيب CD حركته دورانية:

$$\overrightarrow{\sigma_0}(CD)=\frac{1}{3}m_4r_5^2\dot{q}_3\vec{k}$$

لنحسب الأن عزوم القوى الخارجية المؤثرة في هذه الآلة وهي:

عزم القوة $\overrightarrow{p_1}$ قوة ثقل القضيب OA وتحسب بالشكل:

$$\overrightarrow{Mo_0m}\left(\overrightarrow{p_1}\right)=\overrightarrow{oc_1}\wedge\overrightarrow{p_1}=-\frac{1}{2}m_1r_2g\cos q_1\vec{k}$$

وكذلك $\overrightarrow{p_2}$ قوة ثقل القضيب AB عزمها:

$$\overrightarrow{Mo_0m}\left(\overrightarrow{p_2}\right)=\overrightarrow{oc_2}\wedge\overrightarrow{p_2}$$
$$=-m_2g\left(r_2cos\,q_1+\frac{1}{2}r_3cos\left(q_1+q_2\right)\right)\vec{k}$$

$\overrightarrow{p_5}$ قوة ثقل النواس PN وعزمها:

$$\overrightarrow{Mo_0m}\left(\overrightarrow{p_5}\right)=\overrightarrow{oc_5}\wedge\overrightarrow{p_5}$$
$$-m_5g\left(r_2cos\,q_1+\frac{1}{2}r_3\cos\left(q_2+q_1\right)+Lcos\left(q_2+q_1+\theta\right)\right)\vec{k}$$

قوة ثقل $\overrightarrow{p_3}$ للقضيب BC وعزمها:

$$\overrightarrow{Mo_0m}\left(\overrightarrow{p_3}\right)=\overrightarrow{oc_3}\wedge\overrightarrow{p_3}=$$
$$-m_3g\left(r_2cos\,q_1+r_3cos\left(q_1+q_2\right)+\frac{1}{2}r_4cos\left(q_1+q_2+q_5\right)\right)\vec{k}$$

قوة ثقل $\overrightarrow{p_4}$ للقضيب CD وعزمها:

$$\overrightarrow{Mo_0m}\left(\overrightarrow{p_4}\right)=\overrightarrow{oc_4}\wedge\overrightarrow{p_4}=$$
$$-m_4g\left(a+\frac{1}{2}r_5\cos q_3\right)\vec{k}$$

وبالتالي العزم الحركي للقضبان والنواس هو:

$$J_5=\vec{\sigma}_0(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{12}m_3r_4^2\dot{q}_5+\frac{1}{4}m_2r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)+\frac{1}{2}m_2r_3r_2\left(2\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos q_2-m_3r_2^2\dot{q}_1\\ -m_3r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)+r_2^2m_5\dot{q}_1+\frac{1}{3}m_4r_5^2\dot{q}_3+\frac{r_3^2}{4}m_5\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)+m_5L^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta}\right)\\ +\frac{1}{2}r_2r_3m_5(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos q_2+\frac{2}{3}m_5\dot{\theta}L^2+\frac{1}{3}m_1r_2^2\dot{q}_1+\frac{1}{12}m_2r_3^2\dot{q}_2\\ +m_2r_2^2\dot{q}_1+\frac{1}{4}m_3r_4^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5\right)+Lm_5r_2\left(2\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta}\right)\cos(q_2+\theta)\\ +\frac{1}{2}m_5Lr_3(2\dot{q}_1+2\dot{q}_2+\dot{\theta})\cos\left(\theta\right)-m_3\left(1+\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\\ \left(r_2r_3\cos q_2-\frac{1}{2}r_2r_4\cos\left(q_5+q_2\right)-\frac{1}{2}r_3r_4\cos q_5\right)\end{bmatrix}\vec{k}$$

ولنبدأ بحساب عزوم ردود الأفعال: $\overrightarrow{R_1}$ هي قوة رد فعل في مفصل ثابت O وعزمها يساوي الصفر وذلك لأن نقطة تأثير هذه القوة تنطبق على مركز العزم O أي أن:

$$\overrightarrow{Mo_0m}\left(\overrightarrow{R_1}\right)=0$$

أما قوة رد فعل في مفصل ثابت D وعزمها يساوي :

$$\overrightarrow{Mo_0m}\left(\overrightarrow{R_2}\right)=\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{R_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & 0 & 0\\ R_{2x} & R_{2y} & 0\end{vmatrix}=aR_{2y}\vec{k}$$

حيث $a=OD$

$\overrightarrow{R}_3$ قوة شد خيط النواس عزمها يساوي

$$\overrightarrow{Mo_0m}\left(\vec{\tau}\right)=\overrightarrow{oc_5}\wedge\overrightarrow{R}_3=$$

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ r_2\cos q_1+\frac{1}{2}r_3\cos(q_1+q_2)+L\cos(q_1+q_2+\theta) & r_2\sin q_1+\frac{1}{2}r_3\sin(q_1+q_2)+L\sin(q_1+q_2+\theta) & 0\\ \tau_{3x} & \tau_{3y} & 0\end{vmatrix}$$

$$=[[r_2\cos q_1+\frac{1}{2}r_3\cos(q_1+q_2)+L\cos(q_1+q_2+\theta)]\tau_{3y}-[r_2\sin q_1+\frac{1}{2}r_3\sin(q_1+q_2)+L\sin(q_1+q_2+\theta)]\tau_{3x}]\vec{k}$$

و بالتالي أصبح العزم الحاصل للقوى الخارجية تعطى بالعلاقة:

$$J_6=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}m_1r_2g\cos q_1-m_2g\left(r_2\cos q_1+\frac{1}{2}r_3\cos\left(q_1+q_2\right)\right) \\ -m_5g\left(r_2\cos q_1+\frac{1}{2}r_3\cos\left(q_2+q_1\right)+L\cos\left(q_2+q_1+\theta\right)\right) \\ -m_3g\left(r_2\cos q_1+r_3\cos\left(q_1+q_2\right)+\frac{1}{2}r_4\cos\left(q_1+q_2+q_5\right)\right) \\ +aR_{2y}-m_4g\left(a+\frac{1}{2}r_5\cos q_5\right) \\ +[r_2\cos q_1+\frac{1}{2}r_3\cos(q_1+q_2)+L\cos(q_1+q_2+\theta)]\tau_{3y} \\ -[r_2\sin q_1+\frac{1}{2}r_3\sin(q_1+q_2)+L\sin(q_1+q_2+\theta)]\tau_{3x} \end{bmatrix}\vec{k}$$

وبالتعويض في نظرية العزم الحركي وبالإسقاط على المحور oz نجد:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \frac{1}{12}m_3r_4^2\dot{q}_5+\frac{1}{4}m_2r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)+\frac{1}{2}m_2r_3r_2\left(2\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos q_2-m_3r_2^2\dot{q}_1 \\ -m_3r_3^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)+r_2^2m_5\dot{q}_1+\frac{1}{3}m_4r_5^2\dot{q}_3+\frac{r_3^2}{4}m_5\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)+m_5L^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta}\right) \\ +\frac{1}{2}r_2r_3m_5(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos q_2+\frac{2}{3}m_5\dot{\theta}L^2+\frac{1}{3}m_1r_2^2\dot{q}_1+\frac{1}{12}m_2r_3^2\dot{q}_2 \\ +m_2r_2^2\dot{q}_1+\frac{1}{4}m_3r_4^2\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5\right)+Lm_5r_2\left(2\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta}\right)\cos(q_2+\theta) \\ +\frac{1}{2}m_5Lr_3(2\dot{q}_1+2\dot{q}_2+\dot{\theta})\cos\left(\theta\right)-m_3\left(1+\dot{q}_1+\dot{q}_2\right) \\ \left(r_2r_3\cos q_2-\frac{1}{2}r_2r_4\cos\left(q_5+q_2\right)-\frac{1}{2}r_3r_4\cos q_5\right) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}m_1r_2gcos\,q_1-m_2g\left(r_2cos\,q_1+\frac{1}{2}r_3cos\left(q_1+q_2\right)\right) \\ -m_5g\left(r_2cos\,q_1+\frac{1}{2}r_3\cos\left(q_2+q_1\right)+Lcos\left(q_2+q_1+\theta\right)\right) \\ -m_3g\left(r_2cos\,q_1+r_3cos\left(q_1+q_2\right)+\frac{1}{2}r_4cos\left(q_1+q_2+q_5\right)\right) \\ +aR_{2y}-m_4g\left(a+\frac{1}{2}r_5cos\,q_5\right) \\ +[r_2\cos q_1+\frac{1}{2}r_3\cos(q_1+q_2)+L\cos(q_1+q_2+\theta)]\tau_{3y} \\ -[r_2\sin q_1+\frac{1}{2}r_3\sin(q_1+q_2)+L\sin(q_1+q_2+\theta)]\tau_{3x} \end{bmatrix}\vec{k}...(**)$$

وهي معادلة تفاضلية الثانية للحركة.

لإيجاد معادلة التفاضلية الثالثة نطبق نظرية كمية الحركة:

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{p}\left(s\right)=\sum_{i=1}^{5}\overrightarrow{p_i}+\sum_{i=1}^{3}R_i...(11)$$

إن كمية الحركة للقضيب OA تعطى بالعلاقة:

$$\overrightarrow{p}\left(oA\right)=m_1\overrightarrow{V}\left(c_1\right)=m_1\left[-\frac{1}{2}r_2\dot{q}_1\,\sin q_1\vec{i}+\frac{1}{2}r_2\dot{q}_1cos\,q_1\,\vec{j}\right]$$

إن كمية الحركة للقضيب AB تعطى بالعلاقة:

$$\overrightarrow{p}\left(AB\right)=m_2\overrightarrow{V}\left(c_2\right)=m_2\left[-r_2\dot{q}_1\,\sin q_1-\frac{1}{2}r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\sin\left(q_1+q_2\right)\right]\vec{i}$$
$$+\left[r_2\dot{q}_1cos\,q_1+\frac{1}{2}r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)cos\left(q_1+q_2\right)\right]\vec{j}$$

إن كمية الحركة للقضيبBC تعطى بالعلاقة:

$$\vec{p}\left(Bc\right)=m_3\vec{V}\left(c_3\right)=$$

$$m_3\left[-r_2\dot{q}_1\sin q_1-r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\sin\left(q_1+q_2\right)-\frac{1}{2}r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5\right)\sin\left(q_1+q_2+q_5\right)\right]\vec{i}$$

$$+m_3\left[r_2\dot{q}_1\cos q_1+r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos\left(q_1+q_2\right)+\frac{1}{2}r_4\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5\right)\cos\left(q_1+q_2+q_5\right)\right]\vec{j}$$

إن كمية الحركة للقضيب CD تعطى بالعلاقة:

$$p\left(\overrightarrow{CD}\right)=m_4\vec{V}\left(c_4\right)=m_4\left[(-\frac{1}{2}r_5\dot{q}_3\sin q_3)\vec{i}+(\frac{1}{2}r_5\dot{q}_3\cos q_3)\vec{j}\right]$$

أما كمية الحركة للنواسPN :

$$\vec{P}(PN)=m_5\vec{v}\left(c_5\right)=$$

$$-m_5\left[-r_2\dot{q}_1\sin q_1-\frac{1}{2}r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\sin\left(q_1+q_2\right)-L(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta})\sin\left(q_1+q_2+\theta\right)\right]\vec{i}$$

$$+\left[r_2\,\dot{q}_1\cos q_1+\frac{1}{2}r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\cos\left(q_1+q_2\right)+L(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta})\cos\left(q_1+q_2+\theta\right)\right]\vec{j}$$

نجمع كميات حركة سابقة نحصل على كمية حركة هذه الآلة بتعويض في نظرية كمية الحركة والأسقاط على المحورOX نحصل:

$$-\left(\frac{1}{2}m_1+m_2+m_3\right)r_2\dot{q}_1\sin q_1-\left(\frac{1}{2}m_2+m_3\right)r_3\left(\dot{q}_2+\dot{q}_1\right)\sin\left(q_1+q_2\right)$$

$$-\frac{1}{2}r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_5\right)\sin\left(q_1+q_2+q_5\right)-\frac{1}{2}m_4r_5\dot{q}_3\sin q_3$$

$$-m_5(-r_2\dot{q}_1\sin q_1-\frac{1}{2}r_3\left(\dot{q}_1+\dot{q}_2\right)\sin\left(q_2+q_1\right)-L(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta})\sin(q_1+q_2+\theta)=\sum_{i=1}^{3}R_{ix}$$

...(***)

إن معادلات(*) و(**) و(***) تمثل المعادلات التفاضلية للحركة.

-التحليل الدقيق للآلة بشكل كامل:

لنأخذ الجملة $O_0\underline{e}^0$ كجملة مطلقة في الجسم الصفري، ولنرمز لها اختصاراً بالرمز $O\underline{e}$ يتعين موضع أي جسم بالنسبة لها بمساعدة نصف القطر المتجهي R_i لنقطة مثبتة فيه C_i ولجملة متعامدة ونظامية فيه $\underline{e}^i$ حيث: $(i=1,2,...n)$

لدينا درجة حرية واحدة للحركة النسبية في أي مفصل، ولهذا فإن وضع الجملة كاملةً يتعين بواسطة(m) وسيط معمم:

$$\underline{q} = (q_1,......,q_m)^T$$

من أجل أي جسمين اختياريين يمكن أن نكتب:

$$(R_{i^{+(a)}} + c_{i^{+(a)a}}) - (R_{i^{-(a)}} + c_{i^{-(a)a}}) = -z_a; a = 1,2,...m \quad ...(12)$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار تعريف مصفوفة التتالي يمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل:

$$\sum_{i=0}^{n} s_{ia}(R_i + c_{ia}) = s_{0a}c_{0a} + \sum_{i=1}^{n} s_{ia}(R_i + c_{ia}) = -z_a; a = 1,...,m \,...(13)$$

الآن وبمساعدة مصفوفة التتالي سنعرف المصفوفة التالية:

$$\underline{j} = (s_{ia}c_{ia})(i = 0,1,...,n; a = 1,2,...,m) \;...\; (14)$$

تتعين المتجهات C_{ia} من أجل $i = i^{\pm}(a)$ فقط وفيما عدا ذلك هذه المتجهات مساوية للصفر تملك المصفوفة $\underline{j}$ نفس تركيب مصفوفة التتالي:

$$\underline{j} = \begin{bmatrix} \breve{c}_0 & \hat{c}_0 \\ \hline \underline{\breve{c}} & \underline{\hat{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ \hline \underline{c} \end{bmatrix} \;...(15)$$

حيث:

$$\underline{\breve{c}_0} = (s_{0a}c_{0a}), (a=1,...,n), \underline{\hat{c}_0} = (s_{0a}c_{0a}), (a=n+1,...,m),$$
$$\underline{\breve{c}} = (s_{ia}c_{ia}), (i,a=1,...,n), \underline{\hat{c}} = (s_{ia}c_{ia})$$
$$(i=1,...,n; a=n+1,...,m), \underline{c_0} = (s_{0a}c_{0a}), (a=1,...,m)$$
$$\underline{c} = (s_{ia}c_{ia}), (i=1,...,n; a=1,...,m)$$

وبنفس الطريقة، نعرف المصفوفة:

$$\underline{J^*} = (s_{ia}^{+}z_a); (i=0,1,...,n; a=1,...,m) \qquad ...(16)$$

تملك المصفوفة(16) الشكل:

$$\underline{J^*} = \begin{bmatrix} \underline{\breve{c}_0^*} & \underline{\hat{c}_0^*} \\ \underline{\breve{c}^*} & \underline{\hat{c}^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c_0^*} \\ \underline{\underline{c^*}} \end{bmatrix} \qquad ... (17)$$

حيث:

$$\underline{\breve{c}_0^*} = (s_{0a}^{+}z_a), (a=1,...,n), \underline{\hat{c}_0^*} = (s_{0a}^{+}z_a), (a=n+1,...,m), \underline{\breve{c}^*} = (s_{ia}^{+}z_a), (i,a=1,...,n)$$

$$\underline{\hat{c}^*} = (s_{ia}^{+}z_a)(i=1,...,n; a=n+1,...,m), \underline{c_0^*} = (s_{0a}^{+}z_a), (a=1,...,m),$$

$$\underline{c^*} = (s_{ia}^{+}z_a), (i=1,...,n; a=1,...,m),$$

يمكن كتابة المتجه z_a بالشكل:

$$z_a = \sum_{i=0}^{n} s_{ia}^{+} z_a$$

ومنه نجد من أجل المصفوفة:

$$\underline{Z} = (\underline{J^*})^T \underline{1}_{n+1}$$

حيث $\underline{1}_{n+1}$ هي مصفوفة عمود من المرتبة $[(n+1)\times 1]$، جميع عناصرها تأخذ القيمة الواحدية وإذا استخدمنا الرمز $\underline{R} = (R_1,...,R_m)^T$ فإن العلاقة (13) تكتب بالشكل:

$$I^T \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{R} \end{bmatrix} + \underline{J}^T \underline{1}_{n+1} = -\underline{Z} \qquad (18)$$

وباستخدام فالصيغة تأخذ الشكل:

$$I^T \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{R} \end{bmatrix} + (\underline{J} + \underline{J}^*)^T \underline{1}_{n+1} = \underline{0}_{m\times 1} \qquad \ldots(19)$$

وبضرب طرفي العلاقة (19) من اليسار ب $\underline{\psi}^T$ نجد:

$$\underline{\psi}^T\, I^T = (-1_n, \underline{E_n}) \qquad \ldots(20)$$

فتصبح العلاقة بالشكل:

$$\underline{R} = -\underline{\psi}^T (\underline{J} + \underline{J}^*)^T \underline{1}_{n+1} \qquad \ldots(21)$$

تعرف الصيغة (21) نصف القطر المتجهي $R_i\,(i=1,2,...,n)$ للنقاط C_i المثبتة من الأجسام بالنسبة للجملة الإحداثية المطلقة من خلال المتجهات المفصلية وبالتالي من خلال الإحداثيات المعممة ويمكن ودون المس بعمومية المسألة وضع $C_0 = C_1$ وعندئذ $C_{01} = 0$ ونختار للجسم الخاص (المميز)الرمز R_{i^*} وبالتالي:

$$R_{i^*} = \sum_{i=1}^{i^*} z_i + \sum_{i=1}^{i^*-1} (c_{i,i+1} - c_{ii}). \qquad \ldots(22)$$

تعبر العبارة الأخيرة عن نصف القطر المتجهي للنقطة C_{i^*} من الجسم الخاص بالنسبة للجملة الإحداثية المطلقة $[6]$. واذا أخذنا بعين الاعتبار ان المتجهات C_{ia} من أجل الآلتين ذاتها تماماً ويعود الفرق في المواضيع للقيم المختلفة للمتجهات z_a (z_a^r لحالة المفاصل الدورانية و z_a لحالة المفاصل عالية المرنة) فيمكننا كتابة (22) بالشكل:

$$\Delta R_i^* = \sum_{i=1}^{i^*} \Delta z_i \qquad \ldots(23)$$

وهي تعبر عن انزياح النقطة الخاصة (المميز).

لنطبق ما سبق على آلة الخماسية المعدلة فنجد:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} c_{01} & 0 & c_{03} & 0 & 0 \\ -c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{22} & 0 & 0 & c_{25} \\ 0 & 0 & -c_{33} & c_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{44} & -c_{45} \end{bmatrix}$$

وكذلك المصفوفة:

$$\underline{J}^* = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & z_3 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_5 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي تكون مصفوفة أنصاف الأقطار المتجهية هي:

$$\underline{R} = -\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} z_1 + c_{01} - c_{11} \\ z_2 + c_{12} - c_{22} \\ z_3 + c_{03} - c_{33} \\ z_4 + c_{34} - c_{44} \\ z_5 + c_{25} - c_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + c_{01} - c_{11} \\ z_1 + z_2 + c_{01} + c_{12} - c_{11} - c_{22} \\ z_3 + c_{03} - c_{33} \\ z_3 + z_4 + c_{03} + c_{34} - c_{33} - c_{44} \end{bmatrix} \quad ...(24)$$

وتملك النقطة المميزة N الواقعة في نهاية النواس نصف القطر المتجهي التالي:

$$R_N = R_2 + he_1^{(2)}$$

وبمفاضلة العلاقة الأخيرة وأخذ(24) بعين الاعتبار نجد:

$$\Delta R_N = \Delta R_2 = \Delta Z_1 + \Delta Z_2$$

-دراسة حركة النواس في هذه الآلة.

إن النواس يملك حركتين:

-الحركة الأولى: نسبية(دورانية حول المحور OZ المعامد لمستوي الحركة) وسيط حركتها زاوية دوران $\hat{\theta}$

-الحركة الثانية: حركة جرّية بالنسبة لضلع r_3، فتتعين بمعرفة احداثيات نقطة منها ولتكن N (نقطة نهاية النواس) نسقطها على جملة متماسكة مع ضلع r_3 حيث أن $\vec{e}_1^{(2)}$ ينطبق على الضلع r_3 ويكون $\vec{e}_2^{(2)}$ عمودياً عليه في A ولتكن النقطة P نقطة تعليق النواس تبعد عن النقطة A بمقدار $\frac{r_3}{2}$ فيكون:

$$\vec{AN} = (\frac{r_3}{2} + L\sin\theta)\vec{i} - L\cos\theta\vec{j}$$

وبما أنو طول خيط النواس L ثابت فيوجد وسيط وحيد لحركة النواس هو زاوية الدوران $\hat{\theta}$،لنربط حركة النواس المطلقة بالجملة الثابتة اعتماداً على مفهوم مصفوفة أنصاف الأقطار المتجهية (حيث أن معرفة نصف القطر المتجهي لمبدأ أي جملة يخولننا بتعيين أي نقطة اختيارية من الجسم الموافق) لنأخذ النقطة (N):

$$\overline{ON} = R_2 + (AP + PN)$$
$$= R_2 + (\frac{r_3}{2} + L\sin\theta)e_1^{(2)} - L\cos\theta e_2^{(2)}$$

لنوجد الآن سرعة نواس اعتماد على تركيب الحركات بالشكل:

$$\vec{V}_a(N) = \vec{V}_r(N) + \vec{V}_e(N)$$

حيث $\vec{V}_e(N)$ سرعة جرّية

$\vec{V}_r(N)$ سرعة نسبية و تعطى بالعلاقة:

$$\vec{V}_r(N) = \frac{d}{dt}\vec{AN}$$

$$\vec{AN} = (\frac{r_3}{2} + L\sin\theta)\vec{i} - L\cos\theta\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_r(N) = L\dot{\theta}\cos\theta\vec{i} + L\dot{\theta}\sin\theta\vec{j} \quad \dots(12)$$

أما $\vec{V}_e(N)$ فهي السرعة الجرية للنقطةN وتعطى بالعلاقة:

$$\vec{V}_e(N) = \frac{d}{dt}\vec{ON}$$

$$\vec{ON} = R_2 + \left[\frac{r_3}{2}\cos(q_1+q_2) + L\cos(q_1+q_2+\theta)\right]\vec{i}$$
$$+\left[\frac{r_3}{2}\sin(q_1+q_2) + L\sin(q_1+q_2+\theta)\right]\vec{j}$$

$$\vec{ON} = Z_1 + Z_2 + \left[\frac{r_3}{2}\cos(q_1+q_2) + L\cos(q_1+q_2+\theta)\right]\vec{i}$$
$$+\left[\frac{r_3}{2}\sin(q_1+q_2) + L\sin(q_1+q_2+\theta)\right]\vec{j}$$

$$\vec{V}_e(N) = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 - \left[\frac{r_3}{2}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\sin(q_1+q_2) + L(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta})\sin(q_1+q_2+\theta)\right]\vec{i}$$
$$+\left[\frac{r_3}{2}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_1+q_2) + L(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta})\cos(q_1+q_2+\theta)\right]\vec{j} \quad ...(13)$$

بالاستفادة من العلاقتين(13)،(12) نجد أن:

$$\vec{V}_a(N) = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 - \left[\frac{r_3}{2}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\sin(q_1+q_2) + L(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta})\sin(q_1+q_2+\theta) + L\dot{\theta}\cos\theta\right]\vec{i}$$
$$+\left[\frac{r_3}{2}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_1+q_2) + L(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta})\cos(q_1+q_2+\theta) + L\dot{\theta}\sin\theta\right]\vec{j}$$

عندئذ يكون تسارع النواس:

$$\vec{\Gamma}_a(N) = \vec{\Gamma}_e(N) + \vec{\Gamma}_r(N)$$

التسارع النسبي هو:

$$\vec{\Gamma}_r(N) = \frac{d}{dt}\vec{V}_r(N)$$

$$\vec{\Gamma}_r(N) = (L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{i} + (L\ddot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{j}$$

أما التسارع الجرّي فيعطى بالعلاقة:

$$\vec{\Gamma}_e(N) = \frac{d}{dt}\vec{V}_e(N)$$

$$\vec{\Gamma}_e\left(N\right)=\ddot{Z}_1+\ddot{Z}_2-\left[\begin{array}{l}\frac{r_3}{2}(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)\sin(q_1+q_2)+\frac{r_3}{2}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2\cos(q_1+q_2)+\\ L(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2+\ddot{\theta})\sin(q_1+q_2+\theta)+L(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta})^2\\ \cos(q_1+q_2+\theta)+L\ddot{\theta}\cos\theta-L\dot{\theta}^2\sin\theta\\ \end{array}\right]\vec{i}$$

$$+\left[\begin{array}{l}\frac{r_3}{2}(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2)\cos(q_1+q_2)-\frac{r_3}{2}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2\sin(q_1+q_2)\\ +L(\ddot{q}_1+\ddot{q}_2+\ddot{\theta})\cos(q_1+q_2+\theta)-L(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{\theta})^2\\ \sin(q_1+q_2+\theta)+L\ddot{\theta}\sin\theta+L\dot{\theta}^2\cos\theta\\ \end{array}\right]\vec{j}$$

4-النتائج ومناقشتها:

أوجدنا في هذا العمل المعادلات التفاضلية للآلة الخماسية المعدّلة كما قمنا بدراسة حركة النواس وربط حركته بهذه الآلة.

5-الاستنتاجات والتوصيات:

-دراسة حركة نواس معلق على آلة سداسية وايجاد المعادلات التفاضلية لحركة هذه الآلة.

-ايجاد المعادلات التفاضلية لحركة آلة سباعية معدّلة ومضاعفة.

6-المراجع:

1.BAKER, L, 2000- Chancellor Bacon, Introduction to Western Humanities, English Dept., Kansas State University, USA, 233p.

2.BECKETT, E, 1874- A Rudimentary Treatise on Clocks and Watches and Bells. 6th Ed, Britain, 50p.

3. GRAHAM, G, 1726- A contrivance to avoid irregularities in a clock's motion occasion'd by the action of heat

and cold upon the rod of the pendulum. Philosophical Transactions of the Royal Society, Britain, 34, (398-392)p.

4. TOBIN, W, 2003- The Life and Science of Leon Foucault: The man who proved the Earth rotates, UK: Cambridge University Press, (148–149)p.

5.SALEM, S,2019- Accurate, Analysis of Double Ten Bar Mechanism Linked by one joint, Homs University Journal,Vol.3, 14p.

(In Arabic المرجع)

6.HASAN, M, 2012-Accuracy of M.P.S ,with super elastic hinges, Generated by 5-bar Mechanism (Second Case-the link with one joint), Homs University Journal, Vol.34, 27p.

(In Arabic المرجع)