حل معادلة ديوفانتس $x^2 + y^2 = z^2$ في $M_n(\mathbb{Z})$ باستخدام التقطير

د. محمّد إيّاد شراباتي / أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كليّة العلوم – جامعة حمص

د. باسل حمدو العرنوس / أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كليّة العلوم – جامعة حمص

ملخّص البحث

ندرس في هذه الأوراق ثلاثيّة من المصفوفات الصّحيحة، التي يكون مجموع مرّبعي المسقطين الأوّل والثّاني يساوي مربّع المسقط الثّالث، وأسمينا كل ثلاثيّة مصفوفات تحقّق هذا الشّرط ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة.

قمنا في هذه الأوراق بدراسة توليد ثلاثية مصفوفات فيثاغوريّة جديدة انطلاقاً من ثلاثيّة موجودة، ومن ثمّ درسنا إمكانيّة إيجاد ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة انطلاقاً من مصفوفة واحدة، وفق الحالات الآتية:

1. مصفوفة صحيحة قطريّة.
2. مصفوفة قابلة للتقطير وقيمها الذّاتيّة صحيحة وتملك مصفوفة متّجهات ذاتيّة صحيحة ومحدّدها $+1$ أو -1.

الكلمات المفتاحيّة:

ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة – مصفوفة قطريّة – مصفوفة قابلة للتقطير.

Solving Diophantine Equation $x^2 + y^2 = z^2$ in $M_n(\mathbb{Z})$ Using a Diagonalization Method

Dr. Mohamad Eyad Charabati

Department of Mathematics – Faculty of Science – Homs University

Dr. Basel Hamdo Alarnous

Department of Mathematics − Faculty of Science − Homs University

Abstract

We study in this paper the triple of integer matrices that satisfies the sum of squares of the first and second matrices is equal to the square of the third one. We call this triple by matrix Pythagorean triple.

We study the generation of new matrix Pythagorean triple by another triple and then the ability to find this triple by one matrix in the following cases:

1. Diagonal integer matrix

2. Diagonalizable matrix with integer eigenvalues and its eigenvectors matrix has determinant $+1$ or -1.

Key Words:

The Matrix Pythagorean Triple − Diagonal matrix − Diagonalizable matrix.

حل معادلة ديوفانتس $x^2 + y^2 = z^2$ في $M_n(\mathbb{Z})$ باستخدام التقطير

1.مقدّمة

لعلّ من أهم المبرهنات التي تعلق في الذهن في مجال الهندسة، هي مبرهنة فيثاغورث والتي تنص على: « في المثلّث القائم: مساحة المربّع المُنشأ على الوتر، تساوي مجموع مساحتي المُربّعين المنشأين على الضّلعين القائمتين »، وليس المربّع فحسب ، وإنّما أي مضلّع منتظم مُنشأ على أضلاع المثلّث القائم، وكذلك أنصاف الدوائر المُنشأة على أضلاع المثلّث القائم.

لتكن a,b,c أطوال أضلاع مثلّث قائم طول وتره c، فإنّه وبحسب مبرهنة فيثاغورث:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

انتقلت الدّراسة فيما بعد لإيجاد الحلول الصّحيحة لمعادلة ديوفانتس: $x^2 + y^2 = z^2$.

وسمّي كل حل من هذه الحلول ثلاثيّة فيثاغوريّة، وبدأت تطبيقات هذه الثّلاثيّات تظهر شيئاً فشيئاً.

كانت الفكرة التي تمّ الانطلاق منها في هذا البحث هي إيجاد حلول لمعادلة ديوفانتس السّابقة على شكل مصفوفات صحيحة، واهتمامنا في هذا البحث ينصب على إيجاد ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة بمدخلات صحيحة فقط، لأنّه من أجل مدخلات أعداد عاديّة فإنّه بالإمكان توليد ثلاثيّة فيثاغوريّة باختيار مصفوفة مربّعة ما P من المرتبة n وعناصرها من $\mathbb{Q}$، أي إنّه بالإمكان إيجاد مصفوفتين مربّعتين A,C من المرتبة n وعناصرها من $\mathbb{Q}$ انطلاقاً من المصفوفة P بحيث يكون: $P^2 + C^2 = A^2$ [1].

2. هدف البحث

يهدف البحث إلى توليد ثلاثيّة مصفوفات صحيحة فيثاغوريّة انطلاقاً من ثلاثيّات محدّدة، أو انطلاقاً من مصفوفة صحيحة.

3. أهميّة البحث:

عند إيجاد ثلاثيّة مصفوفات صحيحة فيثاغوريّة انطلاقاً من مصفوفة صحيحة، هذا يعني أنّه بمعرفة بعض البراميترات يمكن الحصول على براميترات أكثر، ولهذا دور مهم في عمليّة تشفير البيانات، بالإضافة إلى إمكانيّة تصنيف جديدة للمصفوفات بكونها فيثاغوريّة أم ليست كذلك.

4. المناقشة و النّتائج

تعريف 1: [2]

ندعو المصفوفات المربّعة والتي عناصرها أعداد صحيحة، بالمصفوفات الصّحيحة، ونرمز لمجموعة المصفوفات الصحيحة من المرتبة n بالرّمز $M_n(\mathbb{Z})$.

تعريف 2: [2]

لتكن $A،B،C \in M_n(\mathbb{Z})$ نسمّي الثّلاثيّة (A,B,C) ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة، إذا تحقّقت العلاقة:

$$A^2+B^2=C^2$$

مثال 1:

إنّ الثّلاثيّة الآتية هي ثلاثيّة فيثاغوريّة في $M_2(\mathbb{Z})$.

$$\left(\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\right)$$

نتيجة1:

لتكن $A،B،C \in M_n(\mathbb{Z})$ بحيث تكون هذه المصفوفات قطريّة، معرّفة بالشّكل:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} \upsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \upsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \upsilon_n \end{pmatrix}$$

إنّ الشّرط اللازم والكافي لتكون (A,B,C) ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة، هو أن تكون الثّلاثيّات:

$$(\lambda_i, \mu_i, \upsilon_i)\ ;\ i \in \{1,\dots,n\}$$

ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{Z}$.

الإثبات:

بما أنّ:

$$A^2+B^2=\begin{pmatrix} \lambda_1^{\ 2}+\mu_1^{\ 2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\ 2}+\mu_2^{\ 2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{\ 2}+\mu_n^{\ 2} \end{pmatrix}$$

$$C^2=\begin{pmatrix} \upsilon_1^{\ 2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \upsilon_2^{\ 2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \upsilon_n^{\ 2} \end{pmatrix}$$

فإنّنا نلاحظ أنّ الشّرط اللازم والكافي ليكون: $A^2+B^2=C^2$ هو أن يكون:

$$\lambda_i^{\ 2}+\mu_i^{\ 2}=\upsilon_i^{\ 2} \quad ;\ i \in \{1,\dots,n\}$$

وبهذا يتم المطلوب.

مثال2:

من أجل الثّلاثيّات $(7,24,25),(5,12,13),(3,4,5)$ الفيثاغوريّة في$\mathbb{Z}$ ، فإنّ الثّلاثيّة:

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}\right)$$

فيثاغوريّة في $M_3(\mathbb{Z})$.

مبرهنة 1:

بفرض أنّ (A,B,C) ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة في$M_n(\mathbb{Z})$، وبفرض $L \in M_n(\mathbb{Z})$ بحيث أنّ $\det(L) = \pm 1$ عندئذٍ فإنّ: $(LAL^{-1}, LBL^{-1}, LCL^{-1})$ ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة في$M_n(\mathbb{Z})$.

الإثبات:

بما أنّ (A,B,C) ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$، فإنّ:

$$A^2 + B^2 = C^2$$

من جهة أولى يكون:

$$\begin{aligned}(LAL^{-1})^2 + (LBL^{-1})^2 &= LAL^{-1}.LAL^{-1} + LBL^{-1}LBL^{-1} \\ &= LA^2L^{-1} + LB^2L^{-1} = L(A^2 + B^2)L^{-1} = LC^2L^{-1}\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى يكون:

$$\left(LCL^{-1}\right)^2 = LCL^{-1}.LCL^{-1} = LC^2L^{-1}$$

وبالتّالي فإنّ:

$$\left(LAL^{-1}\right)^2 + \left(LBL^{-1}\right)^2 = \left(LCL^{-1}\right)^2$$

بما أنّ $L \in M_n(\mathbb{Z})$ و $\det(L) = \pm 1$ فإنّ: $L^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$، وبالتّالي فإنّ كلّاً من $LAL^{-1}, LBL^{-1}, LCL^{-1}$ هي من $M_n(\mathbb{Z})$.

بهذا يتم المطلوب.

مثال3:

من أجل ثلاثيّة المصفوفات $\left(A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\right)$ الفيثاغوريّة في $M_2(\mathbb{Z})$. ومن أجل المصفوفة $L = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$، فإنّ ثلاثيّة المصفوفات:

$$\left(LAL^{-1}, LBL^{-1}, LCL^{-1}\right) = \left(\begin{pmatrix} -21 & 15 \\ -38 & 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -78 & 50 \\ -134 & 86 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -75 & 49 \\ -130 & 85 \end{pmatrix}\right)$$

ستكون فيثاغوريّة في $M_2(\mathbb{Z})$.

نتيجة 2:

بفرض أنّ (A, B, C) ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$، وبفرض $L \in M_n(\mathbb{Z})$ عندئذٍ فإنّ:

$$\left(\det(L)LAL^{-1}, \det(L)LBL^{-1}, \det(L)LCL^{-1}\right)$$

أي:

$$\left(L.A.\mathrm{adj}\left(L\right),L.B.\mathrm{adj}\left(L\right),L.C.\mathrm{adj}\left(L\right)\right)$$

ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$.

مثال4:

من أجل ثلاثيّة المصفوفات:

$$\left(A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 4 & 4\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 5 & 5\end{pmatrix}\right)$$

الفيثاغوريّة في$M_2(\mathbb{Z})$،. ومن أجل المصفوفة $L=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$، وحيث إنّ $\det\left(L\right)=3$، فإنّ

ثلاثيّة المصفوفات:

$$\left(3LAL^{-1},3LBL^{-1},3LCL^{-1}\right)=\left(\begin{pmatrix}-25 & 29\\ -38 & 43\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-100 & 92\\ -134 & 124\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-95 & 91\\ -130 & 125\end{pmatrix}\right)$$

ستكون فيثاغوريّة في$M_2(\mathbb{Z})$.

مبرهنة 2:

لتكن $A،B \in M_n(\mathbb{Z})$، بحيث: $A.B+B.A=O_n$، عندئذٍ تكون ثلاثيّة المصفوفات: $\left(A,B,A+B\right)$ فيثاغوريّة في$M_n(\mathbb{Z})$.

الإثبات:

ببساطة نجد:

$$\left(A+B\right)^2=\left(A+B\right).\left(A+B\right)=A^2+A.B+B.A+B^2=A^2+B^2$$

مثال 5:

من أجل:

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

واضح أنّ: $A.B+B.A=O_3$، وبالتّالي فإنّ ثلاثيّة المصفوفات الآتية ستكون فيثاغوريّة في$M_3(\mathbb{Z})$:

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\right)$$

نتيجة3:

بفرض $a،b \in \mathbb{Z}$ عندئذٍ ثلاثيّات المصفوفات الآتية فيثاغوريّة في$M_2(\mathbb{Z})$:

$$\left(\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & -a \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & -b \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & -a \end{pmatrix}\right)$$

ذلك أنّ المسقط الأوّل والثّاني في كل منها يحقّق المبرهنة السابقة.

مبرهنة 3:

لتكن $A \in M_n(\mathbb{Z})$ بحيث تكون A مصفوفة جامدة: $A^2 = A$ [2]. عندئذٍ تكون ثلاثيّة المصفوفات الآتية:

$$\left(A, I_n - A, I_n\right)$$

فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$.

الإثبات:

من كون:

$$A^2 + \left(I_n - A\right)^2 = A + \left(I_n - A\right).\left(I_n - A\right) = A + I_n{}^2 - I_n.A - A.I_n + A^2$$

$$= A + I_n - A - A + A = I_n = I_n{}^2$$

يتم المطلوب.

مثال 6:

لنأخذ المصفوفة: $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$، ولأنّ: $A^2 = A$ ومن ثمّ تكون ثلاثيّة المصفوفات الآتية ستكون فيثاغوريّة في $M_3(\mathbb{Z})$:

$$\left(A, I_3 - A, I_3\right) = \left(\begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

تمهيديّة 1:

لأجل أي عدد صحيح λ فإنّ الثّلاثيّات الآتية تكون فيثاغوريّة في □:

$$\left(\lambda,\ \frac{\lambda^2-1}{2}, \frac{\lambda^2+1}{2}\right) \quad ;\ \lambda \text{ is odd}$$

$$\left(\lambda,\ \frac{\lambda^2-4}{4}, \frac{\lambda^2+4}{4}\right) \quad ;\ \lambda \text{ is even}$$

الإثبات:

من المعلوم أنّه إذا كانت (α,β,γ)ثلاثيّة فيثاغوريّة أوليّة في $\mathbb{Z}$ ، عندئذٍ توجد الأعداد الصّحيحة r,s بحيث $r > s$ التي تحقق:[3]

$$\alpha = r^2 - s^2\ , \qquad \beta = 2rs\ , \qquad \gamma = r^2 + s^2$$

علاوةً على ذلك، فإنّ أي ثلاثية فيثاغورية أولية يمكن التعبير عنها بشكل وحيد بدلالة زوج من الأعداد الصحيحة r و s ليس كلاهما فردي.

ليكن الآن λ عدداً صحيحاً ، نريد تضمين هذا العدد في ثلاثية فيثاغورية ولأجل ذلك نحتاج لإيجاد أعداد صحيحة r,s لتشكيل هذه الثلاثية.

لنناقش أولاً فيما إذا كان λعدداً فردياً ، وسنبحث عن عددين r,s يحققان

$$\lambda = \mathrm{r}^2 - s^2$$

بسهولة يمكننا اختيار العددين الصحيحين

$$r = \frac{\lambda + 1}{2},\ \ s = \frac{\lambda - 1}{2}$$

ولنحصل بذلك على الثلاثية الفيثاغورية في$\mathbb{Z}$:

$$\left(\lambda,\ \frac{\lambda^2-1}{2},\frac{\lambda^2+1}{2}\right)$$

أما إذا كان λ عدد صحيح زوجي، عندئذٍ نبحث عن الأعداد الصّحيحة r,s بحيث:

$$\lambda = 2rs$$

يمكننا أيضاً هنا أن نختار الأعداد الصحيحة

$$r = \frac{\lambda}{2}\ ,\ s = 1$$

ولنحصل بذلك على الثلاثية الفيثاغورية في$\mathbb{Z}$:

$$\left(\lambda,\ \frac{\lambda^2-4}{4},\frac{\lambda^2+4}{4}\right)$$

ملاحظة 1:

تجدر الإشارة هنا إلى أنّ الثّلاثيّة الفيثاغوريّة المشكّلة من العدد الصحيح λ ليس بالضّرورة أن تكون وحيدة، وعلى سبيل المثال:

من أجل العدد الصحيح $\lambda = 20$، وباستخدام التمهيديّة نحصل على الثّلاثيّة $(20,99,101)$ ، كما يمكن التأكّد من أنّ $(20,21,29)$ هي أيضاً ثلاثيّة فيثاغوريّة.

بالمقابل، إذا كان λ عدداً أوّليّاً، فإنّ الثّلاثيّة الفيثاغوريّة التي تتضمّن λ هي ثلاثيّة وحيدة. في الواقع بما أنّ λ إحدى مساقط ثلاثية فيثاغورية ، يوجد عددان صحيحان r,s بحيث يكون

$$\lambda = r^2 - s^2 = (r-s)(r+s)$$

وبما أن λ أولي فهذا يقودنا إلى النتيجة الحتمية

$$r + s = \lambda \text{، } r - s = 1$$

ومنه نحصل

$$r = \frac{\lambda + 1}{2}, \ \ s = \frac{\lambda - 1}{2}$$

حل وحيد ، وهذا ما يؤكد صحة الادعاء.

مبرهنة 4:

مهما تكن $A \in M_n(\mathbb{Z})$ بحيث تكون A مصفوفة قطريّة، توجد مصفوفتان B,C من $M_n(\mathbb{Z})$ بحيث تكون ثلاثيّة المصفوفات $\left(A,B,C\right)$ فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$.

الإثبات:

بفرض $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ من $M_n(\mathbb{Z})$. بحسب التمهيديّة السّابقة فإنّ:

$$\begin{matrix} \left(\lambda_i \,,\ \dfrac{\lambda_i{}^2 - 1}{2}, \dfrac{\lambda_i{}^2 + 1}{2}\right) & ;\ \lambda_i \ \text{ is odd} \\ \left(\lambda_i \,,\ \dfrac{\lambda_i{}^2 - 4}{4}, \dfrac{\lambda_i{}^2 + 4}{4}\right) & ;\ \lambda_i \ \text{ is even} \end{matrix} \quad ; \quad i \in \{1,...,n\}$$

ثلاثيّات فيثاغوريّة في $\mathbb{Z}$. وبحسب النتيجة 1 نضع:

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \upsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \upsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \upsilon_n \end{pmatrix}$$

بحيث:

$$\left.\begin{array}{ll}\mu_i=\dfrac{\lambda_i{}^2-1}{2},\ \upsilon_i=\dfrac{\lambda_i{}^2+1}{2} & ;\ \lambda_i \text{ is odd}\\ \mu_i=\dfrac{\lambda_i{}^2-4}{4},\ \upsilon_i=\dfrac{\lambda_i{}^2+4}{4} & ;\ \lambda_i \text{ is even}\end{array}\right. \quad ;\quad i\in\{1,...,n\}$$

وبهذا يتم المطلوب.

مثال 7:

من أجل المصفوفة $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}$ فإنّ ثلاثيّة المصفوفات الآتية ستكون فيثاغوريّة في $M_3(\mathbb{Z})$:

$$\left(\begin{pmatrix}5&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}12&0&0\\0&3&0\\0&0&24\end{pmatrix},\begin{pmatrix}13&0&0\\0&5&0\\0&0&25\end{pmatrix}\right)$$

تعريف 3: [4]

إنّ المتّجه الذّاتي لتحويل خطّي t من $\mathbb{R}^2$ (أو $\mathbb{R}^3$) إلى نفسه، هو متّجه غير صفري v بحيث يكون:

$$t(v)=\lambda v$$

حيث λ عدد ما، يُدعى بالقيمة الذّاتية المقابلة.

تعريف 4: [4]

إذا كانت A مصفوفة تحويل خطّي من $\mathbb{R}^2$ (أو $\mathbb{R}^3$) إلى نفسه، فندعو المتّجه غير الصّفري v الذي يحقّق العلاقة $Av = \lambda v$ في حال عدد ما λ، متّجهاً ذاتيّاً لـ A، وتدعى λ القيمة الذّاتية المقابلة.

إنّ القيم الذّاتيّة λ لمصفوفة A مرتبتها $n \times n$، تحقّق المعادلة:

$$\det\left(A - \lambda I\right) = 0$$

التي تدعى بالمعادلة المميّزة لـ A ، حيث I هو المصفوفة الواحديّة.

ملاحظة 2: [4]

لكل مصفوفة من المرتبة $n \times n$ قيمة ذاتيّة حقيقيّة واحدة على الأقل.

تعريف 5: [4]

تكون المصفوفة A التي من المرتبة $n \times n$ قابلة للتّقطير إذا وُجدت مصفوفة قطريّة D من المرتبة $n \times n$ بحيث يكون:

$$D = P^{-1}AP$$

حيث P مصفوفة نظاميّة من المرتبة $n \times n$. إنّ عناصر القطر الرّئيسي لـ D هي القيم الذّاتيّة لـ A.

مبرهنة 5:

لتكن $A \in M_n(\mathbb{Z})$ بحيث تكون A مصفوفة قابلة للتقطير، وقيمها الذّاتية صحيحة، وتملك مصفوفة متّجهات ذاتية لها P بحيث $P \in M_n\left(\mathbb{Z}\right)$ و $\det\left(P\right) = \pm 1$، عندئذٍ يمكن توليد ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$ ، من الشّكل $\left(A, B, C\right)$.

الإثبات:

باعتبار A مصفوفة تحقّق شروط المبرهنة، فيمكن كتابتها بالشّكل: $A = P.\tilde{A}.P^{-1}$، حيث $\tilde{A}$ قطرية في $M_n(\mathbb{Z})$ ، و P مصفوفة متّجهات ذاتية لـ A تحقق شروط المبرهنة.

وبالتالي بحسب المبرهنة 4 فإنّه توجد $\tilde{B},\tilde{C}$ من $M_n(\mathbb{Z})$ والقطريّتان بحيث: $\left(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}\right)$ ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة.

ومن ثمّ بحسب المبرهنة 1 فإنّ ثلاثيّة المصفوفات الآتية:

$$\left(P.\tilde{A}.P^{-1}, P.\tilde{B}.P^{-1}, P.\tilde{C}.P^{-1}\right) = \left(A,B,C\right)$$

فيثاغوريّة في $M_n(\mathbb{Z})$.

مثال 8:

من أجل المصفوفة: $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}$ مصفوفة من $M_2(\mathbb{Z})$، إنّ لهذه المصفوفة قيمتان ذاتيّتان صحيحتان هما $\{3,4\}$. كما أنّ المتّجه $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ذاتيّ يقابل القيمة $\lambda_1 = 3$ ، والمتّجهات الذاتية المقابلة للقيمة $\lambda_2 = 4$ هي من الشّكل: $\begin{pmatrix} a \\ 3a \end{pmatrix}$.

إنّ القيمة $a = 1$ تجعل $P = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 5 & 3a \end{pmatrix}$ من $M_2(\mathbb{Z})$، و $\det\left(P\right) = 1$. ويكون:

$$A = P.\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.P^{-1} \;\; ; \;\; P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

من أجل المصفوفة: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ، فإنّ ثلاثيّة المصفوفات الآتية تكون فيثاغوريّة في $M_2(\mathbb{Z})$:

$$\left(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}\right)=\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right)$$

وبالتّالي ثلاثيّة المصفوفات الآتية ستكون فيثاغوريّة في $M_2(\mathbb{Z})$:

$$\left(A,B,C\right)=\left(P.\tilde{A}.P^{-1},P.\tilde{B}.P^{-1},P.\tilde{C}.P^{-1}\right)=$$

$$=\left(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -15 & 9 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 15 & -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right)$$

5. النتائج والمقترحات

تمكّنا في هذا البحث من توليد ثلاثية مصفوفات فيثاغوريّة جديدة انطلاقاً من ثلاثيّة موجودة (المبرهنة 1 والنتيجة 2)، كما درسنا إمكانية توليد ثلاثية مصفوفات فيثاغوريّة بشروط معيّنة (المبرهنتين 2 و3) ، ومن ثمّ درسنا إمكانيّة إيجاد ثلاثيّة مصفوفات فيثاغوريّة انطلاقاً من مصفوفة واحدة، وفق الحالات الآتية:

1. مصفوفة صحيحة قطريّة (المبرهنة 4).

2. مصفوفة قابلة للتقطير وقيمها الذّاتيّة صحيحة وتملك مصفوفة متّجهات ذاتيّة صحيحة ومحدّدها $+1$ أو -1(المبرهنة 5).

ويقترح الباحثان دراسة إمكانية معرفة فيما إذا كانت مصفوفة مربّعة صحيحة هي أوّل فيثاوغوري في ثلاثية مصفوفات فيثاغوريّة أم لا، والبحث عن الثاني والثالث الفيثاغوريّان.

6. المراجع

[1] Arnold، M.، & Eydelzon، A. (2019). On matrix Pythagorean triples. *American Mathematical Monthly*، *116* (2)، 158–160.

[2] Vălcan، T. D. (2019). From Diofantian equations to matricial equations (I) – Equations and Pythagorean matrices. *Journal of Education & Social Policy*، *6* (1)، 60–73.

[3] Al-Husseini، D.، & Qabeel، M. B. (2007). *Number theory*. University of Damascus، Faculty of Sciences Publications.

[4] Horn، R. A.، & Johnson، C. R. (1985). *Matrix analysis*. Cambridge University Press.