دراسة في بنية الخماسيات الفيثاغورية الجبريّة، واستخدامها في توليد فيثاغوريّات

اعداد الدكتور باسل العرنوس

ملخّص البحث

قمنا في هذا البحث بدراسة في بنية الخماسيات الفيثاغوريّة $(PP_5,*)$ حيث بيّنّا أنّ هذه البنية تقبل عنصراً محايداً، وأوجدنا العناصر القابلة للقلب بالنّسبة للعمليّة*، واستخدمنا مفهوم شبه المقلوب لحل معادلات تتضمّن العمليّة *.

أوجدنا طرقاً لتوليد خماسيّات فيثاغوريّة من رباعيّات فيثاغوريّة، وتوليد خماسيّات من ثلاثيّات فيثاغوريّة، وأخيراً طرقاً لتوليد ثلاثيّات فيثاغوريّة من ثلاثيّات فيثاغوريّة من خلال عملية مغلقة $\odot$.

الكلمات المفتاحيّة:

خماسيّة فيثاغوريّة، رباعيّة فيثاغوريّة، ثلاثيّة فيثاغوريّة، بنية، نصف زمرة، محايد، نصف مقلوب.

A Study on the Algebraic Structure of Pythagorean Quintuples and Their Use in Generating Pythagorean Triples

Abstract

In this research, we studied the structure of Pythagorean Quintuples $(PP_5,*)$, demonstrating that this structure possesses an identity element. We identified the invertible elements with respect to the operation $*$ and employed the concept of a semi−inverse to solve equations involving the $*$ operation.

We developed methods for generating Pythagorean Quintuples from Pythagorean Quadruples, generating Quintuples from Pythagorean Triples, and finally, methods for generating new Pythagorean Triples from existing ones through a closed operation $\odot$.

Keywords:

Pythagorean Quintuple, Pythagorean Quadruple, Pythagorean Triple, Algebraic Structure, Semigroup, Identity Element, Semi−inverse.

دراسة في بنية الخماسيات الفيثاغورية الجبريّة، واستخدامها في توليد فيثاغوريّات

1.مقدّمة

تهدف دراسة الفيثاغوريّات في معظم حالاتها إلى إيجاد طرائق توليد لهذه الفيثاغوريّات، بدءاً من صيغة إقليدس لتوليد الثلاثيات الفيثاغوريّة إلى طريقة الأشجار الثلاثية، وهكذا.

ثمّ ظهرت طرائق توليد جديدة تعتمد على الفيثاغوريّات نفسها، وذلك من خلال تعريف عمليّات مغلقة على الفيثاغوريّات.

ففي العام 1984 عرّف إيكيرت Eckert عمليّة جمع بين الثلاثيّات الفيثاغوريّة التي عناصرها من $\mathbf{Z}$ ، على النحو الآتي:

$$(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2,c_1c_2)$$

بحيث تشكّل مجموعة كلّ الثّلاثيّات الفيثاغوريّة الصحيحة بالإضافة إلى $(1,0,1)$ مع العمليّة $+$ زمرة تبديلية $[1]$.

بعد ذلك في العام 1991 قام زناردو Zanardo و زانيير Zannier بتعميم المجال من $\mathbf{Z}$ إلى أي حلقة من الأعداد الصحيحة $[2]$ R .

في العام 1996 قام بيوريجارد Beauregard و سوريانريان Suryanarayan بتعريف عمليّة مغلقة $*$ على مجموعة كل الثلاثيّات الفيثاغوريّة الصحيحة، على النحو الآتي $[3]$:

$$(a_1,b_1,c_1)*(a_2,b_2,c_2)=(a_1a_2,b_1c_2,c_1b_2+b_1b_2+c_1c_2)$$

في العام 2025 قام العرنوس بتعريف عمليّة مغلقة $*$على مجموعة كل الخماسيّات الفيثاغوريّة PP_5، وأثبت أنّ البنية $(PP_5,*)$ هي نصف زمرة، وأوجد العنصر المحايد بالنسبة للعمليّة $*$ [4].

ندرس في هذا البحث خواص هذه البنية من حيث العناصر القابلة للقلب، وطرائق أخرى لتوليد الخماسيات الفيثاغوريّة وكذلك الثلاثيات الفيثاغوريّة.

2. هدف البحث

يهدف البحث إلى إيجاد العناصر القابلة للقلب في بنية الخماسيات الفيثاغوريّة الجبريّة. وإيجاد طرائق أخرى لتوليد الخماسيات الفيثاغوريّة وكذلك الثلاثيات الفيثاغوريّة.

3. المناقشة و النّتائج

أوّلاً: الخماسيّات الفيثاغوريّة $\mathbb{Z}$:

نعلم من نظريّة الأعداد، أنّ الثّلاثيّات الفيثاغوريّة في $\mathbb{Z}$ هي مجموعة كلّ الثّلاثيّات $\{x,y,z\}$ التي تحقّق معادلة ديوفانتس الآتية:

$$x^2+y^2=z^2 \;\; ; \;\; x,y,z\in\mathbb{Z}$$

وعليه فإنّ الخماسيّات الفيثاغوريّة، هي مجموعة كلّ الخماسيّات $\{x,y,z,w,r\}$ والتي تحقّق معادلة ديوفانتس الآتية:

$$x^2+y^2+z^2+w^2=r^2 \;\; ; \;\; x,y,z,w,r\in\mathbb{Z}^+$$

تعريف 1:

تسمّى خماسيّة فيثاغوريّة، كلّ خماسيّة (a,b,c,d,e)، حيث $a,b,c,d,e\in\mathbb{Z}$، وتحقّق:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2$$

سنرمز لمجموعة كلّ الخماسيّات الفيثاغوريّة بالرّمز PP_5 وبالتّالي يكون:

$$PP_5=\{(a,b,c,d,e);\ a^2+b^2+c^2+d^2=e^2 : a,b,c,d,e\in\mathbb{Z}\}$$

مبرهنة 1 وتعريف 2:[4]

ليكن $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5),(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in PP_5$، نعرّف على PP_5 العمليّة الثّنائيّة الآتية:

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$$

حيث:

$$\begin{aligned} c_1&=a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4\\ c_2&=a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3\\ c_3&=a_1b_3+a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4\\ c_4&=a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2 \end{aligned}\quad,\quad c_5=a_5b_5$$

عندئذٍ $(PP_5,*)$ بنية جبريّة.

مبرهنة 2:[4]

تقبل العمليّة $*$ في البنية الجبريّة $(PP_5,*)$ عنصراً محايداً، هو $(1,0,0,0,1)$.

مبرهنة 3:[4]

إنّ العمليّة $*$ في البنية الجبريّة $(PP_5,*)$ هي عمليّة تجميعيّة.

مبرهنة 4: العناصر القابلة للقلب في $(PP_5,*)$

إنّ عدد العناصر القابلة للقلب في $(PP_5,*)$ هو 16.

الإثبات:

بفرض $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\in PP_5 \setminus \{(0,0,0,0,0)\}$ ولنفرض أنّه قابلاً للقلب بالنسبة للعمليّة $*$، وبالتالي يوجد $(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in PP_5$، بحيث:

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(1,0,0,0,1) \qquad (4)$$

$$(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)*(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=(1,0,0,0,1) \qquad (5)$$

من $(4),(5)$ يتّضح أنّ:

$$a_5.b_5=1 \qquad (6)$$

لنعرّف العددين:

$$p_1=\frac{a_1}{a_5}+\frac{a_2}{a_5}i+\frac{a_3}{a_5}j+\frac{a_4}{a_5}k, \qquad p_2=\frac{b_1}{b_5}+\frac{b_2}{b_5}i+\frac{b_3}{b_5}j+\frac{b_4}{b_5}k$$

وليكن $p_1.p_2=1$ عندئذٍ فإنّ:

$$p_2=\frac{1}{p_1}=\frac{\overline{p}_1}{|p_1|^2}=\frac{a_1}{a_5}-\frac{a_2}{a_5}i-\frac{a_3}{a_5}j-\frac{a_4}{a_5}k$$

وبالتّالي نضع:

$$(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(a_1,-a_2,-a_3,-a_4,a_5) \qquad (7)$$

وبملاحظة أنّ:

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)*(a_1,-a_2,-a_3,-a_4,a_5)&=(a_5{}^2,0,0,0,a_5{}^2)\\(a_1,-a_2,-a_3,-a_4,a_5)*(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)&=(a_5{}^2,0,0,0,a_5{}^2)\end{aligned} \qquad (8)$$

من العلاقة (6) ومن العلاقتين الأخيرتين يتّضح أنّ (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) يكون قابلاً للقلب إذا وفقط إذا كان: $a_5=+1$ أو $a_5=-1$. وعليه فإنّ العناصر في $(PP_5,*)$ القابلة للقلب، استناداً إلى (7) هي:

م	العنصر من $(PP_5,*)$	مقلوبه
1	$(1,0,0,0,1)$	$(1,0,0,0,1)$
2	$(-1,0,0,0,1)$	$(-1,0,0,0,1)$
3	$(1,0,0,0,-1)$	$(1,0,0,0,-1)$
4	$(-1,0,0,0,-1)$	$(-1,0,0,0,-1)$
5	$(0,1,0,0,1)$	$(0,-1,0,0,1)$
6	$(0,1,0,0,-1)$	$(0,-1,0,0,-1)$
7	$(0,-1,0,0,1)$	$(0,1,0,0,1)$
8	$(0,-1,0,0,-1)$	$(0,1,0,0,-1)$
9	$(0,0,1,0,1)$	$(0,0,-1,0,1)$
10	$(0,0,1,0,-1)$	$(0,0,-1,0,-1)$
11	$(0,0,-1,0,1)$	$(0,0,1,0,1)$
12	$(0,0,-1,0,-1)$	$(0,0,1,0,-1)$
13	$(0,0,0,1,1)$	$(0,0,0,-1,1)$
14	$(0,0,0,1,-1)$	$(0,0,0,-1,-1)$
15	$(0,0,0,-1,1)$	$(0,0,0,1,1)$
16	$(0,0,0,-1,-1)$	$(0,0,0,1,-1)$

تعريف 3:

ليكن $A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\in PP_5$ حيث $a_5\notin\{1,-1\}$ فإنّنا نسمّي العنصر:

$$\tilde{A} = \left(a_1, -a_2, -a_3, -a_4, a_5\right)$$

شبه مقلوب العنصر A.

نتيجة 1:

إنّ البنية $\left(PP_5, *\right)$ هي نصف زمرة، تقبل الخماسيّة $\left(1,0,0,0,1\right)$ عنصراً محايداً، ويوجد لـ16عنصراً منها مقلوباً بالنّسبة للعمليّة *، أمّا بقيّة العناصر ما عدا $\left(0,0,0,0,0\right)$ فلكلّ عنصر شبه مقلوب.

نتيجة 2:

من العلاقة $\left(8\right)$ يتّضح أنّه إذا كان $A, B \in PP_5$، وكانت المعادلة:

$$A * X = B$$

قابلة للحل في PP_5 فإنّ:

$$X = \frac{1}{{a_5}^2} \tilde{A} * B \qquad (9)$$

وإذا كانت المعادلة: $X * A = B$ قابلة للحل في PP_5 فإنّ:

$$X = \frac{1}{{a_5}^2} B * \tilde{A} \qquad (10)$$

مثال 3:

ليكن: $A = \left(1,4,8,12,15\right), B = \left(2,4,5,6,9\right)$، وبما أنّ:

$$A * B = \left(-126, 0, 45, 18, 135\right)$$

فإنّ المعادلة:

$$A * X = \left(-126, 0, 45, 18, 135\right)$$

قابلة للحل في PP_5، وحلّها بحسب العلاقة (9)، هو:

$$X = \frac{1}{225}\tilde{A} * (-126, 0, 45, 18, 135) =$$
$$= \frac{1}{225}(1, -4, -8, -12, 15) * (-126, 0, 45, 18, 135)$$
$$= \frac{1}{225}(450, 900, 1125, 1350, 2025) = (2, 4, 5, 6, 9)$$

وهذا منطقي.

سادساً: توليد خماسيّات فيثاغوريّة من رباعيّات فيثاغوريّة أو ثلاثيّات فيثاغوريّة.

1 . التوليد من رباعيّات فيثاغوريّة

يمكن استخدام العمليّة * لتعريف عمليّات غرضها توليد خماسيّات فيثاغوريّة، وذلك بتمديد الرباعيّات الفيثاغوريّة لتصبح خماسيّات.

فالرباعيّة الفيثاغوريّة (a, b, c, e) تحقّق:

$$a^2 + b^2 + c^2 = e^2 \qquad (11)$$

ويمكن تمديدها بأربعة طرق لتصبح خماسيّة، على النّحو:

$$(a, b, c, 0, e), (a, b, 0, c, e), (a, 0, b, c, e), (0, a, b, c, e)$$

وبالتّالي بتطبيق العمليّة * على خماسيّتين ممدّدتين من رباعيّات فيثاغوريّة نحصل على خماسيّة فيثاغوريّة.

فمن أجل الرباعيّتين: $(a,b,c,e),(x,y,z,r)$ يمكن توليد خماسيّات فيثاغوريّة بتطبيق العلاقة * بعدّة طرق، وذلك تبعاً لاختلاف طرق تمديد الرباعيّة الفيثاغوريّة إلى خماسيّة فيثاغوريّة، نضع مثلاً:

$$(a,b,0,c,e)*(x,y,z,0,r)=$$
$$=(ax-by,ay+bx-cz,az+cy,cx+bz,er)$$

بأخذ كلّ طرق التمديد وتطبيق العلاقة * نحصل من الرباعيّتين:

$$(a,b,c,e),(x,y,z,r)$$

على الخماسيّات الآتية:

$$(ax-by-cz\ ,ay+bx\ ,az+cx\ ,bz-cy\ ,er) \qquad (12)$$

$$(ax-by\ ,ay+bx-cz\ ,az+cy\ ,cx+bz\ ,er) \qquad (13)$$

$$(ax-bz\ ,ay-cz\ ,az+bx+cy\ ,cx-by\ ,er) \qquad (14)$$

$$(-ay-bz\ ,ax-cz\ ,bx+cy\ ,cx+az-by\ ,er) \qquad (15)$$

$$(ax-by\ ,ay+bx+cz\ ,cx-bz\ ,az-cy\ ,er) \qquad (16)$$

$$(ax-by-cz\ ,ay+bx\ ,cy-bz\ ,az+cx\ ,er) \qquad (17)$$

$$(ax-cz\ ,ay+bz\ ,bx+cy\ ,az+cx-by\ ,er) \qquad (18)$$

$$(-ay-cz\ ,ax+bz\ ,bx+cy-az\ ,cx-by\ ,er) \qquad (19)$$

$$(ax-cy\ ,bx+cz\ ,ay+cx-bz\ ,az+by\ ,er) \qquad (20)$$

$$(ax-cz\ ,bx-cy\ ,ay-bz\ ,az+cx+by\ ,er) \qquad (21)$$

$$\left(ax-by-cz\ ,bz-cy\ ,ay+bx\ ,az+cx\ ,er\right) \qquad (22)$$

$$\left(-by-cz\ ,ax+bz-cy\ ,bx-az\ ,cx+ay\ ,er\right) \qquad (23)$$

$$\left(-bx-cy\ ,ax+cz\ ,ay-bz\ ,az+by-cx\ ,er\right) \qquad (24)$$

$$\left(-bx-cz\ ,ax-cy\ ,ay+cx-bz\ ,az+by\ ,er\right) \qquad (25)$$

$$\left(-by-cz\ ,ax+bz-cy\ ,ay+cx\ ,az-bx\ ,er\right) \qquad (26)$$

$$\left(-ax-by-cz\ ,bz-cy\ ,cx-az\ ,ay-bx\ ,er\right) \qquad (27)$$

هذا يعني أنّه انطلاقاً من رباعيّتين فيثاغوريّتين يمكن توليد خماسيّات فيثاغوريّة بـ16 طريقة مختلفة، جميعها لها الخامس الفيثاغوري ذاته.

نوضّح ذلك من خلال المثال الآتي:

مثال 4:

عند تطبيق العلاقات من (12) إلى (27) على الرباعيتين $(2,6,3,7)$ ، $(8,1,4,9)$ نحصل على الخماسيات:

العلاقة	الخماسيّة	العلاقة	الخماسيّة
(12)	$(-2,50,32,21,63)$	(20)	$(13,60,2,14,63)$
(13)	$(10,38,11,48,63)$	(21)	$(4,45,-22,38,63)$
(14)	$(-8,-10,59,18,63)$	(22)	$(-2,21,50,32,63)$
(15)	$(-26,4,51,26,63)$	(23)	$(-18,37,40,26,63)$
(16)	$(10,62,0,5,63)$	(24)	$(-51,28,-22,-10,63)$
(17)	$(-2,50,-21,32,63)$	(25)	$(-60,13,2,14,63)$
(18)	$(4,26,51,26,63)$	(26)	$(-18,37,26,-40,63)$
(19)	$(-14,40,43,18,63)$	(27)	$(-34,21,16,-46,63)$

2. التوليد من ثلاثيّات فيثاغوريّة

بنفس الطريقة يمكن توليد خماسيّات فيثاغوريّة من ثلاثيّات فيثاغوريّة، فإذا أهملنا إشارة وترتيب المركّبات الأربع الأولى في الخماسيّة، فإنّ الثلاثيّتين $(a,b,e),(x,y,r)$ تولّدان الخماسيّة:

$$(ax\ ,\ ay\ ,\ bx\ ,\ by\ ,\ er) \qquad (28)$$

مثال 5:

من أجل الثّلاثيّتين $(3,4,5)$، $(5,12,13)$ نحصل بتطبيق (28) على الخماسيّة الفيثاغوريّة:

$$(15\ ,\ 36\ ,\ 20,\ 48\ ,\ 65)$$

3. توليد ثلاثيّات فيثاغوريّة من ثلاثيّات فيثاغوريّة

لدى تطبيق العمليّة * على كلّ الخماسيّات الفيثاغوريّة التي تمّ توليدها من الثّلاثيّتين (a,b,e) ، $(x\ ,y\ ,e)$ فإنّنا نحصل على خماسيّات فيها مركّبات صفريّة، وبالنّتيجة نحصل على ثلاثيّات فيثاغوريّة، وبالتّالي نحصل على توليد لثلاثيّات فيثاغوريّة من ثلاثيّات فيثاغوريّة.

لتوضيح الأمر، نلاحظ أنّ:

$$(0,a,0,b,e)*(x\ ,0,y\ ,0,r\ )=(0\ ,\ ax\ -by\ ,0,bx\ +ay\ ,er\ )$$

وبالتّالي يمكن تعريف عمليّة مغلقة على الثّلاثيّات الفيثاغوريّة على النّحو:

$$(a,b,e)\square\ (x\ ,y\ ,r\ )=(\ ax\ -by\ \ ,bx\ +ay\ ,er\ ) \qquad (29)$$

وهذه العلاقة مطابقة تماماً لما توصّل إليه إيكارت [1].

مثال 6:

نلاحظ أنّ:

$$(3,4,5)\square\ (5,12,13)=(\ -33\ ,56,65)$$

في الحقيقة بالإضافة إلى العلاقة (29) يمكن برصد كلّ نتائج العمليّة * على الخماسيّات الممدّدة من الثّلاثيّتين (a,b,e)، $(x\ ,y\ ,e\ )$، أن نعرّف العمليّات المغلقة الآتية على الثّلاثيّات الفيثاغوريّة:

$$(a,b,e)\square(x,y,r)=(ax+by\ ,bx-ay\ ,er) \qquad (30)$$

$$(a,b,e)\square(x,y,r)=(-ax-by\ ,bx-ay\ ,er) \qquad (31)$$

$$(a,b,e)\square(x,y,r)=(ax+by\ ,ay-bx\ ,er) \qquad (32)$$

$$(a,b,e)\square(x,y,r)=(-ax-by\ ,ay-bx\ ,er) \qquad (33)$$

4. النتائج الأساسية للبحث

1. تمكّن البحث من تحديد ووصف جميع العناصر داخل البنية الجبرية للخماسيات الفيثاغورية التي تمتلك عنصراً مقلوباً فيما يتعلق بالعملية الثنائية المُعرَّفة (*). وُجد أن هناك 16 عنصراً قابلاً للقلب بشكل كامل من بين جميع العناصر في هذه البنية.
2. بالنسبة للعناصر التي لا تمتلك مقلوباً كاملاً، قدم البحث مفهوم "شبه المقلوب" كأداة بديلة. هذا المفهوم أثبت فعاليته في حل أنواع معينة من المعادلات داخل هذه البنية الجبرية، حتى عندما لا يكون العنصر قابلاً للعكس تماماً.
3. طوّر البحث طرائق منهجية لتوليد خماسيات فيثاغورية جديدة انطلاقاً من: رباعيات فيثاغورية موجودة مسبقاً، حيث تم اقتراح 16 طريقة مختلفة لتحويل الرباعيات إلى خماسية وإجراء العمليات عليها لتوليد خماسيات جديدة، جميعها تشترك في نفس القيمة للخامس الفيثاغوري. وكذلك من ثلاثيات فيثاغورية موجودة مسبقاً، مما يوسع نطاق الطرق المتاحة للتوليد.
4. كشف البحث عن أن تطبيق العملية (*) على خماسيات مُولَّدة من ثلاثيات يقود في حالات معينة إلى الحصول على ثلاثيات فيثاغورية جديدة. أدى هذا الاكتشاف إلى تعريف عملية مغلقة جديدة (⊙) على مجموعة الثلاثيات الفيثاغورية نفسها. ومن المثير للاهتمام، أن هذه العملية الجديدة تتطابق مع العملية التي قدمها باحثون سابقون

(إيكيرت)، مما يؤكد صحتها ويعيد إنتاجها من خلال هذا الإطار النظري الأوسع والأكثر عمومية للخماسيات.

5. المقترحات والدراسات اللاحقة

1. يمكن تطوير خوارزميات حسابية فعالة مبنية على هذه الطرائق لتوليد أعداد كبيرة من الخماسيات والرباعيات والثلاثيات الفيثاغورية، ودراسة التوزيع الإحصائي للعناصر المُولَّدة.
2. محاولة تعميم هذا النهج ليشمل "السداسيات الفيثاغورية" وما فوقها، وفحص إمكانية تعريف عمليات ثنائية ذات خواص مماثلة على هذه المجموعات الأكبر.
3. استكشاف الروابط المحتملة بين هذه البنى الجبرية ونظريات أخرى في الرياضيات، مثل نظرية الزمر بمستوى أكثر تجريداً، أو حتى في مجالات تطبيقية.

4.المراجع العلمية

1. Eckert, E. J. (1984). The Group of Primitive Pythagorean Triangles. Mathematics Magazine, 57 (1), 22–27.
2. Zanardo, P., & Zannier, U. (1991). The group of pythagorean triples in number fields. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 159 (1), 81–88.
3. Beauregard, R. A., & Suryanarayan, E. R. (1996). Pythagorean Triples: The Hyperbolic View. The College Mathematics Journal, 27 (3), 170–181.
4. Al–Arnous, B. (2025). Semigroups on the set of Pythagorean quintuples. Homs University Journal, Series of Basic Sciences.