تشكيل قاعدة في بعض الفضاءات النووية وفضاءات باناخ

بسمه هشام الحمدو* أ.د.منير مخلوف** أ.د.ابراهيم ابراهيم***

ملخص البحث

في هذا البحث سنشكل قاعدة في بعض الفضاءات النووية، منها فضاء متتاليات عددية ومنها فضاء دوال، بحيث إن كل عنصر من الفضاء يكتب بشكل سلسلة فورييه متقاربة من العنصر نفسه في هذا الفضاء. سنبدأ من أمر معروف عن النشر في فضاء هيلبرت ثم نعمم الى حالة فضاء باناخ وفضاءات نووية أخرى.

للوصول إلى الهدف المنشود درسنا مؤثرات خطية غير محدودة في فضاء المتتاليات ℓ_2 وفي فضاء الدوال L_2.

الكلمات المفتاحية :

الفضاءات الطبولوجية ، الفضاءات النووية ، القاعدة ، النشر المتعامد ، المؤثرات النووية.

*طالبة دراسات عليا(دكتوراه)–كلية العلوم–جامعة حمص

**أستاذ دكتور–كلية العلوم–جامعة حمص

***أستاذ دكتور–كلية العلوم–جامعة حم

Basis Construction in Some Nuclear Spaces and Banach Spaces

Basma Hisham Alhamdo* Prof.Dr.Monir Makhlouf**

Prof.Dr.Ibrahim Ibrahim***

Abstract

In this paper we construct basis in some nuclear spaces consist of numerical sequences and function spaces, such that each element in the space can be written as a Fourier series with respect to that basis. We use a known fact about the expansions in Hilbert space, then we generalize to a Banach space and nuclear space. To obtain the desired we use unbounded linear operators in the spaces ℓ_2 and L_2.

Key Words,

Topological Spaces, Nuclear Spaces, Orthogonal Expansions,Nuclear Operators.

*Graduate Student(Doctorate)-Faculty of Science-Homs University

**Professor Doctor-Faculty of Science-Homs University

*** Professor Doctor-Faculty of Science-Homs University

ندرس في هذا البحث بعض الفضاءات النووية منها فضاء متتاليات عددية و فضاء دوال، ثم نقوم بتشكيل قاعدة لهذه الفضاءات و في النهاية نستنتج قاعدة(معممة) للفضاءات L_p، حيث $1 \leq p < \infty$.

مقدمة:

الفضاءات النووية هي نوع خاص من الفضاءات الطوبولوجية التي لها أهمية بالغة في فروع شتى من الرياضيات، قد أوجدها العالم الألماني **(Alexander Grothendieck 1928 −2014)**، سنذكر تعريفها أدناه ، وننوه أن العديد من الفضاءات الهامة في التحليل هي فضاءات نووية. للمزيد عن هذه الفضاءات يمكن العودة للمراجع: [14],[13],[12],[11], [10] , [9] , [8] , [7] , [6] ,[5].

0- تعاريف أساسية:

في البداية نذكر المفاهيم المعروفة من التحليل الدالي والمستخدمة في هذا البحث.

(1) الفضاء ℓ_p، حيث $1 \leq p < \infty$: هو فضاء كل المتتاليات العددية (العقدية) $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ التي تحقق أن $(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p)$ متقاربة،

إن ℓ_p فضاء باناخ مع النظيم: $\|a\|_{\ell_p} = (\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

في الحالة الخاصة $p = 2$ يكون ℓ_2 فضاء هيلبرت مع الجداء الداخلي المعرف عليه بالشكل:

$\langle a\,, b\rangle_{\ell_2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\overline{b_n}$; $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$.

(2) الفضاء $L_p = L_p(a,b)$، حيث $1 \leq p < \infty$: هو فضاء الدوال ذات القيم العقدية $f = f(x)$ القيوسة والكمولة بالأس p على المجال $[a,b]$ ، وهو فضاء باناخ مع النظيم:

(حيث التكامل مأخوذ بمفهوم لوبيغ): $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

في الحالة الخاصة $p = 2$ يكون L_2 فضاء هيلبرت مع الجداء الداخلي:

$$\langle f, g\rangle_{L_2} = \int_a^b f(x).\overline{g(x)}dx\ .$$

(3) إذا كانت $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة منظمة وتامة في فضاء هيلبرت H فيمكن نشر كل عنصر $x \in H$ بسلسلة فوريه من الشكل:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, u_n\rangle u_n$$

متقاربة من x نفسه في الفضاء H.

نسمي الأعداد $\langle x, u_n\rangle$ عوامل فوريه للعنصر x بالنسبة للجملة $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(هنا : قد يكون الفضاء H هو أحد الفضائين ℓ_2 أو L_2).

وبما أنّ الجملة تامة فتصح مساواة بارسيفال:

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, u_n\rangle|^2 \quad ; \quad x \in H\ .$$

(4) إذا كان $A : D(A) \longrightarrow H$ مؤثراً في فضاء هيلبرت H مجموعة تعريفه $D(A)$ مجموعة جزئية من H (وقد تساوي كل H)، فإننا نسمي A مؤثر موجب محدد إذا وجد عدد موجب c بحيث إن:

$$\langle Ax\ , x\rangle \geq c\ \|x\|^2 \quad ; \quad x \in D(A).$$

حيث $\|x\|$ هو النظيم في فضاء هيلبرت H .

(5) ليكن $A : D(A) \longrightarrow H$ مؤثراً في فضاء هيلبرت H . عندئذ:

نرمز بـ $\rho(A)$ للمجموعة الحلالة للمؤثر A ، وهي مجموعة الأعداد العقدية $\lambda \in \mathbb{C}$ التي تجعل المؤثر العكسي $(A - \lambda\, I)^{-1}$ موجوداً ومحدوداً، حيث I يرمز لمؤثر المطابقة.

المجموعة $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ تسمى طيف المؤثر A ، وتقسم الى ثلاث مجموعات منفصلة مثنى مثنى هي:

الطيف النقطي $\sigma_p(A)$: ويتألف من الأعداد $\lambda \in \mathbb{C}$ بحيث إن $(A - \lambda\, I)^{-1}$ غير موجود.

هذه الأعداد تشكل القيم الذاتية للمؤثر A.

الطيف المستمر $\sigma_c(A)$: ويتألف من الأعداد $\lambda \in \mathbb{C}$ بحيث إن $(A-\lambda I)^{-1}$ موجود لكنه غير محدود، ومجموعة تعريفه كثيفة.

الطيف الباقي $\sigma_r(A)$: ويتألف من الأعداد $\lambda \in \mathbb{C}$ بحيث إن $(A-\lambda I)^{-1}$ موجود، قد يكون محدوداً أو غير محدود، ولكن مجموعة تعريفه غير كثيفة.

إذا كان المؤثر A مترافق ذاتيا، أي $A=A^*$ ، فيكون $\sigma_r(A)=\phi$.

نقول عن مؤثر مترافق ذاتياً A إنه ذو طيف نقطي بحت إذا كان $\sigma(A)=\sigma_p(A)$، أي أن طيفه يتألف من القيم الذاتية فقط.

(6) الفضاء النووي (**nuclear space**): هو فضاء خطي طبولوجي محدب موضعياً X ، حيث إن الطبولوجيا فيه معرفة بواسطة أسرة من أنصاف النظم $\{p\}$، ومن أجل كل نصف نظيم p يوجد نصف نظيم آخر q أكبر. هذا يعني أنه إذا كان $p: X \longrightarrow \mathbb{R}$ نصف نظيم على X، وكانت كرة الواحدة الموافقة له $B_{1,p}(O)$ ، فيوجد نصف نظيم آخر $q: X \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث إن كرة الواحدة الموافقة $B_{1,q}(O)$ محتواة في $B_{1,p}(O)$.

بعبارة أخرى: كل جوار للصفر O يحوي جواراً أصغر.

1- الفضاء s:[4]

نتعرف الآن على أولى الفضاءات النووية.

(1-1) تعريف: نرمز بـ $\boldsymbol{s}$ لمجموعة كل المتتاليات العددية $a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ التي تحقق الشرط:

$$\|a\|_k^2=\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k}|a_n|^2<\infty \quad ; \quad \forall\, k=0,1,2,\ldots. \tag{1.1}$$

(1-2) ملاحظة: (1) لتكن $a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in \boldsymbol{s}$. عندئذ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k}|a_n|^2<\infty \quad ; \quad \forall\, k=0,1,2,\ldots \tag{1.2}$$

من ذلك ينتج أن $\boldsymbol{s}$ فضاء جزئي من ℓ_2.

(2) من (1.1) نلاحظ أن:

$$(1.3)\quad \|a|_0 \le \|a|_1 \le \cdots \le \|a|_k \le \|a|_{k+1} \le \cdots, a \in \boldsymbol{s}\,.$$

وهذا يعني أن $\{\|\cdot|_k\}_{k=0}^{\infty}$ تشكل أسرة عدودة ومتزايدة من أنصاف النظم على الفضاء $\boldsymbol{s}$ ، [6] , [3] .

(1−3) تعريف: نقول إن المتتالية $\{a^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$ متقاربة في $\boldsymbol{s}$ من العنصر $a^{(0)}$ إذا كان:

$$(1.4)\quad \lim_{N\to\infty} \|a^{(N)} - a^{(0)}|_k = 0 \quad ; \quad \forall\, k = 0,1,2,\ldots.$$

(1−4) مبرهنة: $\boldsymbol{s}$ فضاء خطي متعدد أنصاف النظم وتام مع الأسرة $\{\|\cdot|_k\}_{k=0}^{\infty}$.

الإثبات: واضح ان $\boldsymbol{s}$ فضاء خطي، وبسهولة نجد أن كل $\|\cdot|_k$ يعرف نصف نظيم.

لإثبات أن $\boldsymbol{s}$ فضاء تام نأخذ متتالية كوشي فيه $\{a^{(N)}\}$ ونثبت أنها متقاربة في $\boldsymbol{s}$ ، حيث هنا:

$$a^{(N)} = a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, a_n^{(3)}, \ldots, a_n^{(N)}, \ldots.$$

من أجل كل $\varepsilon > 0$ مفروض يوجد $N_0(\varepsilon)$ بحيث يكون:

$$\|a^{(N)} - a^{(M)}|_k^2 < \varepsilon^2 \quad ; \quad N > M > N_0(\varepsilon) \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

لدينا الآن من أجل $N > M > N_0(\varepsilon)$:

$$(1.5)\quad \|a^{(N)} - a^{(M)}\|_{\ell_2}^2 \le \|a^{(N)} - a^{(M)}|_k^2 < \varepsilon^2 \quad ; \quad N > M > N_0(\varepsilon)\,.$$

وينتج من ذلك أن $\{a^{(N)}\}$ هي متتالية كوشي في الفضاء (التام) ℓ_2، فهي متقاربة في ℓ_2، ولنفرض أن: $\lim_{N\to\infty} a^{(N)} = a^{(0)}$ ، وعلينا إثبات أن $a^{(0)}$ تنتمي إلى $\boldsymbol{s}$.

من (1.5) نجد بجعل $N \longrightarrow \infty$:

$$\|a^{(0)} - a^{(M)}\|_{\ell_2}^2 \le \varepsilon^2 \quad ; \quad M > N_0(\varepsilon)\,.$$

وهذا بدوره يعني:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n^{(0)}-a_n^{(M)}\right|^2 \le \varepsilon^2 \quad ; \quad M > N_0(\varepsilon)\,.$$

من ذلك ينتج أنه من أجل كل n مثبت يكون:

$$\lim_{M\to\infty} a_n^{(M)} = a_n^{(0)} \quad ; \quad N = 1,2,\ldots.$$

أي أن:

$$\left|a_n^{(0)}-a_n^{(M)}\right| \le \varepsilon \quad ; \quad M > N_1(\varepsilon)\,.$$

الآن: نثبّت الدليل n ونختار العدد M كبيراً بشكل كاف بحيث يكون:

$$\left|a_n^{(0)}-a_n^{(M)}\right| \le \frac{\varepsilon}{n^{2k}\,2^n}\,,$$

ونختار عدداً طبيعياً (مثبّتاً) K ، ونحسب:

$$\sum_{n=1}^{K} n^{2k}\left|a_n^{(0)}-a_n^{(M)}\right|^2 \le \sum_{n=1}^{K} n^{2k}\left(\frac{\varepsilon}{n^{2k}\,2^n}\right)^2 \le \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{K}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \le \varepsilon^2\,.$$

وبما أن الطرف الأيمن لايتعلق بـ K فيمكن ترك $K \longrightarrow \infty$ لنجد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k}\left|a_n^{(0)}-a_n^{(M)}\right|^2 \le \varepsilon^2\,.$$

وينتج من ذلك أن المتتالية $\left\{a_n^{(0)}-a_n^{(M)}\right\}$ تنتمي للفضاء $\boldsymbol{s}$، ومن ثم المتتالية:

$$\left\{a_n^{(0)} = \left(a_n^{(0)}-a_n^{(M)}\right)+a_n^{(M)}\right\} \in \boldsymbol{s}\,.$$

بذلك يتم المطلوب.

(1−5) ملاحظة: الفضاء $\boldsymbol{s}$ فصول لأنه فضاء جزئي من فضاء فصول (هو ℓ_2)، وهو غير منته البعد، لأن (على سبيل المثال)، المتتاليات التالية تنتمي إلى $\boldsymbol{s}$:

$$e_1 = \{1,0,0,\ldots\}\ ,\ e_2 = \{0,1,0,\ldots\},\ldots\ ,\ e_n = \{0,\ldots,0,1,0,\ldots\},\ldots$$

كما أن: $\|e_n|_k = n^k$.

2− الفضاء $\boldsymbol{s}$ كمجموعة تعريف لمؤثر غير محدود:

في هذه الفقرة نريد توصيف الفضاء $\boldsymbol{s}$ من خلال مؤثر خطي غير محدود في فضاء هيلبرت ℓ_2 .

للوصول إلى الهدف المنشود تلزمنا بعض المعلومات التمهيدية.

(2−1) مبرهنة [1, Theorem7.5.4]:

ليكن A مؤثراً مترافقاً ذاتياً وغير محدود في فضاء هيلبرت H فصول وغير منته الأبعاد وله مؤثر عكسي A^{-1} متراص، ولنفرض أن $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ هي، على الترتيب، القيم الذاتية والعناصر الذاتية للمؤثر A^{-1}. عندئذ يتحقق مايلي:

(1) القيم الذاتية μ_n كلها مغايرة للصفر.

(2) العناصر الذاتية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ تشكل قاعدة منظمة متعامدة في الفضاء H.

(3) القيم الذاتية للمؤثر A هي $\{\lambda_n = \mu_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$، وهذه بدورها مجموعة غير منتهية، والعناصر الذاتية الموافقة هي $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، كما أن $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

(4) من أجل كل $\lambda \in \rho(A)$ و $g \in H$ يوجد للمعادلة $(A - \lambda I)f = g$ حل وحيد هو:

$$f = (A - \lambda I)^{-1} g = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda)^{-1} \langle g , u_n \rangle u_n . \qquad (2.1)$$

(2−2) مبرهنة [2, Theorem. 4.5.1]:

ليكن A مؤثراً بطيف نقطي بحت في فضاء هيلبرت H. عندئذ يكون:

(1) المؤثر A غير محدود.

(2) يمكن ترتيب القيم الذاتية لـ A بحسب كبر قيمها المطلقة .

(3) إذا كانت $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ القيم الذاتية للمؤثر A وموافقة للعناصر الذاتية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ (المنظمة المتعامدة)، فتكون الجملة $\{u_n\}$ تامة في H.

(4) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

(5) مجموعة تعريف A هي:

$$(2.2) \qquad D(A) = \left\{ x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \, |\langle x \, , u_n \rangle|^2 < \infty \right\}$$

ويكون:

$$(2.3) \qquad Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x \, , u_n \rangle \, u_n \quad ; \quad x \in D(A).$$

(2−3) مبرهنة [2, Theorem 4.5.3]:

ليكن A مؤثراً مترافقاً ذاتياً وموجباً محدداً في فضاء هيلبرت H. عندئذ:

يكون A مؤثر بطيف نقطي بحت إذا وفقط إذا كان مؤثر المطابقة $I : E_A \longrightarrow H$ متراصاً.

هنا: يرمز E_A لفضاء الطاقة (energy space) للمؤثر A، ويكون:

$$(2.4) \qquad E_A = \left\{ x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, |\langle x \, , u_n \rangle|^2 < \infty \right\}$$

(2−4) ملاحظة: ندرس الان المؤثر $A : D(A) \longrightarrow \ell_2$ المعرف بالشكل:

$$Aa = \{n \, a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad ; \quad a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \, ,$$

ونستفيد منه في الحصول على معلومات عن الفضاء $\boldsymbol{s}$، حيث $D(A)$ مجموعة تعريف المؤثر، وسوف نحددها بعد إثبات المبرهنة التالية.

(2−5) مبرهنة: المؤثر A: مترافق ذاتياً ، موجب محدد ، له مؤثر عكسي متراص ، قيمه الذاتية:

$$\lambda_n = n \quad ; \quad n = 1, 2, ...,$$

والعناصر الذاتية الموافقة هي: $e_n = \{ 0, ..., 0, 1, 0, ... \}$ ، حيث العدد 1 يشغل المركبة n وباقي المركبات كلها أصفار.

الإثبات: نوجد المؤثر المرافق A^* من العلاقة:

$$\langle Aa \, , b \rangle = \langle a \, , A^* b \rangle \quad ; \quad a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \quad , \quad b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} .$$

فإذا فرضنا $A^* b = \{b_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ فيكون:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \overline{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n^*}$$

أي أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{n b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n^*}$$

وينتج من ذلك:

$$b_n^* = n b_n \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

أي أن: $A^* b = \{n\, b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، وبالتالي $A^* = A$ ، والمؤثر مترافق ذاتياً. وبما أن:

$$\langle Aa\,, a\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n \overline{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \|a\|_{\ell_2}^2 \quad ; \; a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

فينتج أن المؤثر A موجب محدد.

بحسابات عادية نحصل على المؤثر العكسي $A^{-1}: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ ، وله الشكل:

$$A^{-1} a = \left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad ; \quad a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2\,,$$

وهو محدود لأن:

$$\|A^{-1}a\|_{\ell_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n}\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n|^2 = \|a\|_{\ell_2}^2 \; ; \quad a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

لإثبات أن المؤثر A^{-1} متراص نشكل متتالية مؤثرات $A_N^{-1}: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ معرفة بالشكل:

$$A_N^{-1} a = \left\{\; a_1, \frac{a_2}{2}\,, \ldots, \frac{a_N}{N}\,, 0, 0, \ldots\right\}$$

فنجد أن المؤثر A_N^{-1} متراص من اجل كل N لأن: $\dim R(A_N^{-1}) = N$ ، ويكون لدينا:

$$\|A^{-1} - A_N^{-1}\|^2 = \sup_{\|a\|=1} \|A^{-1}a - A_N^{-1}a\|_{\ell_2}^2$$

$$= \sup_{\|a\|=1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n}\right|^2 \leq \frac{1}{(N+1)^2} \|a\|_{\ell_2}^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 .$$

لذلك يكون A^{-1} متراصاً لأنه نهاية متتالية من المؤثرات المتراصة.

نحصل على القيم الذاتية والعناصر الذاتية للمؤثر A^{-1} من العلاقة $A^{-1}u = \mu u$،

فنجد بحسابات عادية أن :

$$\mu_n = \frac{1}{n} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots . \quad , \quad u_n = \{ 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots \} = e_n$$

وبحسب المبرهنة (2−1) يكون $\sigma(A) = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ ، والعناصر الخاصة الموافقة هي $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

بذلك يتم المطلوب.

(2−6) ملاحظة: إضافة لما ذكر أعلاه عن المؤثر A يكون لدينا بحسب المبرهنة (2−2):

$$D(A) = \left\{ a \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ |\langle a , e_n \rangle|^2 < \infty \right\}$$
$$= \left\{ a \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ |a_n|^2 < \infty \right\}$$

ويكون:

$$Aa = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle a , e_n \rangle \, e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \, e_n \quad ; \quad a \in D(A)..$$

(2−7) ملاحظة: نعرف القوى الصحيحة للمؤثر A بالشكل:

$$A^0 = I \ \left(\text{مؤثرالمطابقة}\right) \ , \ A^1 = \mathrm{A} \ , \ A^2 = A^1(A^1) , \ldots , A^k$$
$$= A^1(A^{k-1}).$$

فنجد ان:

$$D(A^k) = \left\{ a \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} \ |\langle a , e_n \rangle|^2 < \infty \right\} \quad ; \quad a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$$

$$= \left\{ a \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} \, |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

وبذلك يكون:

$$\boldsymbol{s} = \bigcap_{k=1}^{\infty} D(A^k) \, .$$

يكون أيضاً:

$$\|a|_k = \|A^k a\|_{\ell_2} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

وبشكل خاص: $\|e_n|_k = \|A^k e_n\|_{\ell_2} = n^k$.

لذلك يمكن التعبير عن أسرة أنصاف النظم (1.3) بالشكل:

$$\|a\|_{\ell_2} \le \|\mathrm{A}a\|_{\ell_2} \le \cdots \le \|A^k a\|_{\ell_2} \le \|A^{k+1} a\|_{\ell_2} \le \cdots \, , \quad a \in \boldsymbol{s} \, .$$

(2−8) ملاحظة: بالاعتماد على المبرهنة (2−1) يمكننا حل معادلات من الشكل:

$$(A - \lambda I)x = b \, ,$$

حيث $b \in \ell_2$ معطى و $\lambda \in \rho(A)$ ، فيكون الحل بحسب (2.1) (السلسلة متقاربة في ℓ_2):

$$x = (A - \lambda I)^{-1} b = \sum_{n=1}^{\infty} (n - \lambda)^{-1} b_n \, e_n \, .$$

بشكل خاص: إذا كان $b \in \boldsymbol{s}$ فيكون أيضاً $x \in \boldsymbol{s}$.

(2−9) ملاحظة: لتكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ أية قاعدة متعامدة منظمة وتامة في فضاء هيلبرت ℓ_2. عندئذ: كل $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ يمكن نشره بسلسلة فورييه متقاربة من a نفسه:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a \, , u_n \rangle \, u_n . \tag{2.6}$$

وهذا يصح بشكل خاص لكل $a \in \boldsymbol{s} \subset \ell_2$، حيث التقارب في ℓ_2 ، وفي المبرهنة التالية نبين أن لكل $a \in \boldsymbol{s}$ سلسلة من نفس الشكل والتقارب في $\boldsymbol{s}$.

(2−10) مبرهنة: يمكن نشر كل $a \in \boldsymbol{s}$ بسلسلة من الشكل التالي، ومتقاربة في $\boldsymbol{s}$ من a نفسه:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a\,, u_n \rangle\, u_n .$$

الإثبات: بحسب الملاحظة السابقة فإن النشر (السلسلة) صحيح في ℓ_2. نضع الآن:

$$a_N = \sum_{n=1}^{N} \langle a\,, u_n \rangle\, u_n \quad ; \quad N = 1, 2, \ldots .$$

فنجد أن $a_N \in \boldsymbol{s}$ من أجل كل N ، كما أن:

$$a - a_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle a\,, u_n \rangle\, u_n \quad ; \quad N = 1, 2, \ldots .$$

ويكون:

$$\begin{aligned} \|a - a_N|_k^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle a - a_N\,, u_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} \left| \left\langle \sum_{j=N+1}^{\infty} \langle a\,, u_j \rangle\, u_j\,, u_n \right\rangle \right|^2 \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{2k} |\langle a\,, u_n \rangle|^2 \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 . \end{aligned}$$

من ذلك ينتج أن: $a = \lim\limits_{N \to \infty} a_N$ ، والتقارب في $\boldsymbol{s}$. بذلك يتم المطلوب.

(2−11) ملاحظة: فيما يلي نريد تعميم النشر (2.6) من الفضاء ℓ_2 إلى الفضاءات ℓ_p، حيث

نعتبر أن $u_n \in \ell_p$ من أجل $1 \le p < \infty$ ، وإضافة لذلك: يوجد عدد طبيعي k بحيث تكون السلسلة العددية $\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} \|u_n\|_{\ell_p}^2 \right)$ متقاربة.

(2–12) مبرهنة: يصح الطمر المستمر $\boldsymbol{s} \hookrightarrow \ell_p$ من أجل $1 \leq p < \infty$، وكل $a \in \boldsymbol{s}$ يمكن نشره بسلسلة من الشكل (2.6) ومتقاربة في ℓ_p من a نفسه.

الإثبات: بحسب الملاحظة (2–9) يتحقق المطلوب عندما $p = 2$.

ليكن $a \in \boldsymbol{s}$ ، فيكون لدينا بحسب المبرهنة (2–10)، (حيث التقارب في $\boldsymbol{s}$):

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a\,, u_n \rangle\, u_n.$$

نضع الآن:

$$a_N = \sum_{n=1}^{N} \langle a\,, u_n \rangle\, u_n \quad ; \quad N = 1, 2, \ldots.$$

فنجد أن $a_N \in \ell_p$ لأن كل a_N عبارة عن تركيب خطي لعناصر من ℓ_p.

لدينا الآن من أجل $a \in \boldsymbol{s}$:

$$\begin{aligned} \|a\|_{\ell_p} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \langle a\,, u_n \rangle \|u_n\|_{\ell_p} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^k \langle a\,, u_n \rangle n^{-k} \|u_n\|_{\ell_p} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle a\,, u_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} \|u_n\|_{\ell_p}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|a|_k\, C\,. \end{aligned}$$

من ذلك ينتج أن التقارب في $\boldsymbol{s}$ يقتضي التقارب في ℓ_p. وبحسب المبرهنة (2–10) تكون المتتالية $\{a_N\}$ متقاربة في $\boldsymbol{s}$ ، وبالتالي متقاربة في ℓ_p من a نفسه، إذ لو فرضنا جدلاً أن المتتالية $\{a_N\}$ لها نهاية أخرى $a' \in \ell_p$ لكان لدينا من أجل كل $m = 1, 2, \ldots$:

$$\langle a'\,, u_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a\,, u_n \rangle\, \langle u_n\,, u_m \rangle = \langle a\,, u_m \rangle.$$

من ذلك ينتج أن $a' = a$ ، والنشر (2.6) صحيح في ℓ_p. بذلك يتم المطلوب.

3- الفضاء $\boldsymbol{s'}$

نرمز بـ $\boldsymbol{s'}$ لفضاء الداليات الخطية المستمرة على $\boldsymbol{s}$ ، ونرمز لعناصره بالأحرف $F, G, \ldots$ ، ولها الشكل:

$$F : \boldsymbol{s} \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad a \longmapsto F(a),$$

وأهم خواصها:

- من أجل $F, G \in \boldsymbol{s'}$ يكون:

$$F = G \iff F(a) = G(a) \quad ; \quad \forall\, a \in \boldsymbol{s}\,.$$

- بشكل خاص: إذا كان $F(a) = 0$ فنكتب $F = 0$، وهو الدالي الصفري.
- تعرف عوامل فورييه لـ $F \in \boldsymbol{s'}$ بالشكل:

$$a_n(F) = F(u_n) \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

- سبين لاحقاً (في النتيجة (3-4)) أن:

$$F = G \iff a_n(F) = a_n(G) \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

لدينا الآن الاختبار التالي:

(3-1) مبرهنة: الدالي الخطي $F \ \boldsymbol{s} \longrightarrow \mathbb{C}$ ينتمي إلى $\boldsymbol{s'}$ إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي k وعدد موجب c يحققان المتراجحة:

$$|F(a)| \le c\, \|a\|_k \quad ; \quad \forall\, a \in \boldsymbol{s}\,. \qquad (2.7)$$

الإثبات: نعتبر أن الدالي F يحقق المتراجحة (2.7). عندئذ:

من أجل أية متتالية $\{a_N\}$ متقاربة في $\boldsymbol{s}$ من a يكون:

$$|F(a_N) - F(a)| \le c\, \|a_N - a\|_k \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

والآن: نعتبر أن $F \in \boldsymbol{s'}$ ونفرض جدلاً عدم وجود عددين k و c يحققان المتراجحة (2.7). عندئذ: توجد في $\boldsymbol{s}$ متتالية $\{a_N\}$ بحيث إن $|F(a_N)| = 1$ كما أن:

$$1 = |F(a_N)| > N \|a\|_N \quad ; \quad N = 1, 2, \ldots.$$

ولكن من أجل $k > N$ يكون:

$$\|a_N|_k \leq \|a_N|_N < \frac{1}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

وينتج من ذلك أن $a_N \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$ ، وهذا غير صحيح. بذلك يتم المطلوب.

(3−2) ملاحظة: تفيدنا المبرهنة السابقة في إثبات أن $\boldsymbol{s'}$ يحوي جميع الفضاءات ℓ_p، ويتم ذلك كما يلي:

ليكن $b \in \ell_p$ (مثبت)، ولنعرف دالياً خطياً $F : \boldsymbol{s} \longrightarrow \mathbb{C}$ بالشكل:

$$F_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, a_n \quad ; \quad a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \boldsymbol{s}\,. \tag{2.8}$$

فيكون لدينا بحسب متراجحة هولدر للمجاميع (حيث $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) والمبرهنة (2−12):

$$|F_b(a)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q\right)^{1/q}$$
$$= \|b\|_{\ell_p} \|a\|_{\ell_q} \leq c\, \|b\|_{\ell_p} \|a|_k\,.$$

وحسب المبرهنة (3−1) يكون $F_b \in \boldsymbol{s'}$.

والآن لنشكل التطبيق (وهو معرف تماماً بحسب ما ذكر آنفاً):

$$\Phi : \ell_p \longrightarrow \boldsymbol{s'} \quad ; \quad b \mapsto \Phi(b) = F_b\,.$$

ليكن $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ و $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ وليكن F_b و F_c الداليين الموافقين، عندئذ يكون:

$$F_b = F_c \iff F_b(a) = F_c(a) \quad ; \quad \forall\, a \in \boldsymbol{s}\,.$$
$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, a_n\,.$$

فإذا أخذنا $a = \{0\,, \ldots 0, 1, 0, \ldots\} \in \boldsymbol{s}$ ، حيث 1 يشغل المركبة n وباقي المركبات كلها أصفار، نجد أن:

$$b_n = c_n \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

لذلك يكون $b = c$. أي أن التطبيق Φ متباين. لذلك تصح المطابقة:

$$\ell_p \ni b \ \leftrightarrow \ F_b \in \boldsymbol{s}' .$$

ومن خلالها يمكن اعتبار ℓ_p كفضاء خطي جزئي من $\boldsymbol{s}'$، أي: $\ell_p \subset \boldsymbol{s}'$، و $1 \leq p < \infty$.

لذلك بدلاً من F_b يمكن أن نكتب b فقط، وبناءً عليه يمكن إعادة كتابة العلاقة (2.8) بالشكل:

$$(2.8)' \qquad b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, a_n \quad ; \quad a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \boldsymbol{s} .$$

وهنا لدينا الحالات الخاصة التالية (مع التنويه أن الكتابة $\overline{a} = \{\overline{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ تعني المرافق العقدي لمتتالية المرافقات $\{\overline{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$):

- من أجل $a = u_m$ يكون:

$$b(u_m) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, u_{m,n} .$$

وبشكل خاص: من أجل $b \in \ell_2$ يكون إضافة لذلك:

$$b(u_m) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, u_{m,n} = \langle u_m , \bar{b} \rangle_{\ell_2}.$$

- من أجل $b = u_m$ و $a = \overline{u_\ell}$ يكون:

$$u_m(\overline{u_\ell}) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}\overline{u_{\ell,n}} = \langle u_m,\ u_\ell \rangle_{\ell_2} = \delta_{m,\ell} .$$

- من أجل $b = u_m$ يكون:

$$u_m(a) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}\ a_n = \langle a , \overline{u_m} \rangle_{\ell_2}.$$

في المبرهنة التالية تلزم عوامل فوريه لـ $F \in \boldsymbol{s}'$ وقد عرفناها سابقاً بالشكل:

$$a_n(F) = F(u_n) \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

(3−3) مبرهنة: كل $F \in \boldsymbol{s}'$ يمكن نشره بسلسلة من الشكل:

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(F)\,\overline{u_n}\,,$$

وهذه السلسلة متقاربة في $\boldsymbol{s'}$ من F نفسه.

الإثبات: بالاستفادة من المبرهنة (2−10) يكون لدينا من أجل $F \in \boldsymbol{s'}$:

$$F(a) = F\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle a\,, u_n\rangle u_n\right) \quad ; \quad a \in \boldsymbol{s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle a\,, u_n\rangle\, F(u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a\,, u_n\rangle\, a_n(F) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u_n}(a)\, a_n(F) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(F)\,\overline{u_n}(a) =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(F)\,\overline{u_n}\right)(a)\,.$$

ومنه نحصل على المطلوب.

نتيجة (3−4): من أجل $F, G \in \boldsymbol{s'}$ يكون:

$$F = G \iff a_n(F) = a_n(G) \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

ينتج ذلك من:

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(F) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(G) u_n = G\,.$$

5- كثيرات حدود تشيبيشيف ومؤثر تشيبيشيف

تُعطى كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الأول $T_n(x)$ بالعلاقات التالية:

$$\tilde{T}_0(x) = 1 \ , \ \tilde{T}_n(x) = \cos(n \arccos x) \ ; \ n = 1,2,3,\ldots \tag{4.1}$$

أو بصيغة رودريج (حيث $n = 1, 2, \ldots$):

$$(4.1)' \quad \tilde{T}_0(x) = 1 \ , \ \tilde{T}_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right].$$

وهي تشكل جملة متعامدة على المجال $[-1,1]$ مع دالة الوزن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

للتأكد من ذلك نفرض $x = \cos\theta$ (أي $\theta = \arccos x$) فتأخذ الجملة (4.1) الشكل:

$$(4.2) \quad \tilde{T}_0(x) = \tilde{T}_0(\cos\theta) = 1\,,\ \tilde{T}_n(x) = \tilde{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\,\theta).$$

حيث إنّ $0 \le \theta \le \pi$. لذلك يكون لدينا:

$$\langle \tilde{T}_n, \tilde{T}_m \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tilde{T}_n(x)\tilde{T}_m(x)d \quad x = \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta =$$

$$= \begin{cases} 0 & ; \quad n \neq m. \\ \pi & ; \quad n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \quad n = m \neq 0 \end{cases}$$

بتقسيم كل $\tilde{T}_n(x)$ على نظيمه نحصل على جملة متعامدة منظمة على المجال $[-1,1]$ مع دالة الوزن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$، هي:

$$(4.3) \quad T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad T_n(x) = \frac{\tilde{T}_n(x)}{\sqrt{2\pi}} \quad ; \ n = 1, 2, \ldots$$

وهذه بدورها تنتمي للفضاءات $L_p(-1\,,+1)$ ، حيث $1 \le p < \infty$، ويكون:

$$(4.4) \quad \|T_0\|_{L_p} = \sqrt{\pi} \ , \ \|T_n\|_{L_p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\pi} |\cos n\theta|^p\right)^{1/p} \le \pi\,.$$

نضيف أيضاً أن كثيرات الحدود $T_n(x)$ هي الدوال الذاتية لمؤثر تشيبيشيف التفاضلي:

$$(4.5) \quad A = -(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} + 1,$$

موافقة للقيم الذاتية:

$$\mu_n = n^2 + 1 \quad ; \quad n = 0,1,2, \dots \tag{4.6}$$

بحسابات عادية نجد ان المؤثر A موجب محدد، فله جذر تربيعي، سنرمز له بـ $T = A^{\frac{1}{2}}$ ، له الدوال الذاتية $T_n(x)$ نفسها، والقيم الذاتية الموافقة هي $\lambda_n = \sqrt{\mu_n} = \sqrt{n^2 + 1}$.

فيما يلي سنكتب فقط L_2 بدلاً من $L_2\,(-1\,,+1)$.

بحسب المبرهنة $(2{-}2)$ تكون مجموعة تعريف المؤثر T هي:

$$D(T) = \left\{ f \in L_2 : \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)|\langle f, T_n\rangle|^2 < \infty \right\}, \tag{4.7}'$$

ويكون:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n^2+1}\langle f, T_n\rangle\, T_n \quad ; \quad f \in D(T)\,.$$

وبما أن:

$$n^2 \le n^2 + 1 \le 2n^2 \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

والسلسلتان:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)|\langle f, T_n\rangle|^2 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2|\langle f, T_n\rangle|^2$$

تكونا متقاربتين معاً أو متباعدتين معاً، فيمكن كتابة $D(T)$ بالشكل:

$$D(T) = \left\{ f \in L_2 : \sum_{n=0}^{\infty} n^2|\langle f, T_n\rangle|^2 < \infty \right\}. \tag{4.7}''$$

ويكون:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} n\ \ \langle f, T_n\rangle\, T_n \quad ; \quad f \in D(T)\,. \tag{4.8}$$

الآن: نعرف القوى الصحيحة للمؤثر T بالشكل:

$$T^0 = I \left(\text{مؤثرالمطابقة}\right) , \ T^1 = \mathrm{T} \ , \ T^2 = T^1(T^1) , \dots ,$$
$$T^k = T^1(T^{k-1}).$$

فنجد ان:

$$(4.9) \qquad D(T^k) = \left\{ f \in L_2 : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} \, |\langle f , T_n \rangle|^2 < \infty \right\}.$$

وبما ان $\boldsymbol{s} \subset \ell_2$، وبحسب الإيزومورفية بين الفضائين ℓ_2 و L_2 ، فإن كل متتالية $\{a_n\}$ من ℓ_2 يقابلها دالة f من L_2 وبالعكس بحيث يكون $a_n = \langle f , T_n \rangle$.
بحسب (4.9) فإن المتتالية $\{\langle f , T_n \rangle\}$ تنتمي إلى $\boldsymbol{s}$. لذلك يمكن تشكيل التطبيق:

$$\Psi : \ D(T^k) \ \longrightarrow \ \boldsymbol{s} \ \ ; \ \ f \ \mapsto \ \Psi(f) = \{\langle f , T_n \rangle\} .$$

هذا التطبيق متباين وغامر. لذلك تصح المطابقة:

$$D(T^k) \ni f \ \leftrightarrow \ \{\langle f , T_n \rangle\} \in \ \boldsymbol{s}$$

بناءً على ذلك يمكن اعتبار $\boldsymbol{s}$ إيزومورفية مع $D(T^k)$ ، ويكون أيضاً:

$$(4.10) \quad \|\{\langle f , T_n \rangle\}\|_k^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} \, |\langle f , T_n \rangle|^2 = \|T^k f\|_{L_2}^2 \ ; \ \ k = 0, 1, 2, \dots$$

5- كثيرات حدود تشيبيشيف كقاعدة لفضاء نووي والفضاء الثنوي له

في هذه الفقرة سنشكل فضاءً نووياً، نرمز له بـ $\mathfrak{D}$، (إيزومورفي مع الفضاء $\boldsymbol{s}$)، ويسمى عادة فضاء الاختبار، وهو فضاء جزئي من فضاء هيلبرت L_2، وسوف نبين أن كثيرات حدود تشيبيشيف $T_n(x)$ المذكورة في الفقرة السابقة تشكل قاعدة لهذا الفضاء.
إضافة لذلك: سنبين أنها تشكل أيضاً قاعدة للفضاء الثنوي $\mathfrak{D}'$ ، ونستنتج قاعدة (معممة) للفضاءات L_p ، حيث $1 \leq p < \infty$. هنا: سنستفيد من كون كثيرات الحدود $T_n(x)$ تشكل قاعدة منظمة متعامدة في فضاء هيلبرت L_2. [14]

(5-1) تعريف: نرمز بـ $\mathfrak{D}$ لمجموعة جميع التوابع $\varphi \in L_2$ والتي تحقق:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{2k}|\langle \varphi, T_n\rangle|^2 < \infty \quad ; \quad \forall k = 0,1,2,\dots$$

ونسمي $\mathfrak{D}$ فضاء الاختبار.

(2−5) ملاحظة:(أ) المجموعة $\mathfrak{D}$ ليست خالية فهي تحوي (على الأقل) $T_n(x)$ وتركيباتها الخطية، ينتج ذلك من كون الجملة $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ متعامدة ومنظمة، و من أجل كل m مثبت يكون لدينا:

$$|||T_m|||_k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k}|\langle T_m, T_n\rangle|^2 = m^{2k} \quad ; \quad (\ m = 0,1,2,\dots)$$

(ب) إذا عرّفنا الأعداد $|||\varphi|||_k$ بالشكل:

$$|||\varphi|||_k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k}|\langle \varphi, T_n\rangle|^2 \quad ; \ k = 0,1,2,\dots \tag{5.1}$$

نحصل على أسرة من أنصاف النظائم $\left\{|||\varphi|||_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ على $\mathfrak{D}$ وتحقق:

$$|||\varphi|||_0 \le |||\varphi|||_1 \le |||\varphi|||_2 \ \dots \ ; \ \varphi \in \mathfrak{D} \tag{5.2}$$

(جـ) بالاستفادة من (5.2) يكون:

$$|||\varphi|||_k = \|T^k\varphi\|_{L_2} \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D} \ , \ k = 0,1,2,\dots \tag{5.3}$$

(3−5) تعريف: يقال عن متتالية $\{\varphi_n\}$ من $\mathfrak{D}$ إنها متقاربة من التابع φ إذا كان:

$$\|\varphi_N - \varphi|_k \longrightarrow 0 \ ; \ N \to \infty \ , \ \forall k = 0,1,2,\dots.$$

والآن نوجد أهم خواص الفضاء $\mathfrak{D}$.

(4−5) مبرهنة: $\mathfrak{D}$ فضاء تام مع أسرة أنصاف النظائم $\left(\left\{|||\varphi|||_k\right\}_{k=0}^{\infty}\right)$.

الإثبات: لتكن $\{\varphi_N\}$ متتالية كوشي في $\mathfrak{D}$. هذا يعني:

$$|||f_M - f_N|||_k < \varepsilon \ ; \ N > M > N_0(\varepsilon) \ , \ k = 0,1,2,\dots \ (\varepsilon > 0).$$

بما أنّ التوابع φ_N تنتمي للفضاء L_2 فيكون لدينا بحسب مساواة بارسيفال:

$$\|\varphi_N - \varphi_M\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \varphi_N - \varphi_M, T_n \rangle|^2$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi_N - \varphi_M, T_n \rangle|^2 < \varepsilon^2 \; ; \; N > M > N_0(\varepsilon) .$$

وبالتالي المتتالية $\{\varphi_N\}$ متقاربة في الفضاء L_2 ، ولنضع $\lim_{N\to\infty} \varphi_N = \varphi_0$.

الآن ليكن K عدداً طبيعياً مثبتاً ، ولنكتب:

$$\sum_{n=1}^{K} n^{2k} |\langle \varphi_0 - \varphi_N, T_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{K} n^{2k} |\langle (\varphi_0 - \varphi_M) + (\varphi_M - \varphi_N), T_n \rangle|^2$$
$$\leq 2 \left(\sum_{n=1}^{K} n^{2k} |\langle (\varphi_0 - \varphi_M), T_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{K} n^{2k} |\langle (\varphi_M - \varphi_N), T_n \rangle|^2 \right).$$

بحسب الفرضيات فإنّ الحد الثاني في الطرف الأيمن أصغر من ε^2، ويمكن جعل الحد الأول أصغر من ε^2 باختيار M كبير بشكل كاف وبشكل مستقل عن K . لذلك يكون:

$$\sum_{n=1}^{K} n^{2k} |\langle (\varphi_0 - \varphi_M), T_n \rangle|^2 \leq 4\varepsilon^2 \quad ; \quad N > N_0(\varepsilon) .$$

وبما أنّ الطرف الأيمن مستقل عن K فيمكن جعل $K \longrightarrow \infty$ لنجد $(\varphi_0 - \varphi_M) \in \mathfrak{D}$ ، وبالتالي :

$$\varphi_0 = (\varphi_0 - \varphi_M) + \varphi_M \in \mathfrak{D} .$$

ومنه نحصل على المطلوب.

(5-5) مبرهنة: (1) يمكن نشر كل $\varphi \in \mathfrak{D}$ بسلسلة فوريه من الشكل :

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle T_n . \qquad (5.4)$$

وهذه السلسلة متقاربة في $\mathfrak{D}$ من φ نفسه.

(2) كل سلسلة من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n$ ، حيث $a_n \in \mathbb{C}$ ، تكون متقاربة في $\mathfrak{D}$ إذا وفقط وإذا تحقق الشرط التالي:

من أجل كل عدد صحيح غير سالب k تكون السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} n^{2k}|a_n|^2$ متقاربة. فإذا تحقق هذا الشرط ورمزنا بـ φ لمجموعها، فيكون: $a_n = \langle \varphi, u_n \rangle$.

الإثبات:

(1)- ليكن $\varphi \in \mathfrak{D}$ ، عندئذ يكون $\varphi \in L_2$ ، وبالتالي له السلسلة .(التقارب في L_2):

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle T_n \, .$$

لنضع الآن:

$$\varphi_N = \sum_{n=0}^{N} \langle \varphi, T_n \rangle T_n \quad ; \quad N = 1,2, \ldots$$

فنجد أنّ $\varphi_N \in \mathfrak{D}$ من أجل كل N ، كما أن:

$$\varphi - \varphi_N = \sum_{j=N+1}^{\infty} \langle \varphi, T_j \rangle T_j \, .$$

ويكون لدينا:

$$\left\| \left| \varphi - \varphi_N \right| \right\|_k^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} \left| \langle \varphi - \varphi_N, T_n \rangle \right|^2$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi, T_n \rangle|^2 \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 \, .$$

أي أنّ $\{\varphi_N\}$ متقاربة في $\mathfrak{D}$ من التابع φ وبالتالي (5.4) صحيحة.

(2) لنفرض أنّ السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ متقاربة في $\mathfrak{D}$ ولنرمز لمجموعها بـ φ، فيكون:

$$\langle \varphi, T_n \rangle = \langle \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j \, , T_n \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left| \langle T_j, T_n \rangle \right|^2 = a_n \, .$$

من ناحية ثانية لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} \left| \langle \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j \, , T_n \rangle \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |a_n|^2 \, .$$

ومنه نحصل على المطلوب.

(5−6) نتيجة: (1) كثيرات حدود تشيبيشيف $\{T_n(x)\}$ تشكل قاعدة للفضاء $\mathfrak{D}$.

(2) الفضاءان $\mathfrak{D}$ و $\boldsymbol{s}$ إيزومورفيان (كما ذكرنا في بداية الفقرة)، ويتم التأكد من ذلك كما يلي (مع الاستفادة من الإثبات السابق)، حيث نشكل التطبيق:

$$\Phi : \mathfrak{D} \longrightarrow \boldsymbol{s} \quad ; \quad f \mapsto \Phi(\varphi) = \{\langle \varphi , T_n \rangle\} .$$

هذا التطبيق متباين وغامر. لذلك تصح المطابقة:

$$(*) \qquad \mathfrak{D} \ni \varphi \leftrightarrow \{\langle \varphi , T_n \rangle\} \in \boldsymbol{s} .$$

ويكون :

$$\|\Phi(\varphi)\|_k^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi , T_n \rangle|^2 = \|\|\varphi\|\|_k^2 \quad ; \quad \forall \varphi \in \boldsymbol{s} .$$

إضافة لذلك يكون لدينا المقابلة:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} D(T^k) = \mathfrak{D} \leftrightarrow \boldsymbol{s} = \bigcap_{k=0}^{\infty} D(A^k) ,$$

حيث A هو المؤثر المذكور في الملاحظة (2−4) والمبرهنة (2−5) و T هو مؤثر تشيبيشيف.

(3) بناءً على ماتقدم والمقابلة (*) يمكن الحصول على قاعدة للفضاء $\boldsymbol{s}$ بواسطة T_n كما يلي:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle T_n \leftrightarrow \{\langle \varphi , T_n \rangle\} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle e_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle \{\langle T_n , T_m \rangle\} .$$

في المبرهنة التالية نبين أن الفضاء $\mathfrak{D}$ محتوى في كل الفضاءات L_p وليس فقط في L_2.

(5-7) مبرهنة: الطمر المستمر $\mathfrak{D} \hookrightarrow L_p$ محقق من أجل $1 \leq p < \infty$.

الإثبات: بحسب ماسبق، من الواضح أنّ المبرهنة صحيحة في حالة $p = 2$.

الآن: ليكن $\varphi \in \mathfrak{D}$ ،ولنضع:

$$\varphi_N = \sum_{n=0}^{N} \langle \varphi, T_n \rangle T_n \quad ; \quad N = 1,2,3, \dots$$

فنجد أنّ $\varphi_N \in L_p$ من أجل $1 \leq p < \infty$، ولدينا من أجل $N > M > N_0(\varepsilon)$:

$$\|\varphi_N - \varphi_M\|_{L_p} = \left\| \sum_{n=M+1}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle T_n \right\|_{L_p} \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |\langle \varphi, u_n \rangle| \, \|T_n\|_{L_p} \leq$$

$$\leq c \sum_{n=M+1}^{N} n^k |\langle \varphi, T_n \rangle| \, . \, n^{-k}$$

$$\leq c \left(\sum_{n=M+1}^{N} n^{2k} |\langle \varphi, T_n \rangle|^2 \right)^{1/2} . \left(\sum_{n=M+1}^{N} n^{-2k} . \right)^{1/2} \leq C \, |||\varphi|||_k \, . \, \varepsilon \, .$$

لذلك فإنّ $\{\varphi_N\}$ متتالية كوشي في L_p ، فهي متقاربة ولنفرض أنّ:

$$g = \lim_{N \to \infty} \varphi_N = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \langle \varphi, T_n \rangle T_n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle T_n \, .$$

من ناحية ثانية: لدينا من أجل $m = 0,1,2, \dots$:

$$\langle g, u_m \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle \langle T_n, T_m \rangle = \langle \varphi, T_m \rangle \, .$$

من ذلك ينتج أنّ: $\varphi = g$ وبالتالي $\mathfrak{D} \subset L_p$.

لدينا الآن من أجل $\varphi \in \mathfrak{D}$ (وبحسب متراجحة شفارتز):

$$\|\varphi\|_{L_p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\langle \varphi, T_n \rangle| \, . \, n^{-k} . \, \|T_n\|_{L_p}$$

$$\leq c\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k}|\langle\varphi, T_n\rangle|^2\right)^{1/2} .\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}\right)^{1/2} .$$

$$\leq \|\|\varphi\|\|_k . C .$$

ومنه نحصل على المطلوب .

ننتقل الآن لدراسة الفضاء الثنوي للفضاء $\mathfrak{D}$، ونرمز له بـ $\mathfrak{D}'$ ، وهو فضاء الداليات الخطية المستمرة على $\mathfrak{D}$. نرمز للداليات بأحرف كبيرة $T, G, \ldots$ ، ولكل منها الشكل:

$$F : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad \varphi \longmapsto F(\varphi).$$

وتسمى عادة توزيعات.

نقول عن توزيعين $F, G \in \mathfrak{D}'$ إنّهما متساويان، ونكتب $F = G$ ، إذا كان:

$$F(\varphi) = G(\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}.$$

وبشكل خاص: إذا كان $F(\varphi) = 0$ فنكتب $F = 0$ ونسميه التوزيع الصفري.

نقول عن متتالية توزيعات $\{F_N\}$ إنّها متقاربة من التوزيع F إذا كان:

$$F_N(\varphi) \xrightarrow[N\to\infty]{} F(\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D} .$$

من أجل التوزيع $F \in \mathfrak{D}$ نسمي الأعداد $F(T_n)$ عوامل فورييه للتوزيع F ونكتب:

$$a_n(F) = F(T_n) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

لدينا الآن الاختبار التالي:

(5−8) مبرهنة: ليكن $F : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ دالياً خطيّاً. عندئذ: يتكافأ الشرطان التاليان:

(1) $F \in \mathfrak{D}'$.

(2) يوجد عدد طبيعي k وعدد ثابت موجب $\boldsymbol{c}$ بحيث إنّ:

$$|F(\varphi)| \leq c.\|\|\varphi\|\|_k \quad ; \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D} . \qquad (5.5)$$

الإثبات: (2) $\Longleftarrow$ (1): لدينا F دالي خطي فرضاً ولنثبت أنّه مستمر.

لتكن $\{\varphi_N\}$ متتالية من عناصر $\mathfrak{D}$ ومتقاربة من φ عندئذ:

$$|F(\varphi_N) - F(\varphi)| = |F(\varphi_N - \varphi)| \leq c.\,|||\varphi_N - \varphi|||_k \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

(1) $\Longleftarrow$ (2): نفرض جدلاً عدم وجود العددين c و k بحيث تتحقق المتراجحة (5.5). عندئذ:

توجد في $\mathfrak{D}$ متتالية $\{\varphi_N\}$ بحيث يكون $|F(\varphi_N)| = 1$ ، كما أنّ:

$$1 = |F(\varphi_N)| > N.\,|||\varphi|||_N \quad ; \quad N = 1,2,\ldots.$$

ولكن من أجل $k < N$ يكون لدينا:

$$|||\varphi|||_k \leq |||\varphi|||_N < \frac{1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

ومنه ينتج أنّ $\varphi_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ في $\mathfrak{D}$ ، وهذا يخالف الفرض. وبذلك يتم المطلوب.

(5–9) ملاحظة: تفيدنا المبرهنة السابقة لإثبات أنّ $\mathfrak{D}'$ يحوي جميع الفضاءات L_p.

من أجل كل $f \in L_p$ (مثبت) نعرّف دالياً خطياً $F_f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ بالشكل:

$$F_f(\varphi) = \int_{-1}^{+1} f(x)\varphi(x)\,dx \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D}. \tag{5.6}$$

بحسب متراجحة هولدر للتكاملات $\left(\text{حيث } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ والمبرهنة (5–7) يكون لدينا :

$$|F_f(\varphi)| \leq \|f\|_p.\,\|\varphi\|_q \leq c.\,\|f\|_p.\,|||\varphi|||_k \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D}.$$

وبحسب المبرهنة (5–8) يكون $F_f(\varphi) \in \mathfrak{D}'$.

والآن نشكل التطبيق:

$$\Phi : L_p \longrightarrow \mathfrak{D}' \quad ; \quad f \longmapsto \Phi(f) = F_f\,,$$

ليكن $f, g \in L_p$ وليكن $F_f, F_g \in \mathfrak{D}'$ التوزيعين الموافقين لهما. إذا كان $F_f = F_g$ فيكون:

$$F_f(\varphi) = F_g(\varphi) \quad ; \quad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}.$$

لذلك يكون:

$$\int_{-1}^{+1}[f(x)-g(x)]\varphi(x)\,dx=0 \quad ; \quad \forall\,\varphi\in\mathfrak{D}$$

من ذلك ينتج أنّ $f(x)-g(x)=0$ وبالتالي $f=g$ في L_p. أي أن التطبيق Φ متباين،

وبالتالي تصح المطابقة:

$$L_p \ni f \leftrightarrow F_f \in \mathfrak{D}' . \qquad (5.7)$$

بناءً على المطابقة السابقة يمكن اعتبار أنّ كل $f\in L_p$ يمثل توزيعاً F_f من $\mathfrak{D}'$، ويمكن أن نرمز بـ f لهذا التوزيع. لذلك يمكن كتابة (5.6) بالشكل:

$$f(\varphi)=\int_{-1}^{+1}f(x)\varphi(x)\,dx \quad ; \quad \varphi\in\mathfrak{D}\ ,\ (f\in L_p). \qquad (5.8)$$

وهنا لدينا الحالات الخاصة التالية:

- من أجل $\varphi=T_n$ يكون:

$$f(T_n)=\int_{-1}^{+1}f(x)T_n(x)\,dx=a_n(f)\,. \qquad (5.9)$$

- من أجل $f=T_n$ يكون:

$$T_n(\varphi)=\int_{-1}^{+1}T_n(x)\varphi(x)\,dx=\langle\varphi,T_n\rangle=\langle T_n,\,\overline{\varphi}\rangle. \qquad (5.10)$$

- ومن أجل $f=T_n$ و $\varphi=T_m$ يكون:

$$T_n(T_m)=\int_{-1}^{+1}T_n(x)T_m(x)\,dx=\langle T_n,T_m\rangle=\delta_{n,m}. \qquad (5.11)$$

إضافة لذلك وبناءً على المطابقة (5.7) يمكن أن نكتب:

$$|f(\varphi)|\le c.\|f\|_p.|||\varphi|||_k \quad ; \quad \varphi\in\mathfrak{D}\,.$$

وبذلك نحصل على الطمر المستمر $L_p\hookrightarrow\mathfrak{D}'$، حيث $1\le p<\infty$. من هذا والمبرهنة (5-7) يكون: $\mathfrak{D}\hookrightarrow L_p\hookrightarrow\mathfrak{D}'$ ، حيث $1\le p<\infty$.

الآن: ليكن $f\in L_p$ وليكن $F_f\in\mathfrak{D}'$ التوزيع الموافق، فتكون عوامل فورييه لهذا التوزيع:

$$a_n(F_f)=F_f(T_n)=\int_{-1}^{+1}f(x)T_n(x)\,dx=a_n(f) \quad ; \quad n=0,1,2,\dots$$

أي أن عوامل فورييه للتوزيع F_f هي نفسها عوامل فورييه للدالة f المنتجة لهذا التوزيع.

المبرهنة التالية تبين لنا أن كثيرات الحدود $T_n(x)$ تشكل قاعدة للفضاء $\mathfrak{D}'$.

(5-10) مبرهنة: (1) كل توزيع $F \in \mathfrak{D}'$ يمكن نشره بسلسلة من الشكل:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(F) T_n \,. \qquad (5.12)$$

(2) السلسلة $\sum_{n=01}^{\infty} a_n u_n$ ، حيث $a_n \in \mathbb{C}$ ، تكون متقاربة في $\mathfrak{D}'$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

يوجد عدد طبيعي k بحيث تكون السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}|a_k|^2$ متقاربة. فإذا تحقق

ذلك ورمزنا بـ F لمجموع السلسلة فيكون: $a_n = a_n(F)$.

الإثبات: (1) ليكن $F \in \mathfrak{D}'$. عندئذ: من أجل كل $\varphi \in \mathfrak{D}$ يكون لدينا بحسب (5.10) :

$$F(\varphi) = F\left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle T_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, T_n \rangle F(T_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\varphi) a_n\,(F) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(F) T_n\right)(\varphi)\,.$$

ومنه نحصل على (5.12).

(1) لنأخذ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ وهي:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n\, T_n \quad ; \quad N = 1,2,\ldots$$

عندئذ من أجل أي $\varphi \in \mathfrak{D}$ يكون بحسب (5.10):

$$|\, S_N\,(\varphi)| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n T_n\,(\varphi)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n \langle \varphi, T_n \rangle\right|$$

$$\leq \left(\sum_{n=0}^{N} n^{-2k}|a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N} n^{2k}.|\langle\varphi, T_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{1/2}}$$

فإذا كانت السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2k}|a_n|^2$ متقاربة ومجموعها c نجد أنّ:

$$\left|\left(\sum_{n=0}^{N} a_n T_n\right)(\varphi)\right| \leq c|||\varphi|||_k \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D}\,.$$

بجعل $N \to \infty$ نحصل على المطلوب بحسب المبرهنة (5-8) .

(5-11) **نتيجة:** ليكن $f \in L_p$ وليكن $F_f \in \mathfrak{D}'$ التوزيع الموافق ، عندئذ يكون بحسب (5.9):

$$F_f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(F_f)T_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)T_n = f\,.$$

(حيث يكون التقارب في $\mathfrak{D}'$. بذلك نحصل على نشر توزيعي (معمم) لكل تابع $f \in L_p$).
هذه النتيجة تنسجم تماماً مع المطابقة (5.7) .

(5-12) **ملاحظة:** تجدر الإشارة هنا أنه، وبشكل مشابه لما فعلناه في هذا البحث، يمكن الحصول على قواعد أخرى لفضاءات نووية، مثلاً: دوال ليجندر، لاجير ... الخ، طبعاً مع مراعاة خصوصية كل جملة من تلك الدوال.

المراجع

[1] V. Hutson; J. S. Pym (1980): Applications of Functional Analysis and Operator Theory. *Oxford University Press*.

[2] Triebel, H. (1992): Higher Analysis.
Johann Ambrosius Barth, Leipzig, Berlin.

[3] E. Kreyszig (1978)**:**Introductory Functional Analysis with Applications.
John Wiley & Sons, Inc.

[4] R. Meise; D. vogt (2023): Introduction to Functional Analysis. *Oxford University Press.*

[5] F. Treves (2006)**:** Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. *Dover Publications, New York*

[6] Y. C. Wong (2006)**:** Schwartz Spaces, Nuclear Spaces, and Tensor Product. *Springer, Berlin.*

[7] H. Nlend (2012)**:** Nuclear and Conuclear Spaces. Introductory Courses on Nuclear and Conuclear Spacesin the Light of Duality. *North Holland, Amstrdam.*

[8] M. C. Mason ; D. C. Handscomb (2003)**:** Chebyshev Polynomials. *Chapman & Hall/CRC press LLc.*

[9] A.M. Mathai *;* H. Haubold (2008)**:** Special Functions for Applied Scientists. *Springer Science+Business Media,* LLC

[10] N. M. Temme (1996)**:** Special Functions. An Introduction to the Classical. Functions of Mathematical Physics. *John Wiley & Sons, New York.*

[11] P. Garrett (2017)**:**Nuclear Space, Schwartz Kernel Theorem. *http://www. Math.umn.edu.*

[12] A. Grothendieck (1973)**:** Topological Vector Spaces. *Gordon and Breach, London.*

[13] A.Pietsch (1972):Nuclear Locally Convex Spaces. Springer-Verlag,Berlin,Heidelberg,New York.

[14] S.Kumar (2025): Analyzing the Relationship between Free Locally Convex Spaces and Nuclear Space Concept. Bihar university,India.