قواعد غروبنر فوق ساحات بروفير

جامعة حمص– كلية العلوم– قسم الرياضيات

طالبة الماجستير: مايا موفق منصور

إشراف:

الدكتورة رانية جنيد　　　　الدكتورة نور رضوان

ملخص البحث

في هذا البحث قمنا بدراسة ساحات بروفير وعلاقتها ببعض الأنواع الأخرى من الساحات الصحيحة، وخاصة الساحات التقديرية، وقد توصلنا إلى أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الساحة الصحيحة ساحة بروفير موضعية هو أن تكون هذه الساحة ساحة تقديرية.
عملنا في هذا البحث على دراسة قواعد غروبنر فوق ساحات بروفير، وانطلاقاً من العلاقة بين ساحات بروفير والساحات الأخرى كالساحة التقديرية، توصلنا إلى العديد من النتائج أهمها ما يتعلق بمسألة الانتماء لمثالية في حلقة الحدوديات فوق ساحة بروفير الموضعية، والتوصل إلى الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة مولدة لمثالية ما في ساحة بروفير الموضعية قاعدة غروبنر، كما توصلنا إلى إمكانية تطبيق خوارزمية $(\boldsymbol{Buchberger})$ في الساحات التقديرية من أجل حساب قواعد غروبنر في ساحات بروفير الموضعية والنيوثرية.

الكلمات المفتاحية:
الساحة التقديرية، الساحة التقديرية المتقطعة، ساحة بروفير، قواعد غروبنر.

Grobner Bases over Prufer Domains

Homs University – Faculty of Science – Mathematics Department

Master's Student: Maya Mowafaq Mansour

Supervised by:

Dr.Rania Junaid **Dr.Nor Radwan**

Abstract

In this research, we studied Prufer domains and their relationship with some other types of integer domains, especially Valuation domains. We concluded that the necessary and sufficient condition for an integer domain to be a local Prufer domain is that it be a Valuation domain.

In this research, we worked on studying Grobner bases over Prufer domains based on the relationship between Prufer domains and other domains, such as the Valuation domain. We reached many results the most important of them is the one which is related to the ideal membership problem in the polynomials ring over the local Prufer domain, and reaching to the necessary and sufficient condition for a generating set of an ideal to be Grobner basis in the local Prufer domain. Furthermore, we concluded that it is possible to apply the Buchberger's algorithm in the Valuation domains in order to compute Grobner bases in the local and Noetherian Prufer domains.

Kay Words:
Valuation domain, Discrete valuation domain, Prufer domain, Grobner bases.

مقدمة البحث:

تعد قواعد غروبنر من الأساليب المهمة التي استخدمها الكثير من العلماء في حل المسائل، وذلك خلال دراستهم في مختلف مجالات الرياضيات التطبيقية والبحتة، وقد ظهرت قواعد غروبنر عام (1965) على يد العالم غروبنر، وسميت بهذا الاسم نسبة إليه، وهي نوع خاص من المجموعات المولدة لمثالية في حلقة الحدوديات بأكثر من متغير، ويعد العالم $(B.Buchberger)$ من أبرز العلماء الذين قدموا نتائج مهمة فيما يتعلق بقواعد غروبنر، حيث قام بتصميم خوارزمية لإيجاد هذه القواعد، وذلك من أجل إيجاد حل لمسألة انتماء حدودية إلى مثالية في حلقة كثيرات الحدود فوق حقل ما (حيث إنه إذا كانت G قاعدة غروبنر للمثالية I، عندئذٍ أياً كانت الحدودية f من حلقة الحدوديات فوق حقل K، فإن f تنتمي للمثالية I إذا وفقط إذا كان باقي قسمة f بواسطة G يساوي الصفر)، وقد نالت هذه المسألة اهتماماً كبيراً من قبل الباحثين الذين عملوا على تعميم خوارزمية $(Buchberger)$ في العديد من الساحات، مثل ساحة المثاليات الرئيسية والساحات التقديرية وغيرها من الساحات. قمنا في هذا البحث بدراسة ساحات بروفير، وإضافة بعض الشروط عليها من أجل حساب قواعد غروبنر، وذلك انطلاقاً من العلاقة بين ساحات بروفير وبعض الساحات الشهيرة التي تمت دراسة قواعد غروبنر عليها سابقاً [7], [8], [9].

هدف البحث:

نهدف في بحثنا هذا إلى دراسة أحد تطبيقات قواعد غروبنر فوق ساحات بروفير الموضعية، والتي يمكننا من خلالها تحديد ما إن كانت حدودية ما تنتمي لمثالية في حلقة الحدوديات فوق ساحة بروفير الموضعية، ونهدف أيضاً إلى إيجاد خوارزمية من أجل حساب قواعد غروبنر في ساحة بروفير الموضعية والنيوثرية.

جميع الحلقات التي سنتعامل معها في دراستنا ضمن هذه البحث هي ساحات صحيحة مالم نذكر خلاف ذلك.

1. ساحات بـروفـيـر:

تعريف. 1.1: [5]

تُسمى الساحة الصحيحة $\boldsymbol{V}$ ساحة تقديرية $(\boldsymbol{Valuation\ domain})$، إذا كان من أجل أي مثاليتين $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ من $\boldsymbol{V}$، فإنه إما $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ أو $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$.

تمهيدية. 1.1: [5]

لتكن $\boldsymbol{V}$ ساحة تقديرية، عندئذٍ كل مثالية منتهية التوليد في $\boldsymbol{V}$ تكون مثالية رئيسية.

مبرهنة. 1.1: [5]

لتكن $\boldsymbol{V}$ ساحة صحيحة نيوثرية وليست حقلاً، عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1. $\boldsymbol{V}$ ساحة تقديرية.
2. مجموعة العناصر غير القابلة للقلب في $\boldsymbol{V}$ تشكل مثالية رئيسية غير صفرية في $\boldsymbol{V}$.
3. الساحة $\boldsymbol{V}$ مغلقة بشكل كامل، وتملك مثالية أولية فعلية وغير صفرية وحيدة.

تعريف. 2.1: [2]

تُسمى الساحة الصحيحة $\boldsymbol{R}$ ساحة تقديرية متقطعة $(\boldsymbol{Discrete\ valuation\ domain})$، إذا كانت $\boldsymbol{R}$ ساحة مثاليات رئيسية، وتملك مثالية أولية غير صفرية وحيدة.

مبرهنة. 2.1: [2]

لتكن $\boldsymbol{R}$ ساحة صحيحة، عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة:

1. $\boldsymbol{R}$ ساحة تقديرية متقطعة.
2. $\boldsymbol{R}$ساحة مثاليات رئيسية وفيها مثالية أعظمية وحيدة $\boldsymbol{P} \neq \boldsymbol{0}$.

3. R ساحة صحيحة نيوثرية وموضعية. تملك مثالية أعظمية رئيسية وحيدة غير صفرية.
4. R ساحة صحيحة نيوثرية ومغلقة بشكل كامل، وتملك مثالية أولية غير صفرية وحيدة.

مبرهنة. 3.1:

لتكن R ساحة صحيحة وليست حقلاً، عندئذٍ الشرطان الآتيان متكافئان:

1. R ساحة تقديرية متقطعة.
2. R ساحة تقديرية ونيوثرية.

البرهان:

$\mathbf{1} \Longrightarrow \mathbf{2}$ ينتج مباشرةً من المبرهنة$(\mathbf{2,1})$.

$\mathbf{2} \Longrightarrow \mathbf{1}$ لتكن R ساحة تقديرية ونيوثرية، عندئذٍ حسب التمهيدية$(\mathbf{1,1})$، فإن كل مثالية في R هي مثالية رئيسية، ومنه تكون R ساحة مثاليات رئيسية، وحسب المبرهنة$(\mathbf{1,1})$، فإن R تملك مثالية أولية غير صفرية وحيدة، بالتالي حسب التعريف، تكون R ساحة تقديرية متقطعة.

مبرهنة. 4.1: $[\mathbf{2}]$

لتكن R ساحة صحيحة موضعية وليست حقلاً، عندئذٍ R ساحة تقديرية متقطعة إذا وفقط إذا كانت كل مثالية كسرية غير صفرية لـ R عكوسة.

تعريف. 3.1: $[\mathbf{5}]$

تُسمى الساحة الصحيحة R ساحة بروفير $(\boldsymbol{Prufer\ domain})$، إذا كانت كل مثالية منتهية التوليد وغير صفرية في R عكوسة.

مثال:

- كل ساحة مثاليات رئيسية هي ساحة بروفير.
- حلقة كثيرات الحدود بمتغير واحد فوق حقل ما K هي ساحة بروفير.

مبرهنة. 5.1: [5]

إذا كانت $\boldsymbol{R}$ ساحة بروفير، عندئذٍ كل مثالية كسرية منتهية التوليد لـ $\boldsymbol{R}$عكوسة.

البرهان:

لتكن $\boldsymbol{A}$ مثالية كسرية منتهية التوليد لـ $\boldsymbol{R}$، عندئذٍ يوجد عنصر $\boldsymbol{0 \neq d \in R}$ بحيث تكون $\boldsymbol{dA}$ مثالية في $\boldsymbol{R}$،

لنثبت أن المثالية $\boldsymbol{dA}$ منتهية التوليد.

بما أن $\boldsymbol{A}$ مثالية منتهية التوليد، عندئذٍ توجد $\boldsymbol{a_1, \dots, a_s \in A}$ بحيث $\boldsymbol{A = \langle a_1, \dots, a_s \rangle}$، ومن ثم

$$\forall\, \boldsymbol{da \in dA : da = d\sum_{i=1}^{s} r_i a_i = \sum_{i=1}^{s} r_i d a_i \ ;\ r_i \in R}$$

ومنه نجد أن المثالية $\boldsymbol{dA}$ منتهية التوليد، وبما أن $\boldsymbol{R}$ ساحة بروفير، عندئذٍ فإن المثالية $\boldsymbol{dA}$ تكون عكوسة، وبالتالي توجد مثالية كسرية $\boldsymbol{B}$ لـ $\boldsymbol{R}$ بحيث $\boldsymbol{(dA)B = R}$، فيكون $\boldsymbol{A(dB) = R}$، ومنه المثالية $\boldsymbol{A}$ عكوسة.

مبرهنة. 6.1: [5]

إذا كانت $\boldsymbol{R}$ ساحة صحيحة، عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة:

1. $\boldsymbol{R}$ ساحة بروفير.
2. كل مثالية غير صفرية من $\boldsymbol{R}$ ومولدة بعنصرين عكوسة.
3. إذا كان $\boldsymbol{AB = AC}$، حيث $\boldsymbol{A, B, C}$ مثاليات من $\boldsymbol{R}$ و $\boldsymbol{A}$ مثالية غير صفرية منتهية التوليد، عندئذٍ
   $\boldsymbol{B = C}$.
4. حلقة النسب $\boldsymbol{R_P}$ ساحة تقديرية، وذلك من أجل أي مثالية أولية فعلية $\boldsymbol{P}$ من $\boldsymbol{R}$.
5. $\boldsymbol{A(B \cap C) = AB \cap AC}$، وذلك أياً كانت المثاليات $\boldsymbol{A, B, C}$ من $\boldsymbol{R}$.
6. $\boldsymbol{(A + B)(A \cap B) = AB}$، وذلك أياً كانت المثاليات $\boldsymbol{A , B}$ من $\boldsymbol{R}$.

7. إذا كانت A , C مثاليات من R حيث Cمثالية غير صفرية ومنتهية التوليد و $A \subseteq C$، فإنه توجد مثالية B من R تحقق $A = BC$.
8. $(A + B): C = A: C + B: C$، وذلك أياً كانت المثاليات A, B, C من R حيث C مثالية منتهية التوليد.
9. $C: (A \cap B) = C: A + C: B$، وذلك أياً كانت المثاليات A, B, C من R بحيث A, B مثاليات منتهية التوليد.
10. $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$، وذلك أياً كانت المثاليات A, B, C من R.

نتيجة. 1.1: [5]

لتكن R ساحة صحيحة، عندئذٍ R ساحة بروفير إذا وفقط إذا كانت R_M ساحة تقديرية، وذلك من أجل كل مثالية أعظمية M من R.

تمهيدية. 2.1: [5]

لتكن R حلقة و A , B مثاليتين في R، عندئذٍ $A = B$ إذا وفقط إذا كان $A_M = B_M$، وذلك من أجل كل مثالية أعظمية M في R.

مبرهنة. 7.1: [6]

لتكن R ساحة صحيحة، عندئذٍ R ساحة بروفير إذا كانت R_M ساحة بروفير، وذلك من أجل كل مثالية أعظمية M في R.

البرهان:

لتكن A, B, C مثاليات في R بحيث Aمنتهية التوليد وَ $AB = AC$. ولنثبت أن $B = C$.

يكفي أن نبرهن أن $BR_M = CR_M$، وذلك من أجل كل مثالية أعظمية M في R.

لتكن M مثالية أعظمية ما في R، عندئذٍ تكون AR_Mمثالية منتهية التوليد و $ABR_M =$ ACR_M، ومنه $AR_M \,.\, BR_M = AR_M \,.\, CR_M$.
وبما أن R_M ساحة بروفير، عندئذٍ فإن $BR_M = CR_M$، وبالتالي حسب التمهيدية(2.1)، يكون $B = C$.

سنقوم بدراسة العلاقة بين ساحات بروفير الموضعية والحلقات التقديرية، وذلك من خلال المبرهنة الآتية، والتي سيكون لها دوراً أساسياً في دراستنا لقواعد غروبنر فوق ساحات بروفير في الفقرة الثالثة من هذا البحث.

مبرهنة. 8.1:

لتكن R ساحة صحيحة موضعية، عندئذٍ الشرطان الآتيان متكافئان:

1. R ساحة بروفير.
2. R ساحة تقديرية.

البرهان:

$1 \Leftarrow 2$. لنفرض أن R ساحة بروفير موضعية، عندئذٍ تكون R_P ساحة تقديرية، وذلك من أجل المثالية الأعظمية P.
لتكن A , B مثاليات في الحلقة R، عندئذٍ تكون $AR_P \,, BR_P$ مثاليات في الحلقة R_P، ولنبين أن $A \subseteq B$. لنفرض أن $AR_P \subseteq BR_P$.
أياً كان $a \in A$، فإن $a/_1 \in BR_P$، عندئذٍ يوجد عنصر $r \in R \backslash P$ بحيث $ra \in B$، ولتكن $C = \langle r \rangle$ المثالية المولدة بالعنصر r.
إذا كانت $C \neq R$، عندئذٍ فإن C تكون محتواة في المثالية الأعظمية P، وهذا غير ممكن، لذلك $C = R$، عندئذٍ $1 \in C$، وهكذا يوجد $x \in R$ بحيث $1 = xr$، بالتالي $a = xra \in B$، ومنه نجد أن $A \subseteq B$، أي أن R ساحة تقديرية.
$2 \Leftarrow 1$. لنفرض أن R ساحة تقديرية، ولتكن A مثالية منتهية التوليد في R، عندئذٍ حسب التمهيدية(1.1)، فإن A تكون مثالية رئيسية، وبالتالي عكوسة، ومنه نجد أن R ساحة بروفير.

2. قواعد غروبنر:

سنقوم في هذه الفقرة بدراسة قواعد غروبنر على الساحات الصحيحة النيوثرية.
لذلك سنعتبر في هذه الفقرة أن أي حلقة R هي ساحة صحيحة نيوثرية دوماً مالم نذكر خلاف ذلك.

تعريف. 1.2: [1]
لتكن $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ حلقة الحدوديات بعدد منتهٍ من المتغيرات فوق R، حيث n عدد صحيح موجب، عندئذٍ:

- تُسمى كل حدودية من الشكل: $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n};\ \alpha_i \in \mathbb{N}$ أحادية حد $(monomial)$ أو جداء قوة $(Power\ product)$، وسنرمز لها اختصاراً X^α حيث $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
- تُسمى كل حدودية في $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ من الشكل: $cX^\alpha\ ;\ c \in R$ حد $(term)$.

سنرمز اختصاراً للحلقة $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ بالرمز $\mathcal{R}$. كما سنرمز لمجموعة كل أحاديات الحد في الحلقة $\mathcal{R}$ بالرمز T^n.

تعريف. 2.2: [1]
لتكن $X^\alpha, X^\beta \in \mathcal{R}$ أحاديتي حد حيث $X^\alpha = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ وَ $X^\beta = x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$، عندئذٍ نقول إن X^α تقسم X^β إذا كان $a_i \le b_i$، وذلك من أجل كل $i = 1, \dots, n$. ونرمز لذلك بالرمز: $X^\alpha | X^\beta$، ومن الواضح أن علاقة يقسم تشكل علاقة ترتيب جزئي على T^n.
ونقول إن aX^α يقسم bX^β حيث $a, b \in R$، إذا كان $X^\alpha | X^\beta$ وَ a يقسم b في R.

نحتاج في دراستنا هذه إلى ترتيب عناصر T^n وفق علاقة ترتيب ثنائية. ومن الجدير بالذكر أنه يوجد هناك عدة أنواع لترتيب الحدود في T^n سنذكر منها في بحثنا هذا الترتيب المعجمي.

تعريف. 3.2: [1]

يعرف الترتيب المعجمي ($lexicographical\ order$) على T^n،
مع اعتبار أن $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ كالتالي: من أجل $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$، عندئذٍ يكون $X^\alpha <_{lex} X^\beta$ إذا وفقط إذا كانت $\alpha_i < \beta_i$، حيث α_i , β_i أول مسقطين مختلفين في α , β بدءاً من اليسار.
سوف نعبر دائماً عن هذا الترتيب بـ "lex".

تعريف. 4.2: [3]

لتكن $f \in \mathcal{R}$، عندئذٍ الحدودية f تكتب بالشكل: $c_\alpha \in R$; $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X^\alpha$ حيث $c_\alpha \neq 0$ من أجل عدد منته فقط، وتُسمى المجموعة $supp(f) = \{X^\alpha;\ c_\alpha \neq 0\}$ حامل f ($support\ of\ f$).
نلاحظ من أجل أي حدودية f فإن $supp(f)$ تكون مجموعة منتهية. كما أن $supp(f) = \emptyset$ إذا وفقط إذا كانت $f = 0$.

تعريف. 5.2: [1]

إذا كانت $>$ علاقة ترتيب حدود على T^n، ولتكن الحدودية $0 \neq f \in \mathcal{R}$، عندئذٍ إن f تكتب بالشكل الآتي:

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X^\alpha$$

حيث $0 \neq c_\alpha \in R$, $X^\alpha \in T^n$.

وبالتالي يمكننا تعريف المفاهيم والرموز الآتية:

- $mdeg(f) = \alpha \in \mathbb{N}^n$; $X^\alpha = max\{X^\alpha \in Supp(f)\ , c_\alpha \neq 0\}$ ($the\ multidegree\ of\ f$).
- $deg(f) = |mdeg(f)|$ درجة الحدودية f ($the\ degree\ of\ f$).

- $lp(f) = X^{mdeg(f)}$ جداء القوة الرئيسي في f $(\boldsymbol{the\ leading\ powerb\ product\ of\ f})$.
- $lc(f) = a_{mdeg(f)}$ المعامل الرئيسي في f $(\boldsymbol{the\ leading\ coefficient\ \ of\ f})$.
- $lt(f) = lc(f)lp(f)$ الحد الرئيسي في f $(\boldsymbol{the\ leading\ term\ of\ f})$.

تعريف. 6.2: [1]

لتكن E مجموعة جزئية من الحلقة $\mathcal{R}$، عندئذٍ المجموعة المعرفة بالشكل الآتي:

$$Lt(E) = \langle\ lt(e)\ ;\ e \in E\ \rangle$$

تكون مثالية في $\mathcal{R}$، وتسمى مثالية الحد الرئيسي لـ E $(\boldsymbol{the\ leading\ term\ ideal\ of\ E})$.

تعريف. 7.2: [4]

نقول إن الحدودية $\mathcal{R} \ni f \neq 0$ قابلة للاختزال (تختزل) بواسطة المجموعة $\mathcal{R} \supseteq G$ إذا كان:

$$.lt(f) \in Lt(G)$$

تعريف. 8.2: [1]

لتكن f و h حدوديتان من $\mathcal{R}$ و $H = \{f_1, \dots, f_s\ ;\ f_i \neq 0\ (1 \le i \le s)\}$ مجموعة جزئية غير خالية من $\mathcal{R}$، نقول إنّ f تختزل بخطوة واحدة إلى h بواسطة H إذا وفقط إذا كانت:

$$h = f - (c_1X_1f_1 + \cdots + c_sX_sf_s)$$

وذلك من أجل $c_1 , \dots , c_s \in R$ وجداءات القوة $X_1 , \dots , X_s$ حيث $lp(f) = X_i lp(f_i)$،

وذلك من أجل كل i عندما $c_i \neq 0$ و $lt(f) = c_1X_1lt(f_1) + \cdots + c_sX_slt(f_s)$،

ونعبر عن ذلك بالرمز: $f \xrightarrow{H} h$.

تعريف. 9.2: [1]

لتكن f و h حدوديتان من $\mathcal{R}$ و $H = \{f_1, \dots, f_s\ ;\ f_i \neq 0\ (1 \leq i \leq s)\}$ مجموعة جزئية غير خالية من $\mathcal{R}$، نقول إنّ f تختزل إلى h بواسطة عناصر H إذا وفقط إذا وجدت مجموعة من الحدوديات $h_1, \dots, h_{t-1} \in \mathcal{R}$ بحيث:

$$f \overset{H}{\rightarrow} h_1 \overset{H}{\rightarrow} h_2 \overset{H}{\rightarrow} h_3 \dots \overset{H}{\rightarrow} h_{t-1} \overset{H}{\rightarrow} h$$

ونعبر عن ذلك بالرمز: $f \overset{H}{\rightarrow}_+ h$، ويكون عندئذٍ $f - h \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.

تعريف. 10.2: [4]

لتكن I مثالية في $\mathcal{R}$ و $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\ ;\ g_i \neq 0\ , (1 \leq i \leq t)\} \subseteq I$، نقول إنَّ G قاعدة غروبنر للمثالية I إذا وفقط إذا كان $LT(G) = LT(I)$.

مبرهنة. 1.2: [1]

لتكن I مثالية غير صفرية في $\mathcal{R}$ و $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\ ;\ g_i \neq 0\ , (1 \leq i \leq t)\} \subseteq I$، عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة:

1. $LT(G) = LT(I)$ (Gقاعدة غروبنر للمثالية I).
2. من أجل أي حدودية $f \in \mathcal{R}$، فإن $f \in I$ إذا وفقط إذا كانت $f \overset{G}{\rightarrow}_+ 0$.
3. أيا كانت الحدودية $f \in I$، عندئذٍ فإن $f = \sum_{i=1}^{m} h_i g_i$حيث: $h_1, h_2, \dots, h_m \in \mathcal{R}$ وَ $lp(f) = max_{1 \leq i \leq m}\{lp(h_i) lp(g_i)\}$.

نتيجة. 1.2: [1]

إذا كانت G قاعدة غروبنر للمثالية I في $\mathcal{R}$، عندئذٍ فإن $\langle G \rangle = I$.

هنا نلاحظ أن قاعدة غروبنر هي نوع خاص من المجموعات المولدة، ولكن من الجدير بالذكر أنه ليس بالضرورة أن تكون كل مجموعة مولدة هي قاعدة غروبنر.

3. قواعد غروبنر فوق ساحات بروفير الموضعية:

ندرس في هذه الفقرة خواص قواعد غروبنر فوق ساحات بروفير الموضعية، وخوارزمية إيجاد قاعدة غروبنر فوق هذا النوع من الساحات أيضاً، انطلاقاً من المبرهنة $(\mathbf{8.1})$ والمبرهنة $(\mathbf{3.1})$.

تعريف. 1.3:

لتكن $\boldsymbol{R}$ ساحة بروفير موضعية و $\boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{g}$ حدوديات غير صفرية في $\boldsymbol{\mathcal{R}}$، ولتكن $>$ علاقة ترتيب على $\boldsymbol{\mathcal{R}}$، وبفرض أن:

$$\mathbf{deg}(\boldsymbol{f}) = |\boldsymbol{\alpha}| \quad , \quad \mathbf{deg}(\boldsymbol{g}) = |\boldsymbol{\beta}| \; ; \; \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n}) \, , \boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta_1}, \dots, \boldsymbol{\beta_n})$$

ولتكن $\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\gamma_1}, \dots, \boldsymbol{\gamma_n})$، حيث $\boldsymbol{\gamma_i} = \boldsymbol{max}(\boldsymbol{\alpha_i} \, , \boldsymbol{\beta_i})$، وذلك من أجل كل $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}$، عندئذٍ فإن $\boldsymbol{S - polynomial}$ للحدوديتين $\boldsymbol{f}$ وَ $\boldsymbol{g}$ تُعرف بالشكل:

- إذا كان $\boldsymbol{lc}(\boldsymbol{g})$ يقسم $\boldsymbol{lc}(\boldsymbol{f})$، فإن:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \frac{\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\gamma}}}{\boldsymbol{lp}(\boldsymbol{f})}\boldsymbol{f} - \frac{\boldsymbol{lc}(\boldsymbol{f})}{\boldsymbol{lc}(\boldsymbol{g})}\frac{\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\gamma}}}{\boldsymbol{lp}(\boldsymbol{g})}\boldsymbol{g}$$

- إذا كان $\boldsymbol{lc}(\boldsymbol{f})$ يقسم $\boldsymbol{lc}(\boldsymbol{g})$ و $\boldsymbol{lc}(\boldsymbol{g})$ لا يقسم $\boldsymbol{lc}(\boldsymbol{f})$، فإن:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \frac{\boldsymbol{lc}(\boldsymbol{g})}{\boldsymbol{lc}(\boldsymbol{f})}\frac{\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\gamma}}}{\boldsymbol{lp}(\boldsymbol{f})}\boldsymbol{f} - \frac{\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\gamma}}}{\boldsymbol{lp}(\boldsymbol{g})}\boldsymbol{g}.$$

تعريف. 2.3:

لتكن $\boldsymbol{R}$ ساحة بروفير موضعية و $>$ علاقة ترتيب على $\boldsymbol{\mathcal{R}}$، عندئذٍ تُعرف خوارزمية القسمة في $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ بالشكل:

لتكن الحدوديات $\boldsymbol{f, f_1, \dots, f_s \in \mathcal{R}}$، عندئذٍ توجد حدودية $\boldsymbol{r \in \mathcal{R}}$ و $\boldsymbol{H = \{h_1, \dots, h_s\}}$ مجموعة جزئية غير خالية من $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ بحيث يتحقق:

$$\boldsymbol{f = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots h_s f_s + r}$$

بحيث $\boldsymbol{mdeg(f) \geq mdeg(h_i f_i)}$، وإما أن تكون $\boldsymbol{r = 0}$ أو لا يوجد أي حد من حدود $\boldsymbol{r}$ يقبل القسمة على أي من $\boldsymbol{lt(f_i)}$ حيث $\boldsymbol{i = 1, .., s}$.

وتُسمى الحدودية $\boldsymbol{r}$ باقي قسمة $\boldsymbol{f}$ بواسطة $\boldsymbol{H}$، وسنعبر عن ذلك بالرمز: $\boldsymbol{f \overset{H}{\rightarrow}_{+} r}$.

تعتبر المبرهنتان $(\boldsymbol{1.3})$ و $(\boldsymbol{2.3})$ هما المبرهنتان الأساسيتان بالنسبة لقواعد غروبنر فوق ساحات بروفير الموضعية، حيث نناقش في الأولى مسألة انتماء عنصر لمثالية في حلقة الحدوديات فوق ساحات بروفير الموضعية، أما في الثانية فقد أثبتنا أن كل مثالية من حلقة الحدوديات فوق ساحات بروفير الموضعية تملك قاعدة غروبنر، ولكن قبل الانتقال إلى هاتين المبرهنتين، سنقوم بإثبات التمهيدية الآتية:

تمهيدية. 1.3:

لتكن $\boldsymbol{R}$ ساحة بروفير موضعية ولتكن $\boldsymbol{I = \langle a_\alpha X^\alpha \ , \ \alpha \in A \subseteq \mathbb{N}^n \rangle}$ مثالية في $\boldsymbol{\mathcal{R}}$، عندئذٍ فإن الحد $\boldsymbol{bX^\beta}$ ينتمي للمثالية $\boldsymbol{I}$ إذا وفقط إذا وجد دليل $\boldsymbol{\alpha \in A}$ بحيث يتحقق:

$\boldsymbol{X^\alpha}$ يقسم $\boldsymbol{X^\beta}$ و $\boldsymbol{a_\alpha}$ يقسم $\boldsymbol{b}$.

البرهان:

لزوم الشرط: لنفرض أن $\boldsymbol{bX^\beta \in I}$، عندئذٍ فإن $\boldsymbol{bX^\beta}$ يكتب بالشكل:

$$\boldsymbol{bX^\beta = \textstyle\sum_{i=1}^{s} c_i a_{\alpha_i} X^{\gamma_i} X^{\alpha_i}}$$

حيث $\boldsymbol{c_i \, , a_{\alpha_i} \in R}$ و $\boldsymbol{\gamma_i \in \mathbb{N}^n}$ وَ $\boldsymbol{\alpha_1, \dots, \alpha_s \in A}$.

بالتالي من أجل كل $1 \leq i \leq s$، يكون $\gamma_i + \alpha_i = \beta$ وَ $b = \sum_{i=1}^{s} c_i a_{\alpha_i}$، ومنه نجد أن كل X^{α_i} تقسم X^{β}، وبما أن كل ساحة بروفير موضعية هي ساحة تقديرية، عندئذٍ فإن كل العناصر في R تكون متقارنة بالنسبة لعلاقة "يقسم"، عندئذٍ يوجد دليل، وليكن $\alpha_1 \in A$، بحيث a_{α_1} يقسم كل العناصر a_{α_i}، بالتالي فهو يقسم b.

كفاية الشرط: واضح.

مبرهنة. 1.3:

لتكن R ساحة بروفير موضعية و $>$ علاقة ترتيب على $\mathcal{R}$، ولتكن I مثالية غير صفرية في $\mathcal{R}$ و f حدودية في $\mathcal{R}$، بفرض أن $G = \{g_1, g_2, \dots, g_t\} \subseteq I$ قاعدة غروبنر للمثالية I، عندئذٍ:

1. باقي قسمة f بواسطة G وحيد، أي توجد حدودية وحيدة $r \in \mathcal{R}$ تحقق الخاصتين التاليتين:
   - **i.** لا يوجد أي حد في r يقبل القسمة على أي من $lt(g_i)$، حيث $i = 1, \dots, t$.
   - **ii.** توجد حدودية $g \in I$ بحيث $f = g + r$.
2. $f \in I$ إذا وفقط إذا كانت $f \xrightarrow{G}_+ 0$.
3. $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_t \rangle$.

البرهان:

1. بحسب خوارزمية القسمة توجد حدوديات $r, q_1, \dots, q_t \in \mathcal{R}$ بحيث أن:

$$f = q_1 g_1 + \cdots q_t g_t + r$$

والحدودية r تحقق الخاصة $(\mathbf{i})$.

وبما أن G قاعدة غروبنر للمثالية I، عندئذٍ فإن $q_1 g_1 + \cdots q_t g_t \in I$، لنضع $g = q_1 g_1 + \cdots q_t g_t$، عندئذٍ تكون $g \in I\,; f = g + r$.

لنفرض جدلاً أن الحدودية r ليست وحيدة، عندئذٍ توجد حدودية $\grave{r} \in \mathcal{R}$ بحيث $r \neq \grave{r}$ وتحقق الخاصتين $(\mathbf{i})$ و $(\mathbf{ii})$، ومن ثم توجد حدودية $\grave{g} \in I$ بحيث $f = \grave{g} + \grave{r}$، بالتالي $f = g + r = \grave{g} + \grave{r}$.

ومن ثم $I \ni g - \grave{g} = \grave{r} - r \neq 0$، عندئذٍ بما أن G قاعدة غروبنر للمثالية I، فإنه حسب المبرهنة السابقة، يكون $lt(r - \grave{r})$ يقبل القسمة على أحد العناصر $lt(g_i)$ حيث $i = 1, .., t$، ولكن هذا مستحيل نظراً لعدم وجود أي حد في r و $\grave{r}$ يقبل القسمة على أي من $lt(g_i)$ حيث $i = 1, .., t$، وهذا تناقض مع التعريف، ومنه $r = \grave{r}$، أي إن الباقي وحيد.

2. إذا كانت $f \overset{G}{\rightarrow}_+ 0$، عندئذٍ $f \in \langle g_1, g_2, \dots, g_t \rangle \subseteq I$.

وبالعكس إذا كانت $f \in I$، عندئذٍ بما أن $f = f + 0$ وبحسب (1)، يكون $f \overset{G}{\rightarrow}_+ 0$.

3. ينتج مباشرةً من 2.

قبل الانتقال إلى المبرهنة(2.3) سنقوم بإثبات التمهيدية الآتية:

تمهيدية. 2.3:

لتكن R ساحة بروفير موضعية وليست حقلاً ، ولتكن $I = \langle a_\alpha X^\alpha \ , \ \alpha \in A \subseteq \mathbb{N}^n \rangle$ مثالية في $\mathcal{R}$، عندئذٍ توجد $\alpha_1 , \dots , \alpha_s \in A$ بحيث يتحقق: $I = \langle a_{\alpha_1} X^{\alpha_1}, \dots , a_{\alpha_s} X^{\alpha_s} \rangle$.

البرهان:

لنبرهن بالاستقراء على عدد المتغيرات لحلقة كثيرات الحدود n.

من أجل $n = 1$، بما أن كل ساحة بروفير موضعية هي ساحة تقديرية، عندئذٍ فإن كل العناصر في R تكون متقارنة بالنسبة لعلاقة "يقسم"، عندئذٍ يوجد $\beta \in A$ بحيث يكون a_β يقسم a_α، وذلك من أجل كل $\alpha \in A$.

لتكن $\{\gamma_1, \dots , \gamma_k\}$ مجموعة جزئية أعظمية من A بحيث يكون $\gamma_1 < \beta , \dots , \gamma_k < \beta$، عندئذٍ تكون

$$I = \langle a_{\gamma_1} X^{\gamma_1}, \dots , a_{\gamma_k} X^{\gamma_k}, a_\beta X^\beta \rangle$$

لنفرض أن القضية صحيحة من أجل $n - 1$.

ولتكن J مثالية في $R[x_1, \dots , x_{n-1}]$ مولدة بالحدود $a_\alpha X^\alpha$ بحيث $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ و $a_\alpha X^\alpha {x_n}^m \in I$ حيث $m \geq 0$. بالتالي، حسب فرضية الاستقراء، توجد مجموعة منتهية من الحدود تولد J، ولتكن

$N = \{ a_{\alpha_1}X^{\alpha_1}, \dots , a_{\alpha_r}X^{\alpha_r}\}$،

عندئذٍ من أجل كل حد $a_{\alpha_i}X^{\alpha_i} \in N$ يوجد $0 \leq m_i \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $a_{\alpha_i}X^{\alpha_i}x_n{}^{m_i} \in I$.

لتكن $m = max\{m_1 , \dots , m_r\}$، ومن ثم من أجل كل $0 \leq b < m$ فإننا سنعرف المجموعة N_b بالشكل:

$$N_b = \{ a_\alpha X^\alpha \in R[x_1, \dots , x_{n-1}] \} \text{ حيث } a_\alpha X^\alpha x_n{}^b \in I$$

عندئذٍ، حسب فرضية الاستقراء، توجد مجموعة منتهية من الحدود تولد N_b، وسنرمز لها بالرمز N_{b_1}، كما سنرمز لمجموعة كل الحدود $a_\alpha X^\alpha x_n{}^b$ حيث $a_\alpha X^\alpha \in N_{b_1}$ بالرمز $N_{b_1}x_n{}^b$.

بالتالي المجموعة

$$\{a_{\alpha_1}X^{\alpha_1}x_n{}^{m_1}, \dots , a_{\alpha_r}X^{\alpha_r}x_n{}^{m_r}\} \cup \bigcup_{b=0}^{m-1} N_{b_1}x_n{}^b$$

تكون منتهية وتحوي مجموعة تولد I، لأنه أياً كان الحد $X = a_\alpha X^\alpha x_n{}^d \in I$، نجد أنه إذا كان $d \geq m$، عندئذٍ يوجد حد في المجموعة $\{a_{\alpha_1}X^{\alpha_1}x_n{}^{m_1} , \dots , a_{\alpha_r}X^{\alpha_r}x_n{}^{m_r}\}$ يقسم X.

وإذا كان $0 \leq d < m$، عندئذٍ يوجد حد في $N_{d_1}x_n{}^d$ يقسم X.

مبرهنة. 2.3:

لتكن R ساحة بروفير موضعية وليست حقلاً و $>$ علاقة ترتيب على $\mathcal{R}$، ولتكن I مثالية غير صفرية في $\mathcal{R}$، عندئذٍ فإن المثالية I تملك قاعدة غروبنر G.

البرهان :

ينتج من التمهيدية (1.3) والتمهيدية (2.3).

مبرهنة. 3.3:

لتكن R ساحة بروفير موضعية و $>$ علاقة ترتيب على $\mathcal{R}$، ولتكن الحدوديات $f_1, \dots , f_s \in \mathcal{R}$ بحيث $mdeg(f_i) = \gamma , 1 \leq i \leq s$، عندئذٍ إذا وجدت عناصر

$a_1,\dots,a_s \in R$ بحيث تكون $mdeg(\sum_{i=1}^{s} a_i f_i) < \gamma$، عندئذٍ فإن $\sum_{i=1}^{s} a_i f_i$ يكتب كتركيب خطي لـ $S(f_i\,,f_j)$ بمعاملات من R، حيث $1 \le i,j \le s$، ولكل $S(f_i\,,f_j)$ تكون $mdeg(S(f_i\,,f_j)) < \gamma$.

البرهان:

بما أن كل ساحة بروفير موضعية هي ساحة تقديرية، عندئذٍ لنفرض أن $lc(f_1) \mid \dots \mid lc(f_{s-1}) | lc(f_s)$ لهذا، من أجل كل $i < j$ فإن:

$$S(f_i\,,f_j\,) = f_i - \frac{lc(f_i)}{lc(f_j)} f_j$$

وتكون $mdeg(S(f_i\,,f_j)) < \gamma$.

بالتالي:

$$\sum_{i=1}^{s} a_i f_i = a_1\left(f_1 - \frac{lc(f_1)}{lc(f_2)} f_2\right) + \left(a_2 + \frac{lc(f_1)}{lc(f_2)} a_1\right)\left(f_2 - \frac{lc(f_2)}{lc(f_3)} f_3\right) + \dots + \left(a_{s-1} + \frac{lc(f_{s-2})}{lc(f_{s-1})} a_{s-2} + \dots + \frac{lc(f_1)}{lc(f_{s-1})} a_1\right)\left(f_{s-1} - \frac{lc(f_{s-1})}{lc(f_s)} f_s\right) + (a_s + \frac{lc(f_{s-1})}{lc(f_s)} a_{s-1} + \dots + \frac{lc(f_1)}{lc(f_s)} a_1) f_s$$

وبما أن $mdeg(\sum_{i=1}^{s} a_i f_i) < \gamma$، عندئذٍ فإن $a_s + \frac{lc(f_{s-1})}{lc(f_s)} a_{s-1} + \dots + \frac{lc(f_1)}{lc(f_s)} a_1 = 0$.

ذكرنا سابقاً أن كل قاعدة غروبنر لمثالية ما هي مجموعة مولدة لهذه المثالية، ولكن ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة مولدة لمثالية قاعدة غروبنر لها بشكل عام.

وسنقوم فيما يلي بإيجاد الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة المولدة لمثالية I في ساحة بروفير موضعية R هي قاعدة غروبنر.

مبرهنة. 4.3:

لتكن R ساحة بروفير موضعية و $I =< g_1, \dots, g_s >$ مثالية في $\mathcal{R}$، ولتكن $>$علاقة ترتيب على $\mathcal{R}$، عندئذٍ تكون $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ قاعدة غروبنر للمثالية I إذا وفقط إذا كان من أجل كل $i \neq j$ فإن باقي قسمة $S(g_i, g_j)$ بواسطة G يساوي الصفر.

البرهان:

لزوم الشرط: لتكن G قاعدة غروبنر للمثالية I، نلاحظ أنه من أجل أي حدوديتين $g_i, g_j \in I$، حيث $i \neq j$، فإن $S(g_i, g_j) \in \langle g_i, g_j \rangle \subseteq I$، وبما أن G قاعدة غروبنر للمثالية I، عندئذٍ حسب المبرهنة (1.3)، فإن $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G}_+ 0$.

كفاية الشرط: لتكن $f \in I =< g_1, \dots, g_s >$، عندئذٍ فإن:

$$f = \sum_{i=1}^{s} h_i g_i \qquad (*)$$

حيث $h_1, \dots, h_s \in \mathcal{R}$ وَ $mdeg(f) \leq \max_{1 \leq i \leq s}(h_i g_i)$.

إذا كانت $mdeg(f) = \max_{1 \leq i \leq s}(h_i g_i)$، عندئذٍ توجد مجموعة جزئية $A \subseteq \{1, \dots, s\}$ بحيث إنه من أجل كل $i \in A$، تكون $mdeg(f) = \max_{1 \leq i \leq s}(h_i g_i)$.

وبما أن R ساحة بروفير موضعية، فإن المعاملات الرئيسية $lc(h_i g_i)$ للحدوديات $h_i g_i$ حيث $i \in A$ تكون متقارنة بالنسبة لعلاقة يقسم، وبالتالي يوجد دليل $i_0 \in A$ بحيث إنه من أجل كل $i \in A$، يكون $lc(h_{i_0} g_{i_0})$ يقسم $lc(h_i g_i)$، ومنه نجد أن $lt(f) \in \langle lt(g_{i_0}) \rangle \subseteq \langle lt(g_1), \dots, lt(g_s) \rangle$ أي إن G هي قاعدة غروبنر للمثالية I.

إذا كانت $mdeg(f) < \max_{1 \leq i \leq s}(h_i g_i)$، عندئذٍ توجد بعض الحدود الرئيسية في $(*)$ درجتها أكبر من درجة f،

ويمكن اختصار هذه الحدود حسب المبرهنة السابقة وذلك من خلال إعادة كتابتها بدلالة $S-polynomial$، وبما أن $S-polynomial$ تختزل إلى الصفر بواسطة G، عندئذٍ يمكن استبدالها بعبارة تتضمن اختصار أقل، ومن ثم نحصل على عبارة f لها أقل اختصار للحدود الرئيسية، ونتابع حتى نصل إلى نفس الحالة الأولى.

4. خوارزمية لحساب قواعد غروبنر في ساحات بروفير الموضعية:

سنقدم فيما يلي خوارزمية لحساب قاعدة غروبنر لمثالية I انطلاقاً من مجموعة مولدة لها.

لتكن R ساحة بروفير موضعية و نيوثرية و $>$ علاقة ترتيب على $\mathcal{R}$، ولتكن $I =< g_1, \dots, g_s >$ مثالية غير صفرية في $\mathcal{R}$، عندئذٍ بالاعتماد على المبرهنة (8.1)، نجد أنه يمكننا تطبيق الخوارزمية الآتية لحساب قاعدة غروبنر من أجل المثالية I في الحلقة $\mathcal{R}$.

المدخلات: $g_1, \dots, g_s \subseteq \mathcal{R}\ ,\ g_i \neq 0\ (1 \leq i \leq s)$

المخرجات: Gقاعدة غروبنر للمثالية $\langle g_1, \dots, g_s \rangle$ حيث $\{g_1, \dots, g_s\} \subseteq G$

البداية:

$G = \{g_1, \dots, g_s\}$

كرر:

$\grave{G} = G$

من أجل كل $f \neq g$ في $\grave{G}$ اعمل

$S(f, g) \xrightarrow{\grave{G}}_{+} h$

إذا $h \neq 0$، عندئذٍ $G = \grave{G} \cup \{h\}$

حتى $G = \grave{G}$.

مثال 1:

لتكن $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ مثالية في الحلقة $R[x, y]$ حيث $R = \mathbb{Z}_{\langle 3 \rangle}$ هي توضع $\mathbb{Z}$ بالنسبة للمثالية الأولية المولدة بالعدد 3 و $f_1 = y^2 - 3\ , f_2 = xy - 6$، وليكن $>$ الترتيب المعجمي حيث $x > y$.

من أجل حساب قاعدة غروبنر للمثالية $\boldsymbol{I}$ في البداية نضع

$$G = \{ f_1, f_2\}$$

ولتكن $G = \grave{G}$ بالتالي:

$$S(f_1, f_2) = \frac{xy^2}{y^2} f_1 - \frac{xy^2}{xy} f_2 = x(y^2 - 3) - y(xy - 6) = -3x + 6y$$ ،

وهي حدودية مختزلة بواسطة G لنضع $f_3 = -3x + 6y$، عندئذٍ:

$$G = \grave{G} \cup \{f_3\} = \{ f_1, f_2, f_3\}$$

لتكن $G = \grave{G}$ بالتالي:

$$S(f_2, f_3) = -3\frac{xy}{xy} f_2 - \frac{xy}{x} f_3 = -3(xy - 6) - y(-3x + 6y)$$ ،

$$= -6y^2 + 18 \overset{f_1}{\to} 0$$

$$S(f_1, f_3) = -3\frac{xy^2}{y^2} f_1 - \frac{xy^2}{x} f_3 = -3x(y^2 - 3) - y^2(-3x + 6y)$$

$$= 9x - 6y^3$$

$$S(f_1, f_3) = 9x - 6y^3 \overset{f_3}{\to} - 6y^3 + 18y \overset{f_1}{\to} 0$$ ،

ومنه تكون المجموعة $G = \{ f_1, f_2, f_3\}$ هي قاعدة غروبنر للمثالية $\boldsymbol{I}$.

مثال 2:

لتكن $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ مثالية في الحلقة $R[x, y]$ حيث $R = \mathbb{Z}_{\langle 2 \rangle}$ هي توضع $\mathbb{Z}$ بالنسبة للمثالية الأولية المولدة بالعدد 2 و $f_1 = x^2 - 2 \ , \ f_2 = xy - 4$، وليكن $<$ الترتيب المعجمي حيث $x > y$.

من أجل حساب قاعدة غروبنر للمثالية $\boldsymbol{I}$ في البداية نضع

$$G = \{ f_1, f_2\}$$

ولتكن $G = \grave{G}$ بالتالي:

$$S(f_1, f_2) = \frac{x^2y}{x^2} f_1 - \frac{x^2y}{xy} f_2 = y(x^2 - 2) - x(xy - 4) = 4x - 2y$$ ،

وهي حدودية مختزلة بواسطة G لنضع $f_3 = 4x - 2y$، عندئذٍ

$$G = \grave{G} \cup \{f_3\} = \{ f_1, f_2, f_3\}$$

لتكن $\grave{G} = G$ بالتالي:

$$S(f_1, f_3) = 4\frac{x^2}{x^2}f_1 - \frac{x^2}{x}f_3 = 4(x^2 - 2) - x(4x - 2y)$$،

$$= 2xy - 8 \stackrel{f_2}{\rightarrow} 0$$

$$S(f_2, f_3) = 4\frac{xy}{xy}f_2 - \frac{xy}{x}f_3 = 4(xy - 4) - y(4x - 2y) = 2y^2 - 16$$،

وهي حدودية مختزلة بواسطة G لنضع $f_4 = 2y^2 - 16$، عندئذٍ

$$G = \grave{G} \cup \{f_4\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$،

لتكن $\grave{G} = G$ بالتالي:

$$S(f_1, f_4) = 2\frac{x^2y^2}{x^2}f_1 - \frac{x^2y^2}{y^2}f_4 = 2y^2(x^2 - 2) - x^2(2y^2 - 16)$$

$$= 16x^2 - 4y^2$$

$$S(f_1, f_4) = 16x^2 - 4y^2 \stackrel{f_1}{\rightarrow} - 4y^2 + 32 \stackrel{f_4}{\rightarrow} 0$$،

$$S(f_2, f_4) = 2\frac{xy^2}{xy}f_2 - \frac{xy^2}{y^2}f_4 = 2y(xy - 4) - x(2y^2 - 16)$$،

$$= 16x - 8y \stackrel{f_3}{\rightarrow} 0$$

$$S(f_3, f_4) = \frac{xy^2}{x}f_3 - \frac{4}{2}\frac{xy^2}{y^2}f_4 = y^2(4x - 2y) - 2x(2y^2 - 16)$$

$$= 32x - 2y^3$$

$$S(f_3, f_4) = 32x - 2y^3 \stackrel{f_3}{\rightarrow} - 2y^3 + 16y \stackrel{f_4}{\rightarrow} 0$$،

عندئذٍ تكون المجموعة $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ هي قاعدة غروبنر للمثالية I.

المراجع:

[1] ADAMS,W and LOUSTAUANU , PH (1994)– An Introduction to Grobner Bases .
American Mathematical Society , Providence , 306 P .

[2] DUMMIT,D.S. and FOOTE,R.M.(2004)− Abstract Algebra . John wiley & Sons , Ins ,Third Edition.Hoboken,NJ,932.P.

[3] ENE,V.and HERZOG,J. (2010)−Grobner Bases in Commutative Algebra. American Mathematical Society Providence , Rhode Island,Volume 130,164.p.

[4] GIANNI,Pand TRAGE,B and ZACHARIAS,G.(1998). Grobner Bases and Primary Decomposition of Polynomial Ideals, Academic Press Limited,150.P−151.

[5] LARSEN,M.D. and MCCARTHEY,P.J. (1971)− Multiplicative Theory of Ideals . Academic Press , New York and London,298.P .

[6] LUCAS,T.G. (1986). Some Results on Prufer Rings , Pacific Journal of Mathematics Vol .124, NO.2, 338.P−339 .

[7] YENGUI,I. (2005). Computing a Grobner Bases of a Polynomial Ideal over a Principal Domain , Department of Mathematics, Faculty of Sciences of Sfax,2.P−3.

[8] YENGUI,I. (2008)−Projective Modules over Polynomial Ring and Dynamical Gröbner Bases , Summer School and Conference Mathematics , Algorithms and Proofs , Department of Mathematics , Faculty of Sciences of Sfax ,3000 Sfax, Tunisia .95.p.

[9] YENGUI,I. (2021)−Computing Algebra:Course and Exercises with Solutions.World Scientific,Singapore.255.p.