دراسة استقرار المنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة ذات الطبولوجيا الديناميكية

نسرين الأسعد

المشرف: أ.د.عبد الباسط الخطيب

المشرف المشارك : محمد شعيب العلي

ملخص البحث:

يتناول هذا البحث دراسة الاستقرار المنتظم للمنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة ذات الطبولوجيا الديناميكية.

نفترض أن حقول المتجهات التابعة للمنظومات الجزئية تحقق شروطاً رياضية، وأن مجموعة التوازن تتكون من جميع الحالات التي تمتلك مكونات حالة متماثلة.

نقوم بتمثيل هذه المنظومات باستخدام معادلات تفاضلية غير خطية متزاوجة، تُدار بواسطة إشارة تحويل متقطعة الثبات تمثل التبدلات في طبولوجيا الاتصال الداخلي بين الأعضاء.

ونبين في هذا البحث أن وجود خصائص طبولوجية معينة في بنية الاتصال كفيل بضمان الاستقرار المنتظم للمنظومة رغم تغير البنية مع الزمن.

الكلمات المفتاحية: المنظومات الديناميكية المتزاوجة، النظرية اللاخطية، استقرار المنظومات الديناميكية

A Study on the Stability of Coupled Nonlinear Dynamical Systems With Dynamic Topology

ABSTRACT

This research addresses the study of regular stability in coupled nonlinear dynamical systems with dynamic topology. It is assumed that the vector fields of the individual subsystems satisfy certain mathematical conditions, and the equilibrium set consists of all states with identical state components.

These systems are modeled using coupled nonlinear differential equations, governed by piecewise constant switching signals that represent changes in the internal connectivity topology among the components.

The study demonstrates that the presence of specific topological properties within the interaction structure is sufficient to ensure the regular stability of the system, even when the connectivity structure evolves over time.

Key words: coupled dynamical systems, nonlinear theory, stability of dynamic systems .

1. مقدمة البحث

تُعد المنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة موضوعاً محورياً في مجالات النمذجة والتحكم والتحليل الرياضي، لما لها من تطبيقات واسعة في العلوم والهندسة، بدءاً من الشبكات الكهربائية والروبوتات المتعددة إلى النظم البيولوجية والاجتماعية. تعتمد هذه المنظومات على التفاعل بين مجموعة من المنظومات الجزئية غير الخطية التي تتبادل المعلومات أو تؤثر على بعضها البعض وفق بنية ترابطية محددة، مما يؤدي إلى سلوك جماعي يصعب التنبؤ به في معظم الحالات.

نركز في هذا البحث على دراسة الاستقرار في المنظومات غير الخطية المتزاوجة تحت تأثير بنى تواصل متغيرة.

2. هدف البحث

تحديد الشروط البيانية التي تضمن الاستقرار للمنظومات الديناميكية غير الخطية المتزاوجة ذات الطبولوجيا الديناميكية فيما يتعلق بمجموعة حالات التوازن للأعضاء.

3. طرق وأدوات البحث

نعتمد في هذا البحث على منهج رياضي نظري تحليلي، يرتكز على أدوات من نظرية المنظومات الديناميكية [1]، ونظرية البيانات الموجهة، بالإضافة إلى الدوال غير الملساء.

4. مشكلة البحث

تكمن مشكلة هذا البحث في فهم العلاقة بين بنية التفاعل بين الأعضاء في منظومة ديناميكية غير خطية متزاوجة وقدرتها على الوصول إلى اتفاق، في ظل تغير مستمر في هذه البنية مع الزمن.

والسؤال هنا يكمن حول وجود خصائص طبولوجية معينة ، تضمن تقارب المنظومات نحو حالة اتفاق ما في ظل تغير الاتصال بين المنظومات الجزئية الأعضاء.

صياغة المسألة:

في هذا القسم نقدم نموذجاً عاماً غير خطياً للمنظومات ذات الاتصال الداخلي المتحولة، حيث يمكن أن نصف معظم المنظومات الديناميكية المتزاوجة من خلال طوبولوجيا ثابتة أو طوبولوجيا ديناميكية.

لتكن لدينا أسرة من المنظومات الممثلة بالمعادلات التفاضلية العادية من الشكل:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_p^1(x_1,...,x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_p^n(x_1,...,x_n) \end{aligned}$$

حيثُ $x_i \in R^m$ تمثل حالة المنظومة الجزئية أو العضو رقم i بحيث $i = 1,...,n$ والعنصر p موجود ضمن المجموعة P ، حيثُ تمثل مجموعة الوسطاء P اسرة من النماذج المختلفة لحالات المزاوجة.

نلاحظ أن المنظومة الجزئية تشترك بفضاء حالة مشترك R^m .

نقدم الحالة العامة لنموذج مكون من n عضواً $x=(x_1,...,x_n)\in R^{mn}$ بالشكل المختصر التالي:

$$\dot{x}(t)=f_{\sigma(t)}(x(t)) \tag{1}$$

حيثُ $p\in P$ و $f_p:R^{mn}\to R^{mn}$ أسرة لحقول متجهية منتظمة تحقق شرط ليبشتز يتم تحديدها بواسطة مجموعة العناصر P.

إشارة التحويل المتقطعة الثبات $\sigma:R\to P$ وهي دالة تأخذ قيماً ثابتة في فترات زمنية معينة، وقد تتغير قيمتها فجأة في لحظات محددة، تعرف بأوقات التحويل. وهذه الدالة لا تتغير باستمرار، فقط تتبدل عند نقاط زمنية معينة، وتكون ثابتة داخل كل فترة بين زمني تبديل متتاليين.

تحدد σ في كل لحظة زمنية t النموذج أو المنظومة $\sigma(t)\in P$ التي يتم العمل بها في تلك اللحظة.

سنفرض أن حالة المنظومة السابقة لا تقفز في أوقات التحويل، أي أن الحل $x(.)$ مستمر في كل مكان .

5.المناقشة والنتائج

من أجل متطلبات البحث سوف نذكر التعاريف التالية

المجموعة الصامدة:

من أجل أي منظومة مرتبطة ظاهرياً بالزمن t من الشكل:

$$\dot{x}=f(t,x)$$

حيث أن $f : R\times R^n \to R^n$ هي دالة مستمرة بشكل متقطع بالنسبة للمتحول الزمني t ومستمرة بالنسبة لمتحول الحالة x على $R\times R^n$.

نقول أن المجموعة $\Omega \subset R^n$ صامدة أمامياً للمنظومة إذا كان من أجل كل $t_0 \in R$ و كل $x^0 \in \Omega$ يتحقق أن $x(t,t_0,x^0) \in \Omega$، و ذلك أياً كانت $t \geq t_0$.

و بنفس الأسلوب نعرف المجموعة الصامدة خلفياً و الصامدة بشكلٍ عام.

المجموعات المستقرة :

نقول إن المجموعة الصامدة Ω أو المنظومة (بالنسبة للمجموعة الصامدة Ω)

- مُستقرة: إذا كان من أجل كل t_0 وكل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ بحيث إن

$$\left\| x^0 \right\|_\Omega \leq \delta(\varepsilon, t_0) \quad \Rightarrow \quad \left\| x(t) \right\|_\Omega \leq \varepsilon \ : \ \forall t \geq t_0$$

- مُستقرة بانتظام: إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ بحيث إن

$$\left\| x^0 \right\|_\Omega \leq \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \left\| x(t) \right\|_\Omega \leq \varepsilon \ : \ \forall t \geq t_0$$

حيث يمثل النظيم $\left\| \cdot \right\|_\Omega$ المعرف على فضاء الحالة للمنظومة بُعد النقطة x^0 عن المجموعة Ω.

البيان الموجه التفاعلي :

البيان الموجه التفاعلي $\mathcal{G}_p(V, E_p)$ يتكون من :

- مجموعة محدودة V من العقد، العقدة i تمثل العضو i .

- مجموعة الأوتار E_p تمثل روابط بين الاعضاء.

يشير الوتر من العقدة j إلى العقدة i إن العضو j مجاور للعضو i ، بمعنى أن الدالة f_p^i التي تحدد سلوك العضو iتعتمد على حالة العضو j أي على x_j .

مجموعة جوارات العضو i نرمز لها بالرمز $N_i(p)$.

المجموعات المحدبة [2]:

نقول عن مجموعة ما أنها محدبة إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين من المجموعة تقع بكاملها ضمن حدود المجموعة ، أي إذا تحقق الشرط التالي:

$$tx+(1-t)y \in S; \quad \forall x,y \in S, \quad t \in [0,1]$$

الهيكل المحدب للمجموعة S:

بفرض أن $S \subset R^m$ عندئذٍ ندعو تقاطع جميع المجموعات المحدبة التي تحتوي المجموعة S بالهيكل المحدب للمجموعة S ، ويرمز لهُ بالرمز $co(S)$.

متعدد الأبعاد :

وهو الهيكل المحدب لمجموعة محدودة من النقاط $x_1,...,x_n \in R^m$ ، ونرمز لهُ بالرمز $co\{x_1,...,x_n\}$.

الفضاء الجزئي الناقل للمجموعة المحدبة:

لتكن S مجموعة محدبة تحوي نقطة الأصل، عندئذٍ نسمي أصغر فضاء جزئي يحوي المجموعة S بالفضاء الجزئي الناقل للمجموعة S، ونرمز لهُ بالرمز $lin(S)$.

من الواضح أن الفضاء الجزئي الناقل للمجموعة المحدبة S، يحتوي على جميع النقاط التي يمكن الوصول إليها من نقاط المجموعة المحدبة S عن طريق الجمع الخطي لنقاط هذه المجموعة المحدبة.

الداخلية النسبية للمجموعة المحدبة:

نرمز لها بالرمز $ri(s)$، وهي داخلية S عندما تكون مجموعة جزئية من $lin(s)$، وهي تمثل مجموعة النقاط التي يمكن الوصول إليها من داخل المجموعة المحدبة S، بحيثُ تكون محاطة بالكامل بنقاط أخرى من هذه المجموعة.

وكذلك بالنسبة للحدودية النسبية يُرمز لها بالرمز. $rb(s)$

المخروط المماسي:

بفرض $S \subset R^m$ مجموعة محدبة مغلقة و لتكن $y \in S$، عندئذٍ المخروط المماسي للمجموعة S عند النقطة y هو مجموعة جميع المتجهات التي يمكن أن تؤخذ من النقطة y بحيث تبقى النقاط الناتجة داخل المجموعة المحدبة . ويكتب رياضياً :

$$T(y,S) = \left\{ z \in R^m : \lim_{\lambda \to \infty} \inf \frac{\|y + \lambda_z\|_S}{\lambda} = 0 \right\}$$

المسألة:

بفرض لدينا اسرة من حقول المتجهات $\{f_p; p \in P\}$ تحقق فرضيات معينة، ما هي الشروط التي يجب توفرها في البيان الموجه التفاعلي الديناميكي $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$ والتي بموجبها تكون المنظومة ذات الاتصال الداخلي المتحولة **(1)** مستقرة بشكل منتظم فيما يتعلق بمجموعة التوازن Ω؟

في حالة خاصة عندما تكون $\sigma(t)$ ثابتة، أي أن $\sigma(t)=p$. يتضح إن المنظومة ذات الاتصال الداخلي ثابتة الوقت والبيان الموجه التفاعلي الديناميكي هو مجرد بيان موجه تفاعلي ثابت .

فرضيات المسألة:

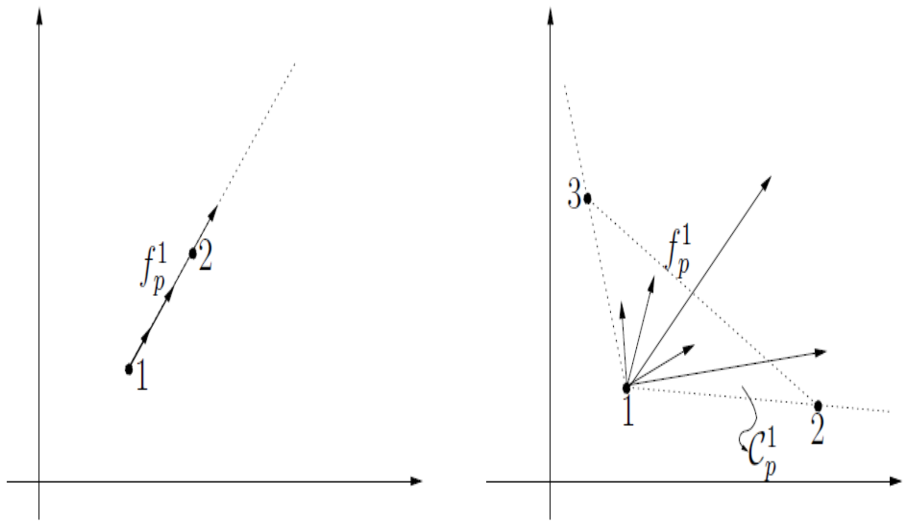
بفرض $C_p^i = co\{x_i, x_j : j \in N_i(p)\}$ تشير إلى متعدد الأبعاد في R^m الذي شكلته حالات العضو i وجواره. وبفرض $X \subset R^m$ مجموعة جزئية من فضاء الحالة المشترك والتي تلعب دور منطقة التركيز . في هذه المسألة ستكون الحالات الأولية للأعضاء في X^n أي أن كل عضو يبدأ من حالة تقع داخل X وبالتالي الحالة الكلية للأعضاء تقع في حاصل الجداء الديكارتي X^n .

بفرض I_0 تشير إلى مجموعة الأدلة $\{1,...,n\}$، وبفرض أنه من أجل كل $i \in I_0$ و وكل $p \in P$ ، الحقول المتجهية $f_p^i : R^{mn} \to R^m$ تحقق الفرضيين التاليين:

a) f_p^i تحقق شروط ليبشتز المحلية على X^n.

b) من أجل كل $x \in X^n$ يكون. $f_p^i(x) \in ri\,(T\,(x_i, C_p^i))$

حيثُ $(T\,(x_i, C_p^i))$ المخروط المماسي للمجموعة C_i^p عند النقطة x_i و ri الداخلية النسبية لذلك المخروط أي داخله باستثناء الحواف.



الشكل (1): حالتان مختلفتان تمثلان الفرض b

يستبعد الفرض (**b**) الحالة التي يكون فيها المتجه $f_p^i(x)$ المطبق في النقطة x_i مماساً للحدود النسبية للمجموعة المحدبة C_p^i. ويوضح الشكل (**1**) حالتين مختلفتين للفرض (**b**).

بفرض أن $S_{dwell}(\tau_D)$ تشير إلى مجموعة من اشارات التحويل المتقطعة الثبات التي لها زمن استقرار τ_D، ونقدم الفرض التالي:

c) $\sigma(t) \in S_{dwell}(\tau_D)$ هذا يعني أن التحويل بين أوضاع المنظومات لا يحدث بسرعة كبيرة، وإنما يوجد مدة قدرها τ_D يجب أن تقضيها المنظومة في كل وضع قبل الانتقال إلى الوضع الآخر، مما يمنع الاضطرابات السريعة في سلوك المنظومة.

فيما يلي سندرس كيف يؤثر البيان الموجه التفاعلي الديناميكي $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$ على استقرار المنظومات ذات الاتصال الداخلي المتحولة.

أولاً نقدم نتيجة مهمة تتعلق بخاصية الصمود الأمامي لأي مجموعة محدبة ومركبة. سنقدم فكرة توضيحية باستخدام مثال ثنائي الأبعاد 2D .

من أجل $m=2$ فإن جميع الأعضاء تتحرك في المستوي .

لنفرض أن A مجموعة جزئية محدبة متراصة من $X\subset R^2$ ، وأن جميع الأعضاء تبدأ حركتها داخل المجموعة . A وبفرض $C(t)$ تشير إلى الهيكل المحدب لمواقع الأعضاء في الوقت t، وهي أصغر مجموعة محدبة تحتوي على جميع النقاط الأعضاء، بحيث أن هذا الشكل يتغير مع مرور الوقت حسب حركة الأعضاء. . بما أن A مجموعة محدبة، فمن الواضح أن $C(0)\subset A$.

يمكن للأعضاء الموجودة في البداية في داخلية $C(0)$ التحرك في أي اتجاه عند الزمن $t=0$ ، أما الأعضاء الموجود في البداية على حدودية $C(0)$ مقيدة بالتحرك نحو داخل الهيكل. وبالتالي فإن $C(t)$ لا تزداد مع الزمن (أي إذا كان $t_2>t_1$ فأنً $(C(t_2)\subset C(t_1))$ أي أن مساحة تحرك الأعضاء لا تكبر، إما أن تبقى كما هي أو تصغر مع الزمن ، وذلك لأن المتجهات لا تخرج خارج المجموعة A ، وهذا يعادل رياضياً القول بأن الجداء الديكارتي A^n مجموعة صامدة أمامياً بالنسبة للمنظومة المتحولة .(**(1)**)

التمهيدية 1: [3]

بفرض S_i , $i=1,\dots,n$ تمثل مجموعات مغلقة محدبة في. R^m الخواص التالية محققة:

1) إذا كانت $y\in S_1\subset S_2$ عندئذٍ فإن $T(y,S_1)\subset T(y,S_2)$.
2) إذا كان $x_i\in S_i\,(i=1,\dots,n)$ فإن:

$$T((x_1,...,x_n),\bigotimes_{i=1}^{n}S_i)=\bigotimes_{i=1}^{n}T(x_i,S_i),$$

$$N((x_1,...,x_n),\bigotimes_{i=1}^{n}S_i)=\bigotimes_{i=1}^{n}N(x_i,S_i).$$

مبرهنة (1):

بفرض $A\subset X$ مجموعة محدبة و متراصة، فإن المجموعة A^n صامدة أمامياً بالنسبة للمنظومة ذات الاتصال الداخلي **(1)** أي أن

$$x(t,t_0,x_0)\in A^n \qquad \forall t\geq t_0$$

(أي أن كل مسار(حل) للمنظومة إذا بدأ داخل A^n فإنهُ سيبقى داخلها خلال الزمن أي أن المنظومة لا تخرج من هذه المجموعة)

البرهان يتطلب مبرهنة ناغومو.

مبرهنة **(2)** : ناغومو **[5]**

بفرض لدينا المنظومة $\dot{y}=f(y)$ و $f:R^l\rightarrow R^l$. وبفرض أن $Y\subset R^l$ تمثل مجموعة محدبة و مغلقة . وبفرض أنهُ من أجل كل y^0 في Y يوجد $\varsigma(y^0)>0$، بحيث أن المنظومة تقبل الحل الوحيد $y(t,y^0)$ المعرف من أجل كل $t\in[0,\varsigma(y^0)]$، بالتالي

$$y^0\in Y\Rightarrow y(t,y^0)\in Y,\forall t\in[0,\varsigma(y^0)]$$

إذا وفقط إذا كان $f(y)\in T(y,Y)$ من أجل كل. $y\in Y$

$T(y,Y)$ تمثل المخروط المماسي للمجموعة Y عند النقطة y وهو مجموعة المتجهات التي تشير داخل أو على حدود المجموعة Y عند النقطة y.

إثبات المبرهنة (1):

لتكن A مجموعة محدبة ومتراصة في X، وبفرض أن أي حالة أولية $x^0 \in A^n$، والوقت الأولي t_0، وبفرض أن $\sigma(t) \in S_{dwell}(\tau_D)$. و $x(t,t_0,x^0)$ تمثل حلاً للمنظومة ذات الاتصال الداخلي المتحولة **(1)**، الذي يحقق $x(t_0) = x^0$، وبفرض $[t_0,t_0+\varsigma(t_0,x^0)]$ تمثل مجال الحل الأعظم.

من أجل أي نقطة $x \in A^n$، من الواضح أن $C_p^i \subset A$ وذلك من أجل كل $i \in I_0$ و $p \in P$. بما أن المجموعة A محدبة، بالتالي من خلال الخاصية **(1)** في التمهيدية **(1)** نجد أن

$$f_p^i(x) \in ri(T(x_i,C_p^i)) \subset T(x_i,A) \forall i \in I_0, p \in P$$

وبحسب الخاصية **(2)** من نفس التمهيدية نجد أن:

$$g(t,x) = f_{\sigma(t)}(x) \in T(x,A^n)$$

وذلك من أجل كل $t \in R, x \in A^n$

بفرض $y = (t,x)$ نقوم بتشكيل المنظومة:

$$\dot{y} = F(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ g(y) \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

بما أن $g(t,x)$ تملك حل وحيد $x(x,t_0,x^0)$ المعرف من أجل كل $t \in [t_0,t_0+\varsigma(t_0,x^0)]$، بالتالي يتحقق أنهُ من أجل كل $y^0 = (t_0,x^0) \in R \times A^n$، المنظومة **(2)** تملك حل وحيد $y(t,y^0)$ المعرف على المجال $[0,\varsigma(y^0))$ وأيضاً:

$$F(y) \in T(t,R) \times T(x,A^n) = T(y,R \times A^n)$$

من أجل كل $y \in R \times A^n$.

بما أن $R \times A^n$ مجموعة مغلقة ومحدبة، وأيضاً من خلال المبرهنة **(2)** مبرهنة ناغومو يتحقق أن:

$$y^0 = (t_0, x^0) \in R \times A^n \Rightarrow y(\tau) \in R \times A^n \forall t \in [0, \in (y^0)) \qquad (3)$$

الحل $y(\tau)$ للمنظومة **(2)** بالشرط الأولي $y^0 \in (t_0, x^0)$ يرتبط بالحل $x(t)$ للمنظومة $\dot{x} = g(t,x)$ بالشرط الأولي $x(t_0) = x^0$ والذي يحقق:

$$(t, x(t)) = y(t - t_0) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \in (t_0, x^0)]$$

نعيد كتابة الشرط **(3)**

$$t_0 \in R, x^0 \in A^n \Rightarrow x(t) \in A^n \forall t \in [t_0, t_0 + \in (t_0, x^0)]$$

بما أن المجموعة A^n متراصة، يتحقق من خلال المبرهنة **(2.4)** في المرجع [4] أنهُ من أجل كل $x^0 \in A^n$ وكل $t_0, \in (t_0, x^0) = \infty$ والمجموعة A^n صامدة أمامياً بالنسبة للمنظومة ذات الاتصال الداخلي المتحولة **(1)**

مبرهنة (3):

المنظومة ذات الاتصال الداخلي المتحولة **(1)** تكون مستقرة بانتظام بالنسبة لكل موضع توازن $\bar{x} \in \Omega \cap \text{int}(x^n)$.

الإثبات:

كل موضع توازن $\bar{x} \in \Omega \cap \text{int}(X^n)$ يكون من الشكل:

$$\bar{x} = \xi \otimes I_n$$

حيثُ $\xi \in \text{int}(X)$.

أي أننا نفترض أن نقطة التوازن موجودة داخل المجال الداخلي X^n وهو عبارة عن تكرار المتجه ξ عبر جميع الاعضاء، أي أن كل عضو من المنظومة يبدأ من نفس الحالة ξ .

وبفرض $\varepsilon > 0$ عنصر اختياري. نختار $\delta(0 < \delta \le \varepsilon)$ عدد صغير بشكل كافٍ لذلك يكون المربع:

$$A_\delta(\xi) = \{y \in R^m ; \|y - \xi\|_\infty \le \delta\}$$

لا يزال داخل المجموعة. X من الواضح أن $A_\delta(\xi)$ مجموعة محدبة ومتراصة. يتحقق من المبرهنة **(1)** أن الجداء الديكارتي $A_\delta^n(\xi)$ مجموعة صامدة أمامياً للمنظومة **(1)**. ونلاحظ أن $x \in A_\delta^n(\xi)$ يكافئ أن:

$$\|x - \overline{x}\|_\infty < \delta$$

وأيضاً يكون:

$$A_\delta^n(\xi) \subseteq A_\varepsilon^n(\xi)$$

بالتالي نكون قد أثبتنا أنه $\exists \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$ بحيث أنه $\forall t_0$ فإن:

$$\|x^0 - \overline{x}\| \le \delta \Rightarrow (\forall t \ge t_0) \|x(t) - \overline{x}\| \le \varepsilon$$

وبالتالي، أثبتنا أنهُ لكل $\varepsilon > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث أنهُ إذا كانت الحالة الابتدائية x_0 تقع على مسافة لا تزيد عن δ من $\overline{x}$، فإن الحل $x(t)$ يبقى على مسافة لا تتجاوز ε من $\overline{x}$.

وهذا تماماً هو تعريف الاستقرار المنتظم.

تطبيق عملي:

بفرض لدينا سرب من الطائرات المسيرة (الدراون) التي تحتاج إلى الحفاظ على تشكيل معين أثناء الطيران. تفاعلات هذه الطائرات تتغير مع الزمن بسبب بعض العوائق أو تغير في المهام الموكلة إليها، مما يجعل بنية الاتصال بينها ديناميكية وغير خطية.

النموذج الرياضي

تمثل حالة كل طائرة أو (عضو في السرب) بالمعادلة:[5]

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + \sum_{j \in N_i(t)} K_{ij}(t).h(x_j - x_i)$$

حيثُ

$x_i \in R^3$ تمثل موقع وسرعة الطائرة i.

$f_i(x_i)$ دالة تمثل ديناميكية الطيران الفردية (مثل مقاومة الهواء أو تحكم ذاتي).

$N_i(t)$ تمثل مجموعة الجوار المتغيرة مع الزمن.

$h(x_j - x_i)$ دالة غير خطية تصف كيفية تفاعل الطائرات.

$K_{ij}(t)$ يمثل معامل التغيير اللحظي، ويعكس شدة أو نمط الاتصال بين الطائرات، ويتغير مع تغير البنية التفاعلية للسرب.

مجموعة التوازن(الاتفاق الجماعي)

$$\xi = \{x \;; x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}$$

أي أن جميع الطائرات تصل في النهاية إلى نفس الموقع في الفضاء.

وإذا كانت الدوال $f_i\ ,h$ تحقق شروط ليبشتز وتوجه حركة الأعضاء نحو الداخل فأن التشكيل يبقى محدباً ومستقراً، حتى في ظل تغير بنية الاتصال مع الزمن.

المراجع:

[1] MEYER, C, D 2000- Matrix Analysis and Applid linear Algebra SIAM.

[2] BOYD, S, VANDENBERGHE, L 2004- Convex Optimization Cambridge University press.

[3] AUBIN J. P, 1991- Viability Theory. Birkhauser.

[4] KHALIL H, k, ,1996- Nonlinear Systems, 2nd ed. Prentice Hall.

[5] OLFATI-SABER, R, 2007- Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems. Proceeding of the IEEE.