بنية وتشعب الشجرة الفرعية لأبناء الرباعيات المبتذلة في شجرة الرباعيات الفيثاغوريّة الأوليّة

ريم زيتون: طالبة ماجستير– الرياضيات البحتة

د. باسل العرنوس: أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كليّة العلوم – جامعة حمص.

د. محمد شراباتي: أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كليّة العلوم – جامعة حمص.

ملخّص البحث

يهدف هذا البحث إلى إجراء تحليل جبري شامل للجيل التالي من العقد في شجرة الرباعيات الفيثاغوريّة الأوليّة $PPQs$ ، باستخدام مجموعة التوليد الكاملة المخصصة لها، بناءً على البنية التوليدية المعقدة وغير المتجانسة التي كشفت عنها ورقة رشال وزملاؤه (2020). وتكشف نتائجنا أن البساطة الأولية هي خاصية محلية لا تنتشر عبر الشجرة، بل تظهر الشجرة الفرعية تشعباً غير متجانس وظهوراً منهجياً لعقد "خارج النطاق" تحتوي على مكونات سالبة. تؤكد هذه النتائج على أن التعقيد سمة جوهرية ومنتشرة في كامل هيكل الشجرة، وليس محصوراً في فروع محددة، كما تشير إلى أن هذه المنطقة تعمل كطبقة انتقالية معقدة داخل النظام.

الكلمات المفتاحيّة:

الرباعيات الفيثاغوريّة – أشجار الأعداد الصحيحة – التوصيف الخطي – مصفوفات التوليد – التشعب غير المتجانس – المعادلات الديوفانتية

Structure and Branching of the Trivial Descendant Sub-Tree in the Tree of Primitive Pythagorean Quadruples

Reem Zaytoun: Master's Student – Pure Mathematics
Dr. Basel Hamdo Alarnous: Associate Professor – Homs University**.**
Dr. Mohamad charabati: Associate Professor – Homs University**.**

Abstract

The aim of this research is to conduct a comprehensive algebraic analysis of the next generation of nodes within the Primitive Pythagorean Quadruples (PPQs) tree, utilizing its dedicated complete generating set. This work builds upon the complex and heterogeneous generative structure revealed by Rashal et al. (2020). Our findings indicate that initial simplicity is a local property that does not propagate throughout the tree. Instead, the subtree exhibits highly heterogeneous branching and the systematic emergence of "out-of-bound" nodes containing negative components. These results reinforce the hypothesis that complexity is an intrinsic and pervasive characteristic of the entire tree, not confined to specific branches. Furthermore, they suggest that this region functions as a complex transitional layer within the system.

Key Words:

Pythagorean Quadruples – Integer Trees – Linear Characterization – Generator Matrices – Heterogeneous Branching – Diophantine Equations.

بنية وتشعب الشجرة الفرعية لأبناء الرباعيات المبتذلة في شجرة الرباعيات الفيثاغوريّة الأوليّة

1 . المقدّمة

1 – 1 .أشجار الأعداد الصحيحة والبنى التوليدية

يمثل تنظيم مجموعات لا نهائية من الحلول الصحيحة للمعادلات الديوفانتية تحدياً كلاسيكياً في نظريّة الأعداد. إحدى الطرائق الفعالة لمعالجة هذه المشكلة هي بناء هياكل شجرية لانهائية، حيث تمثل كل عقدة حلاً فريداً، وتصف الفروع علاقات توليدية جبرية تربط هذه الحلول ببعضها. أشهر مثال على ذلك هو شجرة الثلاثيات الفيثاغوريّة الأوليّة ($PPTs$)، والتي أثبت وجودها ووصفها باحثون مثل بيرغرين 1934 [1]، هال 1970 [2]، وبرايس 2008 [3]، حيث يمكن توليد جميع الثلاثيات الأوليّة بشكل فريد من جذر واحد عبر مجموعة من ثلاث مصفوفات خطية.

1 – 2 .شجرة الرباعيات الفيثاغوريّة الأوليّة

في العام 2020، قام رشال [4]، غوتييريز، ومكارتي بتوسيع هذا المفهوم إلى البعد التالي من خلال بناء أول شجرة كاملة لجميع رباعيات فيثاغورس البدائية ($PPQs$) غير السالبة. ومع ذلك، على عكس البنية المنتظمة لشجرة الثلاثيات، فإن شجرة الرباعيات التي اكتشفوها تتميز ببنية غير متجانسة معقدة. في هذه الشجرة، تعتمد مجموعة المصفوفات المُنشِئة المسموح بها لتوليد أبناء عقدة ما على نوع تلك العقدة الأصل. حدد البحث الأصلي عدة فئات من العقد، بما في ذلك المبتذلة، والتوأم، والعاديّة، ولكل منها قواعد تشعب مختلفة، مما يجعل فهم الشجرة وتحليلها تحدياً أكبر.

$1-3$.الفجوة البحثيّة

أشار البحث الأصلي إلى أن فئة أبناء الرباعيّات المبتذلة يمكن تمييزها بالكامل عبر خاصية خطية بسيطة: $d = a + c$ [4]. ومع ذلك، تم تقديم هذا الادعاء كنتيجة مذكورة دون برهان. هذا يترك فجوة معرفية محددة:

- بدون برهان رسمي، يظل هذا الادعاء غير مثبت، وأي تحليل إضافي يعتمد عليه سيكون مبنياً على أساس غير مكتمل.
- إذا كان الادعاء صحيحاً، فإنه يطرح سؤالاً جوهرياً حول طبيعة التعقيد في الشجرة. هل هذه البساطة الأولية تؤدي إلى منطقة أكثر انتظاماً.

$1-4$.هدف البحث

يسعى هذا البحث إلى سد هذه الفجوة من خلال:

1. تقديم برهان رياضي كامل ومحكم للادعاء بأن الشرط $d = a + c$ هو شرط ضروري وكافٍ لفئة أبناء الرباعيات المبتذلة.
2. تحليل جبري شامل لمجموعة التوليد الكاملة المطبقة على هذه الفئة، وتوصيف درجة الانتظام أو عدم التجانس في الجيل التالي.

2. توصيف أبناء الرباعيات المبتذلة

$2-1$. تعريفات ومصطلحات أساسية

تعريف 1 :

الرباعيّة الفيثاغوريّة: هي مجموعة مرتبة من أربعة أعداد صحيحة $q = (d, a, b, c)$ حيث $d, a, c \geq 0$و b عدد صحيح، تحقق المعادلة الديوفانتية:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

وتكون هذه الرباعيّة أوليّة، إذا كان القاسم المشترك الأكبر لمكوناتها هو واحد، أي:

$$\gcd(d, a, |b|, c) = 1$$

تعريف 2 :

الرباعيّة الفيثاغوريّة المبتذلة: هي رباعية فيثاغوريّة أوليّة يكون أحد مكوناتها غير الرئيس مساوياً للصفر.

في هذا البحث، نركز على الرباعيات المبتذلة التي تكون على الصورة:

$$q' = (d', a', 0, c')$$

يتم تبرير هذا الاختيار في الملاحظة 1 أدناه.

ملاحظة 1:

إن اختيار ممثل الفئة المبتذلة ليكون $(d', a', 0, c')$ يتم دون فقدان للتعميم. أي رباعية مبتذلة أخرى، مثل$(d', 0, b', c')$ ، تنتمي إلى نفس فئة التكافؤ التي يتم تعريفها بالقيم المطلقة للمكونات [4]. بينما أن الشجرة ليست متناظرة تماماً بالنسبة لتبديل المكونات a و b ، فإننا نتحقق في هذا البحث من أن الخاصية $d = a + c$ تعمل كمميز لفئة كاملة من السلالة.

تعريف 3 :

مصفوفات التوليد للرباعيات المبتذلة: وفقاً للقواعد التي وضعها رشال وزملاؤه [4]، فإنّ مجموعة المصفوفات المسموح بها لتوليد أبناء رباعية مبتذلة غير جذرية هي مجموعة فرعية من عائلة المصفوفات Q ، تحديداً، هي المجموعة:

$$Q_{\text{trivial}} = \{Q_0, Q_2, Q_4\}.$$

لأغراض الدقة والاتساق، نعتمد حصرياً على تعريفات هذه المصفوفات كما وردت في:[4]

$$Q_0=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}, Q_2=\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\1&0&1&1\\1&-1&0&1\\1&-1&1&0\end{pmatrix},$$

$$Q_4=\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\1&0&1&-1\\1&1&0&-1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

2 − 1 . المبرهنة الأساسيّة

مبرهنة 1:

لتكن $q=(d,a,b,c)$ رباعية فيثاغوريّة أوليّة غير جذرية ضمن بنية الشجرة المعرفة في [4] تكون الرباعية q ابناً لرباعية مبتذلة إذا وفقط إذا كانت مكوناتها تحقق العلاقة الخطية: $d=a+c$.

الإثبات:

أولاً: برهان الشرط اللازم

في هذا الجزء، نثبت أنه إذا كانت الرباعية q مولَّدة من أصل مبتذل q' فإنها بالضرورة تحقق الشرط $d=a+c$.

لتكن لدينا رباعية مبتذلة عامة غير جذريّة $q'=(d',a',0,c')$ حيث $d',a',c'>0$، وتحقق $d'^2=a'^2+c'^2$. وفقاً للتعريف 3، يمكن توليد ابنها $q=(d,a,b,c)$ بتطبيق إحدى المصفوفات من المجموعة Q_{trivial} . سندرس كل حالة على حدة.

الحالة 1: التوليد بواسطة Q_0

$$\begin{pmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = Q_0 \begin{pmatrix} d' \\ a' \\ 0 \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d' \\ a' \\ 0 \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d' + a' + c' \\ d' + c' \\ d' + a' + c' \\ d' + a' \end{pmatrix}$$

لدينا $a = d' + c'$، $d = 2d' + a' + c'$ ، و $c = d' + a'$. نتحقق من الشرط:

$$a + c = (d' + c') + (d' + a') = 2d' + a' + c' = d$$

إذن، الشرط $d = a + c$ متحقق.

الحالة 2: التوليد بواسطة Q_2

$$\begin{pmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = Q_2 \begin{pmatrix} d' \\ a' \\ 0 \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d' - a' + c' \\ d' + c' \\ d' - a' + c' \\ d' - a' \end{pmatrix}$$

لدينا $a = d' + c'$، $d = 2d' - a' + c'$، $c = d' - a'$، نتحقق من الشرط:

$$a + c = (d' + c') + (d' - a') = 2d' - a' + c' = d$$

إذن، الشرط $d = a + c$ متحقق.

الحالة 3: التوليد بواسطة Q_4

$$\begin{pmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = Q_4 \begin{pmatrix} d' \\ a' \\ 0 \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d' + a' - c' \\ d' - c' \\ d' + a' - c' \\ d' + a' \end{pmatrix}$$

لدينا $a = d' - c'$، $d = 2d' + a' - c'$ و $c = d' + a'$، نتحقق من الشرط:

$$a + c = (d' - c') + (d' + a') = 2d' + a' - c' = d$$

إذن، الشرط $d = a + c$ متحقق.

بما أن الشرط $d = a + c$ يتحقق في جميع الحالات الممكنة لتوليد ابن من أصل مبتذل، فإن اتجاه الضرورة قد تم إثباته.

ثانياً: برهان الكفاية

في هذا الجزء، نثبت أنه إذا كانت رباعية q تحقق الشرط $d = a + c$ ، فإنّ أصلها الوحيد q' يجب أن يكون مبتذلاً.

لتكن لدينا رباعية فيثاغوريّة أوليّة غير جذرية $q = (d, a, b, c)$ تحقق الفرضية:

$$d = a + c$$

وفقاً لهيكل الشجرة الذي أثبته رشال وزملاؤه[4] ، فإنّ أي رباعية غير جذرية تمتلك أصلاً وحيداً $q' = (d', a', b', c')$ يتم الحصول عليه من خلال تطبيق مصفوفة عكسية فريدة$\in Q_*^{-1}$. Q^{-1}

للتأكد من أن تحليلنا يغطي جميع الحالات الممكنة، قمنا بحساب معكوسات جميع المصفوفات السبع في مجموعة التوليد Q المذكورة في [4] وجدنا أن السطر الثالث من كل مصفوفة معكوسة، والذي يحدد المكون b' للأصل، هو دائماً مضاعف للمركبات الخطية $(-d + a + c)$ هذا يؤكد أن الصيغة العامة للمصفوفة العكسية المستخدمة في[4] صالحة لتحليل هذا المكون المحدد في جميع الحالات.

مكونات الأصل q' هي:

$$\begin{aligned} d' &= 2d - a - b - c \\ a' &= x(-d + a + b) \\ b' &= y(-d + a + c) \\ c' &= z(-d + b + c) \end{aligned}$$

حيث $x, y, z \in \{-1,1\}$ يتم تحديدها بشكل وحيد لضمان أن d', a', b', c' هي مكونات رباعية أوليّة غير سالبة.

لإثبات أن الأصل q' مبتذل، يجب أن نثبت أن أحد مكوناته غير الرئيسية يساوي صفراً. لنركز على المكون b'. بالتعويض المباشر من فرضيتنا $d = a + c$ في معادلة b':

$$b' = y(-(a+c) + a + c) = y(0) = 0$$

بما أن المكون $b^\wedge{}'$ للأصل الوحيد $q^\wedge{}'$ يساوي صفراً بشكل حتمي بغض النظر عن قيمة y، إنّ الأصل q' هو على الصورة $(d', a', 0, c')$هذا، بحكم التعريف 2، يعني أنّ الأصل q' هو رباعية مبتذلة.

بذلك، تم إثبات اتجاه الكفاية .

3. توصيف وتصنيف التعقيد في بنية الجيل التالي

3 − 1. مجموعة التوليد الكاملة

تعريف 4 :

مجموعة التوليد الكاملة: كما هو محدد في [4] ، فإنّ مجموعة المصفوفات المُنشِئة لأبناء رباعية qوالتي هي ابن لرباعي مبتذل، تعتمد على المصفوفة العكسية Q_{ij}^{-1} التي أنتجت q نفسها. مجموعة التوليد هي $G(q) = M_{ij} \cup \{Q_{24}\}$، حيث $M_{ij} = Q \setminus \{Q_{ij}\}$.

ولأغراض هذا التحليل، سنقوم بفحص تأثير كل مصفوفة من مجموعة التوليد الشاملة= Q $\{Q_0, Q_2, Q_3, Q_4, Q_{23}, Q_{34}, Q_{24}\}$ على رباعية عامة:

$$q = (a + c, a, b, c)$$

3 − 2. التحليل الجبري الشامل لتأثيرات مصفوفات التوليد

لتوصيف عدم التجانس في التشعب، نقوم بتطبيق كل مصفوفة من Q على رباعية عامة q تحقّق $d = a + c$.

$$Q_0.q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a+c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b+3c \\ a+b+2c \\ 2a+2c \\ 2a+b+c \end{pmatrix}$$

$$Q_2.q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a+c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+3c \\ a+b+2c \\ 2c \\ b+c \end{pmatrix}$$

$$Q_3.q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a+c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-b+3c \\ a-b+2c \\ 2a+2c \\ 2a-b+c \end{pmatrix}$$

$$Q_4.q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a+c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b+c \\ a+b \\ 2a \\ 2a+b+c \end{pmatrix}$$

$$Q_{23}.q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a+c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+3c \\ a-b+2c \\ 2c \\ -b+c \end{pmatrix}$$

$$Q_{34}.q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a+c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-b+c \\ a-b \\ 2a \\ 2a-b+c \end{pmatrix}$$

$$Q_{24}.q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a+c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+b \\ 0 \\ b+c \end{pmatrix}$$

النتائج، التي تمثل مكونات الرباعية الحفيدة q_{new} ، ملخصة في الجدول 1

جدول 1: التحويلات الجبرية للجيل التالي

المصفوفة المطبقة	d_{new}	a_{new}	b_{new}	c_{new}
$\mathbf{Q}_0$	$a3 + b + c3$	$a + b + c2$	$a2 + c2$	$a2 + b + c$
$\mathbf{Q}_2$	$a + b + c3$	$a + b + c2$	$c2$	$b + c$
$\mathbf{Q}_3$	$a3 - b + c3$	$a - b + c2$	$a2 + c2$	$a2 - b + c$
$\mathbf{Q}_4$	$a3 + b + c$	$a + b$	$a2$	$a2 + b + c$
$\mathbf{Q}_{23}$	$a - b + c3$	$a - b + c2$	$2c$	$-b + c$
$\mathbf{Q}_{34}$	$a3 - b + c$	$a - b$	$a2$	$a2 - b + c$
$\mathbf{Q}_{24}$	$a + b + c$	$a + b$	0	$b + c$

ملاحظة 2:

يُظهر الجدول 1 بوضوح غياب أي بنية جبرية موحدة أو علاقات خطية بسيطة تربط مكونات الأحفاد. كل مصفوفة مُنشئة تفرض تحويلاً فريداً ينتج عنه رباعية ذات هيكل جبري مختلف تماماً. على سبيل المثال، ينتج عن Q_0 رباعية ذات مكونات معقدة نسبياً، بينما ينتج عن Q_{24} رباعية أبسط بكثير. هذا التباين الحاد يؤكد أن التشعب في هذه المنطقة من الشجرة غير متجانس بطبيعته.

3 − 3 . ظاهرة العقد خارج النطاق

أحد أهم الاكتشافات في هذا التحليل هو الظهور المتكرر للعقد التي تحتوي على مكونات سالبة. هذه العقد، التي نسميها خارج النطاق، لا تظهر في الشجرة المرئية التي تقتصر على الممثلين غير السالبين، لكن وجودها يكشف عن بنية أعمق.

ملاحظة 3:

لتكن $q = (a + c, a, b, c)$ رباعية من فئة أبناء الرباعيات المبتذلة حيث $a, b, c > 0$ إنّ تطبيق مصفوفات معينة من مجموعة التوليد Q يمكن أن ينتج، بل وغالباً ما ينتج، رباعية حفيدة تحتوي على مكون واحد أو أكثر سالب.

مثال:

عند تطبيق Q_{34}:

$$a_{\text{new}} = a - b$$

هذا المكون سيكون سالباً إذا وفقط إذا كان $b > a$.

تفسير الظاهرة:

إنّ ظهور المكونات السالبة لا ينبغي تفسيره على أنه فشل في عملية التوليد، بل هو مؤشر على أنّ بنية فضاء المدارات لجميع الرباعيات (بما في ذلك تلك ذات المكونات السالبة) هي أكثر ثراءً وترابطاً من الشجرة التي تقتصر على الممثلين غير السالبين.

عندما ينتج تحويل ما رباعية ذات مكونات سالبة، فإنّ ممثل فئة التكافؤ غير السالب لهذه الرباعية (الذي يتم الحصول عليه بأخذ القيم المطلقة) هو عقدة صالحة في الشجرة. ومع ذلك، فإنّ هذه العقدة قد لا تكون ابناً مباشراً لـ q في هيكل الشجرة المرئي، بل قد تكون ابن عم أو عقدة في فرع آخر تماماً. هذا يشير إلى وجود طرائق مختصرة أو علاقات متقاطعة بين فروع الشجرة لا تظهر في الرسم الهرمي البسيط.

مثال توضيحي:

ليكن الأصل المبتذل $q' = (5,4,0,3)$ ينتج الابن $q = (17,8,12,9)$. هنا:

$b = 12$ و$c = 9$ لذا $b > c$.

عند تطبيق Q_{23}:

$$q_2 = Q_{23} \cdot (17,8,12,9)^T = (23,14,18,-3)^T$$

الممثل غير السالب لهذه العقدة هو $q_{2,abs} = (23,14,18,3)$ هذه الرباعيّة هو رباعيّة فيثاغوريّة أوليّة صالحة. التحقيق في أصل $q_{2,abs}$ يكشف أنه ليس q . هذا يثبت أن التحويل Q_{23}قد نقلنا من فرع إلى آخر ضمن فضاء المدارات الأوسع.

4. النتائج

قدم هذا البحث نتيجتين أساسيتين مثبتتين بشكل محكم، واللتين تشكلان معاً مساهمته الأساسية في هذا المجال:

مبرهنة 1: التوصيف الكامل لأبناء الرباعيات المبتذلة.

لقد أثبتنا أن الشرط الخطي $d = a + c$ هو شرط ضروري وكافٍ لتعريف فئة أبناء الرباعيات المبتذلة بشكل فريد. هذا يرفع ملاحظة غير مثبتة في البحث الأصلي إلى مستوى مبرهنة، ويوفر أداة حتمية وموثوقة لتصنيف هذه الفئة من العقد داخل الشجرة.

وكذلك من التحليل المصاحب: اكتشاف وتوصيف التعقيد الهيكلي في الجيل التالي.

لقد كشف التحليل الذي قمنا به بشكل قاطع أن البساطة الظاهرية للشرط الخطي $d = a + c$ هي خاصية محلية لا تنتشر إلى الأجيال اللاحقة. بدلاً من ذلك، تتميز الشجرة الفرعية التي تنشأ من هذه الفئة بسمتين أساسيتين:

- عدم التجانس الجبري: أثبتنا أن كل مصفوفة مُنشئة تفرض تحويلاً جبرياً فريداً وغير متوافق مع الآخرين، مما يؤدي إلى غياب أي بنية جبرية بسيطة وموحدة تحكم التشعب.
- ظهور العقد خارج النطاق : أظهرنا أن تطبيق مجموعة التوليد الكاملة ينتج بشكل منهجي عقداً تحتوي على مكونات سالبة، وهي ظاهرة تكشف عن حدود النموذج الذي يقتصر على الممثلين غير السالبين.

هذه النتائج تقدم رؤى مهمة حول طبيعة شجرة رشال، حيث تكشف أن التعقيد ليس مجرد سمة عرضية، بل هو مبدأ تنظيمي أساسي وعميق.

أولاً: التعقيد كسمة متأصلة وليس استثناءً.

يُظهر بحثنا أن حتى المنطقة من الشجرة التي تنشأ من أبسط أنواع العقد (المبتذلة) تعود بسرعة إلى حالة من التعقيد العالي. هذا يدحض أي أمل في إمكانية تقسيم الشجرة إلى مناطق بسيطة ومناطق معقدة. بدلاً من ذلك، يبدو أن عدم التجانس هو السمة الغالبة في كل مكان. تعمل فئة أبناء الرباعيات المبتذلة ليس كجذر لشجرة فرعية منتظمة، بل كبوابة انتقالية يتم من خلالها إعادة حقن التعقيد الكامل للنظام.

ثانياً: نموذج الشجرة غير السالبة كإطار غير مكتمل.

إن الظهور الحتمي للعقد خارج النطاق هو ملاحظة مثيرة للتفكير. ما تم إثباته هو أن التحويلات الرياضية التي تعرف الشجرة يمكن أن تنقلنا إلى خارج المجموعة المحددة من الممثلين غير السالبين. هذا لا يقلل من فائدة نموذج الشجرة، ولكنه يسلط الضوء على أنه تبسيط لهيكل رياضي أكبر وأكثر ترابطاً.

هذه الظاهرة تقترح أن العلاقات بين فئات تكافؤ الرباعيات قد لا تكون هرمية بشكل صارم كما يوحي رسم الشجرة. إنها تثير تساؤلات حول ما إذا كانت هناك بنية أشبه بالبيان تربط بين الفروع التي تبدو منفصلة.

5. المقترحات والتوصيات

تفتح نتائج هذا البحث عدة مسارات واعدة ومحددة للتحقيق المستقبلي:

- توصيف "العلاقات المتقاطعة": بناءً على ظاهرة العقد خارج النطاق، يمكن للبحث المستقبلي أن يطرح سؤالاً محدداً: بالنظر إلى رباعية q ورباعية خارج النطاق q_{new} مولدة منها، ما هي العلاقة الهيكلية (إن وجدت) بين q والممثل غير السالب لـ q_{new} داخل الشجرة؟
- دراسة دالة الكثافة : بدلاً من البحث عن بنية صارمة، يمكن للبحث المستقبلي أن يدرس سؤالاً إحصائياً: كيف تتغير كثافة العقد التي تحقق الشرط $d = a + c$ كدالة لعمق الشجرة؟ هل تتلاشى هذه الكثافة، أم تتقارب إلى قيمة ثابتة، أم تتذبذب؟

6. المراجع

1. Berggren, B. (1934). Pytagoreiska trianglar. Tidskrift för Elementär Matematik, Fysik och Kemi, 17, 129–139.
2. Hall, A. (1970). Genealogy of Pythagorean triads. The Mathematical Gazette, 54(390), 377–379. https://doi.org/10.2307/3613860
3. Price, H. L. (2008). The Pythagorean tree: A new species. arXiv preprint. https://arxiv.org/abs/0809.4324
4. Rushall, J., Gutierrez, M., & McCarty, V. (2020). On the complete tree of primitive Pythagorean quadruples. INTEGERS: The Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, 20, Article A73.