بنية وحساب الخماسيات الفيثاغورية: مقاربة بنائية عبر تحليل المتجهات المتعامدة في $\mathbb{Z}^3$

أحمد سلوم المحمد : طالب ماجستير – الرياضيات التطبيقية

د. باسل العرنوس : أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كليّة العلوم – جامعة حمص.

د. مرهف العبدالله : مدرس في قسم الرياضيات – كليّة العلوم – جامعة حلب.

ملخّص البحث

يقدم هذا البحث منهجية بنائية لتوليد الخماسيات الفيثاغورية الأولية انطلاقاً من أزواج المتجهات الصحيحة المتعامدة في $\mathbb{Z}^3$، مع برهنة الشروط اللازمة والكافية لضمان أوليتها. تكمن المساهمة الجوهرية في تحديد نطاق هذه المنهجية؛ حيث يُثبت أنها شاملة لفئة جزئية مهمة، ولكنها ليست شاملة كلياً كما يوضح مثال مضاد. باستخدام جبر الكواتيرنيونات، يُكشف أن هذا الانقسام يعود إلى شرط جبري (تحليل كواتيرنيون إلى عاملين بَحْتَين)، مما يؤسس لتصنيف بنيوي جديد يميز بين الخماسيات "القابلة للبناء هندسياً" وتلك "الجبرية بحتة"، وهو ما يعمق فهم العلاقة بين الهندسة ونظرية الأعداد.

الكلمات المفتاحيّة:

الخماسيات الفيثاغورية، المعادلات الديوفانتية، نظرية الأعداد، المتجهات المتعامدة، جبر الكواتيرنيونات، متطابقة لاغرانج.

A Structural and Computational Approach to Pythagorean Quintuples: A Constructive Methodology via Orthogonal Vector Analysis in $\mathbb{Z}^3$

Ahmad Salloum Al-Mohammad: M.Sc. Student – Applied Mathematics

Supervisor: **Dr. Basel Hamdo Alarnous** – Homs university

Dr. Morhaf Al-Abdullah: – University of Aleppo

Abstract

This research presents a constructive methodology for generating primitive Pythagorean quintuples from pairs of orthogonal integer vectors in $\mathbb{Z}^3$, while proving the necessary and sufficient conditions to ensure their primitivity. The core contribution lies in defining the scope of this methodology; it is proven to be complete for a significant subclass, but not universally complete, as demonstrated by a counterexample. Using quaternion algebra, it is revealed that this dichotomy is attributed to an algebraic condition (the factorization of a quaternion into two pure factors), which establishes a novel structural classification that distinguishes between 'geometrically constructible' and 'purely algebraic' quintuples. This deepens the understanding of the relationship between geometry and number theory.

Key Words:

Pythagorean Quintuples, Diophantine Equations, Number Theory, Orthogonal Vectors, Quaternion Algebra, Lagrange's Identity.

بنية وحساب الخماسيات الفيثاغورية: مقاربة بنائية عبر تحليل المتجهات المتعامدة في $\mathbb{Z}^3$

1. مقدمة

- **السياق التاريخي والرياضي:** يرجع الأصل التاريخي لدراسة المعادلات الديوفانتية التربيعية إلى الثلاثيات الفيثاغورية $(x^2 + y^2 = z^2)$، التي وجدت حلها البارامتري الشامل على يد إقليدس، مما كشف لأول مرة عن وجود بنية توليدية خفية وراء حلول صحيحة لمعادلة جبرية [1]. ومع تعميم المشكلة إلى أبعاد أعلى، مثل الرباعيات الفيثاغورية $(a^2 + b^2 + c^2 = d^2)$ التي وجد ليونهارد أويلر (Leonhard Euler) صيغة بارامترية لها [2]، وقد وصل هذا التطور المنهجي بالتوصل إلى حلول الخماسيات الفيثاغورية، التي تمثلها المعادلة:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$$

في مطلع القرن العشرين، قدم ليونارد يوجين ديكسون (Leonard Eugene Dickson) حلاً بارامترياً كاملاً لهذه المشكلة، حيث أثبت أن أي خماسية فيثاغورية أولية يمكن توليدها من أربعة بارامترات صحيحة (x, y, z, w) تخضع لشروط محددة. وصيغة ديكسون الصريحة التي تولد الخماسية (a, b, c, d, e):

$$a = 2xw$$

$$b = 2yw$$

$$c = 2zw$$

$$d = |x^2 + y^2 + z^2 - w^2|$$

$$e = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

وتكون الخماسية الناتجة أولية شريطة أن يكون $\gcd(x, y, z, w) = 1$ وأن يكون المجموع $e = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ عدداً فردياً [2]. وفي هذا السياق، وعلى الرغم من الشمولية الجبرية التي تتسم بها صيغة ديكسون، إلا أنها تعمل بمثابة "بنية مغلقة"، إذ إنها تولد الحلول بكفاءة دون أن تكشف عن الأساس البنيوي أو الهندسي الذي ترتكز عليه.

- **مراجعة الأدبيات وتحديد الفجوة المعرفية:** ركّزت الأدبيات الرياضية بشكل كبير على إيجاد وتعميم الصيغ البارامترية للمعادلات الديوفانتية. وفي حين تم تحقيق فهم بنيوي عميق لمشاكل مشابهة، مثل ربط مبرهنة لاغرانج للمربعات الأربعة بالبنية الضربية لحلقة كواتيرنيونات هورويتز [3][4]، ظل النهج المتبع مع الخماسيات الفيثاغورية منقسماً إلى اتجاهين رئيسيين:
  - **الأول، هو النهج الجبري الشامل:** والذي يهدف إلى إيجاد بارامتريزية كاملة يمكنها توليد جميع الحلول. يتوج هذا الاتجاه في أعمال باحثين مثل فريش وفاسرشتاين (Frisch and Vaserstein) [5]، حيث قدما بارامتريزية بولينومية معقدة ولكنها شاملة للخماسيات.. وعلى الرغم من قوتها الجبرية، فإن هذه الحلول غالباً ما تكون مجردة وتفتقر إلى تفسير هندسي مباشر.
  - **الثاني، هو النهج التحليلي–العددي:** والذي لا يركز على توليد الحلول بل على عدها. وفي هذا السياق، قدم هورليمان (Hürlimann) صيغاً دقيقة لحساب عدد الخماسيات الفيثاغورية الأولية [6]، مما يوفر رؤى قيمة حول توزيعها الإحصائي.

من هنا، تظهر فجوة معرفية واضحة في دراسة الخماسيات الفيثاغورية: على الرغم من وجود حلول جبرية شاملة [5] وصيغ دقيقة لعدها [6] .

- **مشكلة البحث:** يقتصر الفهم الرياضي السائد للخماسيات الفيثاغورية على المعالجة الجبرية البارامترية، التي وإن كانت توفر حلاً كاملاً، إلا أنها تُبقي هذه الكيانات العددية معزولة عن أي أساس بنيوي أو تفسير هندسي. هذا القصور المنهجي يطرح إشكالية جوهرية: هل الخماسيات الفيثاغورية هي مجرد حلول عددية لمعادلة ديوفانتية، أم أنها تمثل تجلياً لظاهرة رياضية أعمق تنشأ عند تقاطع الهندسة، والجبر، ونظرية الأعداد؟

- **هدف البحث:** يسعى هذا البحث إلى تجاوز النموذج الجبري المجرد عبر استكشاف فرضية وجود أصل هندسي–توليدي. وبشكل محدد، يهدف البحث إلى تحقيق الأهداف الآتية:

1) تأسيس منهجية بنائية جديدة لتوليد الخماسيات الفيثاغورية الأولية انطلاقاً من بنية هندسية أولية، تتمثل في زوج من المتجهات الصحيحة المتعامدة في الفضاء $\mathbb{Z}^3$، مع البرهنة على صحة المنهجية وتحديد الشروط الرياضية اللازمة والكافية لضمان أولية النتائج.
2) تقصّي نطاق شمولية المنهجية الهندسية عبر توصيف الفئة الجزئية من الخماسيات التي تغطيها بالكامل، ومن ثم إثبات عدم شموليتها العامة عبر تقديم مثال مضاد قاطع.
3) كشف العائق البنيوي الذي يحد من الشمولية الكاملة، وذلك بتوظيف جبر الكواتيرنيونات كأداة تحليلية متقدمة لربط قابلية البناء الهندسي بشرط "البحتية" في عوامل الكواتيرنيون.

- **أهمية البحث:** وتتجلى الأهمية العلمية لهذا البحث في أنها تتجاوز مجرد تقديم أداة توليد بديلة؛ فهي تُرسي تصنيفاً بنيوياً جديداً للخماسيات الفيثاغورية، يميز بين فئة "قابلة للبناء هندسياً" وأخرى "جبرية بحتة". هذا التصنيف لا يعمق الفهم البنيوي لهذه الكيانات فحسب، بل يقيم جسراً مفاهيمياً بين مجالات رياضية متمايزة، ويفتح آفاقاً بحثية جديدة لفهم الظواهر العددية من منظور هندسي–جبري متكامل.

2. البناء الهندسي–الجبري للمنهجية

بعد أن أرست الفقرة الأولى السياق التاريخي وحددت الفجوة المعرفية في دراسة الخماسيات الفيثاغورية، تشرع هذه الفقرة في بناء مساهمتنا الجوهرية والتي تمثّل منهجية بنائية لتوليد الخماسيات الفيثاغورية الأولية والتي تستند إلى البنية الجبرية للمتجهات ذات المركبات الصحيحة في الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد $\mathbb{Z}^3$. سنثبت أن أي خماسية فيثاغورية ليست مجرد مجموعة من الأعداد تحقق علاقة جبرية، بل هي تجلّيٌ عددي لتفاعل هندسي محدد بين زوج من المتجهات الصحيحة

المتعامدة. الأداة المحورية التي تربط بين الهندسة ونظرية الأعداد في عملنا هي متطابقة لاغرانج، والتي سنقدمها ونوظّفها لإرساء الأساس الرياضي لمنهجيتنا.

1.2 الأساسيات الرياضية: ليكن $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3), \vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ متجهين في الفضاء الإقليدي الحقيقي $\mathbb{R}^3$.

تعريف 1: (العمليات المتجهية القياسية) [7]

- **النظيم الإقليدي التربيعي (Squared Euclidean Norm):** يُعرّف بأنه

$$\|\vec{p}\|^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$$

- **الجداء الداخلي (Dot Product):** يُعرّف بأنه

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$$

- **الجداء الخارجي (Cross Product):** يُعرّف بأنه

$$\vec{p} \times \vec{q} = (p_2q_3 - p_3q_2, p_3q_1 - p_1q_3, p_1q_2 - p_2q_1)$$

مبرهنة 1: (متطابقة لاغرانج – Lagrange's Identity)

لكل متجهين $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$، تتحقق المتطابقة الآتية:

$$\|\vec{p} \times \vec{q}\|^2 = \|\vec{p}\|^2\|\vec{q}\|^2 - (\vec{p} \cdot \vec{q})^2$$

هذه المتطابقة أساسية لأنها تربط بين المفاهيم الهندسية الثلاثة (الأطوال، والزوايا، والمساحات) في علاقة جبرية واحدة. تاريخياً، تُعد هذه المتطابقة حالة خاصة من متطابقة "بينيه–كوشي" (Binet–Cauchy) الأعم، وتُعرف في الفضاء ثلاثي الأبعاد باسم متطابقة لاغرانج نسبةً إلى جوزيف لوي لاغرانج الذي أثبت مكافئها الجبري [7].

تعريف 2: (الخماسية الفيثاغورية الأولية)

الخماسية (a, b, c, d, e) هي حل صحيح وموجب للمعادلة الديوفانتية

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$$

وتكون الخماسية أولية إذا كان القاسم المشترك الأكبر لعناصرها يساوي واحداً، أي $\gcd(a, b, c, d, e) = 1$. يركز هذا البحث على توليد الحلول الأولية، حيث يمكن اشتقاق جميع الحلول الأخرى منها عبر الضرب في ثابت صحيح. [1]

2.2 اشتقاق المنهجية البنائية: نبدأ الآن ببناء منهجيتنا من المبادئ الأولية، منطلقين من كائن هندسي بدلاً من المعادلة العددية.

ننطلق من زوج من المتجهات الصحيحة وغير الصفرية $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{Z}^3$، ونفرض عليهما شرط التعامد.

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$$

عند تطبيق شرط التعامد على متطابقة لاغرانج (مبرهنة 1.2)، تُختزل المتطابقة إلى صيغة أبسط وأكثر أناقة:

$$\|\vec{p} \times \vec{q}\|^2 = \|\vec{p}\|^2 \|\vec{q}\|^2$$

هذه العلاقة هي حجر الزاوية الذي سنبني عليه منهجيتنا، حيث إنها تربط بين معايير ثلاثة متجهات صحيحة.

$$(\|\vec{p} \times \vec{q}\|^2, \|\vec{p}\|^2, \|\vec{q}\|^2)$$

تعريف 3: (بناء الخماسية من المتجهات المتعامدة)

ليكن $\vec{p}, \vec{q}$ زوجاً من المتجهات الصحيحة المتعامدة. نعرّف خمسة أعداد (a, b, c, d, e) على النحو الآتي:

- $e = \|\vec{p}\|^2 + \|\vec{q}\|^2$
- $d = |\ \|\vec{p}\|^2 - \|\vec{q}\|^2|$
- المتجه (a, b, c) يُعرّف بأنه ضعف متجه الجداء الخارجي

$$(a, b, c) = 2(\vec{p} \times \vec{q})$$

وبالتالي يمكن إعادة ترتيب المعادلة الفيثاغورية على الصورة:

$$a^2 + b^2 + c^2 = e^2 - d^2$$

والتي تكافئ $a^2 + b^2 + c^2 = (e - d)(e + d)$. بناءً على ذلك، إذا اخترنا تعريفات d و e بحيث يكون الطرف الأيمن متناسباً مع $\|\vec{p}\|^2 \|\vec{q}\|^2$، وتعريفات a, b, c بحيث يكون الطرف الأيسر مساوياً لنفس القيمة، فنكون قد أوجدنا حلاً للمعادلة.

تعريفاتنا d و e تؤدي إلى:

$$(e - d)(e + d) = 4\|\vec{p}\|^2\|\vec{q}\|^2$$

وتعريفنا (a, b, c) يؤدي، بعد تطبيق شرط التعامد على متطابقة لاغرانج، إلى

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4\|\vec{p} \times \vec{q}\|^2 = 4\|\vec{p}\|^2\|\vec{q}\|^2$$

تطابق الطرفين يبرر صحة هذه التعريفات.

مبرهنة 2 (مبرهنة الصحة):

ليكن $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{Z}^3$، زوجاً من المتّجهات الصحيحة المتعامدة وغير الصفريّة، عندئذٍ فإنّ الخماسيّة (a, b, c, d, e) المولدة وفق التعريف 3 هي خماسية فيثاغورية صحيحة.

الإثبات:

i. **صحة الأعداد الصحيحة:** بما أن $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{Z}^3$، فإن مكوناتهما $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$.

- $\|\vec{p}\|^2 = \sum p_i^2$ و $\|\vec{q}\|^2 = \sum q_i^2$ هما عددان صحيحان. وبالتالي، d و e عددان صحيحان.

مكونات الضرب الاتجاهي $\vec{p} \times \vec{q}$ تنتج عن عمليات ضرب وطرح لأعداد صحيحة، وبالتالي هي أعداد صحيحة. إذن، a, b, c أعداد صحيحة. [1]

ii. **صحة المعادلة الفيثاغورية:** إثبات أن $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$ يكافئ إثبات $a^2 + b^2 + c^2 = e^2 - d^2$

- **الطرف الأيمن**

$$(RHS): e^2 - d^2 = (\|\vec{p}\|^2 + \|\vec{q}\|^2)^2 - (\|\vec{p}\|^2 - \|\vec{q}\|^2)^2$$

نحصل على:

$$e^2 - d^2 = 4\|\vec{p}\|^2\|\vec{q}\|^2 \qquad (2.4)$$

- **الطرف الأيسر**

$$(LHS): a^2 + b^2 + c^2 = \|a, b, c\|^2 = \|2(\vec{p} \times \vec{q})\|^2 = 4\|\vec{p} \times \vec{q}\|^2 \quad (2.5)$$

- بما أن $\vec{p}, \vec{q}$ متعامدان $(\vec{p} \cdot \vec{q} = 0)$، فإن متطابقة لاغرانج (مبرهنة 1) تختزل إلى:

$$\|\vec{p} \times \vec{q}\|^2 = \|\vec{p}\|^2\|\vec{q}\|^2$$

- بالتعويض بهذه النتيجة في المعادلة (2.5)، نحصل على:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4\|\vec{p}\|^2\|\vec{q}\|^2$$

- بمقارنة هذه النتيجة مع المعادلة (2.4)، نجد أن $LHS = RHS$
- إذن، $a^2 + b^2 + c^2 = e^2 - d^2$، مما يثبت أنّ

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2$$

وهو المطلوب إثباته.

مبرهنة 3: (شروط الأولية)

لتكن الخماسية الفيثاغورية (a, b, c, d, e) المولَّدة من زوج متجهات صحيحة غير صفريَّة ومتعامدة $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{Z}^3$ وفقاً للتعريف 3. لتبسيط الصياغة، نعرّف مربع نظيم كل من المتجهين:

$$P = \| \vec{p}\|^2 \text{ و } Q = \| \vec{q}\|^2$$

تكون الخماسية (a, b, c, d, e) أولية، أي $\gcd(a, b, c, d, e) = 1$، إذا وفقط إذا تحقق الشرطين الآتيين معاً:

1. **الأولية النسبية للمعايير**: $\gcd(P, Q) = 1$
2. **شرط التباين الزوجي**: $P \not\equiv Q \pmod 2$

الإثبات:

1) إثبات الكفاية: نفرض أن الشرطين (1) و (2) صحيحان وسنبرهن أن الخماسية الناتجة تكون أولية.

نفرض أن: $\gcd(P, Q) = 1$ و $P \not\equiv Q \pmod 2$ **ولنثبت أن:** $\gcd(a, b, c, d, e) = 1$ وليكن $g = \gcd(a, b, c, d, e)$

1. بما أن g يقسم $d = P - Q$ و $e = P + Q$، فإنه يقسم كلاً من مجموعهما وفرقهما: [1]

$$g\,|(e+d) \implies g|2P$$
$$g\,|(e-d) \implies g|2Q$$

2. وبالتالي، $g|\gcd(2P,2Q)=2\cdot\gcd(P,Q)$ [1]
3. باستخدام الفرضية (1)، $\gcd(P,Q)=1$، نستنتج أن $g|2$ إذن

$$g\in\{1,2\}$$

4. من الفرضية (2)، P و Q مختلفا الزوجية. بالتالي، فإن $d=P-Q$ و $e=P+Q$ كلاهما عددان فرديان.
5. بما أن g يقسم العدد الفردي d (أو e)، فإن g يجب أن يكون فردياً.
6. العدد الصحيح الموجب الوحيد الذي يقسم 2 وهو فردي هو 1.

إذن، $g=1$

2) **إثبات اللزوم:** نفرض أن الخماسية أولية وسنبرهن أن الشرطين (1) و (2) محققين، أي سنفرض أنّ: $\gcd(a,b,c,d,e)=1$

أولاً، لإثبات أنّ $\gcd(P,Q)=1$ نقوم بما يلي:

1. نفرض بالتناقض أن $\gcd(P,Q)=k>1$ وليكن l أي قاسم أولي لـ k
2. بما أن $k|P$ و $k|Q$ ، فإن $k|d$ و $k|e$
3. من المتطابقتين المتجهيتين الأساسيتين: [7]

$$\vec{p}\times(\vec{p}\times\vec{q})=-P\vec{q}$$
$$\vec{q}\times(\vec{p}\times\vec{q})=Q\vec{p}$$

4. بأخذ التطابق $(mod\ l)$، وبما أن $P\equiv 0\ (mod\ l)$ و

$Q \equiv 0 \ (mod\ l)$، تصبح كلتا المعادلتين صفريتين:

$$\vec{p} \times (\vec{p} \times \vec{q}) \equiv \vec{0} \ (\mathrm{mod}\ l)$$
$$\vec{q} \times (\vec{p} \times \vec{q}) \equiv \vec{0} \ (\mathrm{mod}\ l)$$

5. هذا يعني أن المتجه $\vec{v} = \vec{p} \times \vec{q}$ موازٍ لكل من $\vec{p}$ و $\vec{q}$ في الفضاء المتجهي $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^3$

- إذا كان $\vec{p}$ و $\vec{q}$ مستقلين خطياً $(mod\ l)$، فإن المتجه الوحيد الموازي لكليهما هو المتجه الصفري، أي $\vec{v} \equiv \vec{0} \ (\mathrm{mod}\ l)$
- أما إذا كانا مرتبطين خطياً (متوازيين) $(mod\ l)$، فإن حاصل ضربهما الاتجاهي $\vec{v}$ يكون صفرياً أيضاً

في كلتا الحالتين، نصل إلى الاستنتاج الحتمي: $\vec{p} \times \vec{q} \equiv \vec{0} \ (\mathrm{mod}\ l)$

6. بما أن $(a, b, c) = 2(\vec{p} \times \vec{q})$، فإن a, b, c قابلة للقسمة على $2l$

7. بما أن d, e قابلة للقسمة على k (وبالتالي على l)، فإن l يكون قاسماً مشتركاً لجميع عناصر الخماسية. وبما أن $l > 1$، فهذا يناقض فرضية الأولية.

8. إذن، يجب أن يكون $\gcd(P, Q) = 1$.

ثانياً، لإثبات $P \equiv Q \pmod 2$:

1. نفرض بالتناقض أن P و Q لهما نفس الزوجية.
2. بما أن $\gcd(P, Q) = 1$ (من الجزء السابق)، فلا يمكن أن يكونا كلاهما زوجيين.
3. إذن، يجب أن يكونا كلاهما فرديين.
4. إذا كان P, Q فرديين، فإن $d = P - Q$ زوجي و $e = P + Q$ زوجي. كما أن a, b, c زوجية من تعريفها.

5. بالتالي، تكون جميع عناصر الخماسية الخمسة زوجية، مما يعني أن $\gcd(a,b,c,d,e) \geq 2$
6. هذا يناقض الفرضية بأن الخماسية أولية. **وبهذا يكتمل الإثبات.**

3. توصيف نطاق المنهجية وحدودها

بعد أن أثبتت الفقرة الثانية صحة منهجيتنا القائمة على المتجهات المتعامدة، يظل السؤال المحوري قائماً: هل هذه المنهجية شاملة؟ أي، هل يمكن توليد أي خماسية فيثاغورية أولية عبر اختيار مناسب لزوج من المتجهات الصحيحة المتعامدة؟ هذه الفقرة مكرسة لاستكشاف هذا السؤال بدقة. سنثبت أن المنهجية، رغم أناقتها، ليست شاملة بشكل مطلق. والأهم من ذلك، سنكشف عن البنية الجبرية الدقيقة التي تعمل كـ "عائق" أمام شموليتها، مما يقودنا إلى تصنيف أعمق للخماسيات الفيثاغورية نفسها.

مبرهنة 4 (الشمولية الجزئية):

المنهجية المعتمدة على المتجهات المتعامدة هي شاملة لجميع الخماسيات الفيثاغورية الأولية التي يمكن توليدها من بارامترات ديكسون (x,y,z,w) حيث يكون واحد على الأقل من x,y,z مساوياً للصفر. [2]

الإثبات: الهدف هو إثبات وجود متجهين صحيحين متعامدين $\vec{p},\vec{q} \in \mathbb{Z}^3$ يحققان النظام (4.3) لأي مجموعة بارامترات ديكسون أولية تخضع للشرط المذكور. نفرض دون الإخلال بالتعميم أن $z = 0$. يصبح النظام المطلوب حله:

$$\begin{cases} \|\vec{p}\|^2 = x^2 + y^2 \\ \|\vec{q}\|^2 = w^2 \\ \vec{p} \cdot \vec{q} = 0 \\ \vec{p} \times \vec{q} = w(x,y,0) \end{cases}$$

نعرف المتجهين $\vec{p}$ و $\vec{q}$:

$$\vec{p} = (-y, x, 0) \text{ و } \vec{q} = (0,0,w)$$

نتحقق من أن هذا الاختيار يحقق جميع الشروط الأربعة للنظام:

- نظيم $\vec{p}$: $\|\vec{p}\|^2 = (-y)^2 + x^2 + 0^2 = x^2 + y^2$. الشرط الأول محقق.
- نظيم $\vec{q}$: $\|\vec{q}\|^2 = 0^2 + 0^2 + w^2 = w^2$. الشرط الثاني محقق.
- التعامد: $\vec{p} \cdot \vec{q} = (-y)(0) + (x)(0) + (0)(w) = 0$ الشرط الثالث محقق.
- الجداء الخارجي

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ -y & x & 0 \\ 0 & 0 & w \end{vmatrix} = \mathrm{i}(xw) - \mathrm{j}(-yw) + \mathrm{k}(0) = (xw, yw, 0)$$

أوجدنا زوجاً من المتجهات الصحيحة المتعامدة التي تولد الخماسية الموافقة. وبهذا نكون قد أثبتنا أنّ المنهجية شاملة لهذه الفئة.

مبرهنة 5 (عدم الشمولية):

المنهجية المعتمدة على المتجهات المتعامدة في $\mathbb{Z}^3$ ليست شاملة لجميع الخماسيات الفيثاغورية الأولية.

الإثبات (بالمثال المضاد): نقدم مثالاً مضاداً. لنأخذ مجموعة بارامترات ديكسون الأولية: $(x, y, z, w) = (1,1,1,2)$

تنتج هذه البارامترات الخماسية $(a, b, c, d, e) = (4,4,4,-1,7)$. بما أن المعادلة الفيثاغورية تعتمد على مربعات العناصر، فإنها تكافئ الخماسية ذات العناصر الموجبة $(4,4,4,1,7)$. [2]

إذا كانت هذه الخماسية قابلة للبناء بمنهجيتنا، فيجب وجود متجهين صحيحين $\vec{p}$ و $\vec{q}$ يحققان:

$$\|\vec{q}\|^2 = (e - |d|)/2 = (7-1)/2 = 3.$$
$$\vec{p} \times \vec{q} = (a/2, b/2, c/2) = (2,2,2).$$

من خاصية الضرب الاتجاهي، يجب أن يكون المتجه $\vec{q}$ متعامداً على $\vec{p} \times \vec{q}$ وبالتالي:

$$\vec{q} \cdot (2,2,2) = 0 \implies q_1 + q_2 + q_3 = 0$$

نبحث إذن عن متجه صحيح $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{Z}^3$ يحقق النظام:

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 3 \quad .1$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = 0 \quad .2$$

الحلول الصحيحة الوحيدة للمعادلة الأولى هي تباديل $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. من الواضح أن أي من هذه الحلول يجعل المجموع $q_1 + q_2 + q_3$ عدداً فردياً غير صفري. وبالتالي، لا يوجد متجه صحيح $\vec{q}$ يحقق كلا الشرطين.

إذن، يستحيل بناء هذه الخماسية الأولية باستخدام المنهجية المقترحة.

1.3 كشف العائق الجبري عبر الكواتيرنيونات: لفهم السبب الجذري لعدم الشمولية، ننتقل إلى الإطار الجبري الطبيعي للمسألة: جبر الكواتيرنيونات.

تمثل الكواتيرنيونات التي قدمها هاملتون، امتداداً للأعداد المركبة إلى أربعة أبعاد، وتُعرف عناصرها بالصيغة $q = a + bi + cj + dk$ حيث a, b, c, d أعداد حقيقية، والوحدات التخيلية i, j, k تحقق العلاقات الأساسية:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

في سياق هذا البحث، نهتم بحلقة "كواتيرنيونات ليبشتز الصحيحة" (Lipschitz integer quaternions)، وهي الكواتيرنيونات التي تكون معاملاتها a, b, c, d أعداداً صحيحة. يوجد

تقابل (isomorphism) مباشر بين الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$ وفضاء "الكواتيرنيونات البحتة" (pure quaternions)، وهي تلك التي يكون جزؤها الحقيقي صفراً $(a = 0)$ [4] هذا التقابل هو الذي يسمح بترجمة المسألة الهندسية للمتجهات المتعامدة إلى مسألة جبرية بحتة.

تعريف 4 (أعداد ليبشتز البحتة):

أعداد ليبشتز هي عناصر من الصورة $a + bi + cj + dk$ حيث a, b, c, d أعداد صحيحة.

- يكون الكواتيرنيون "بحتاً" إذا كان جزؤه الحقيقي صفراً [4].
- يوجد تقابل بين المتجهات في $\mathbb{R}^3$ والكواتيرنيونات البحتة.
- حاصل ضرب كواتيرنيونين بحتين p و q (مناظرين لمتجهين) يُعطى بالصيغة:

$$pq = -(\vec{p} \cdot \vec{q}) + (\vec{p} \times \vec{q})$$

هذه الصيغة الأساسية هي التي تربط الجبر المتجهي بجبر الكواتيرنيونات [3] تترجم المسألة العكسية (إيجاد p, q من خماسية معطاة) إلى إيجاد كواتيرنيونين بحتين وصحيحين p, q يحققان النظام:

$$\begin{cases} N(p) = x^2 + y^2 + z^2 \\ N(q) = w^2 \\ pq = w(xi + yj + zk) \end{cases} \quad (3.5)$$

حيث $N(p)$ هو نظيم الكواتيرنيون p.

تحليل المثال المضاد:

- بالنسبة للبارامترات $(1,1,1,2)$، يتطلب النظام إيجاد p, q بحتين وصحيحين بحيث:
  - $N(p) = 3, N(q) = 4$
  - $\mathrm{pq} = 2(i + j + k)$

- الكواتيرنيون البحت الصحيح الوحيد (حتى التبديل والإشارة) الذي نظيمه 3 هو $p = i + j + k$
- بحل المعادلة $pq = 2(i + j + k)$ بالنسبة لـ q، نضرب من اليسار في مرافق p

$$\bar{\mathrm{p}}(\mathrm{pq}) = \bar{\mathrm{p}}(2(i + j + k)) \implies N(\mathrm{p})\mathrm{q} = -2(i + j + k)^2$$

بما أن $N(p) = 3$ و $(i + j + k)^2 = i^2 + j^2 + k^2 = -3$ [4]:

$$3\mathrm{q} = -2(-3) = 6 \implies \mathrm{q} = 2$$

- الحل الوحيد هو $q = 2$. هذا الكواتيرنيون يحقق شرط النظيم $(N(2) = 4)$ وهو من نوع ليبشتز (صحيح)، ولكنه ليس بحتاً، حيث أن جزأه الحقيقي غير صفري.
- **الاستنتاج:** لقد أثبتنا أن حل المسألة العكسية يتطلب بالضرورة عاملاً غير بحت. بما أن منهجيتنا مبنية حصراً على المتجهات التي تقابل كواتيرنيونات بحتة، فإنها لا يمكن أن تولد هذه الخماسية.

إن شمولية المنهجية تعتمد على إمكانية تحليل الكواتيرنيون $w(xi + yj + zk)$ إلى عاملين بحتين في حلقة الكواتيرنيونات الصحيحة. لقد أثبتنا أن هذا الشرط لا يتحقق دائماً، وهذا هو العائق الجبري الأساسي للشمولية الكاملة.

4. التحليل الحسابي والخوارزمي

سنقدم خوارزميتين أساسيتين:

1) **الخوارزمية المباشرة:** لتوليد الخماسيات الفيثاغورية من زوج من المتجهات الصحيحة المتعامدة.
2) **خوارزمية التحقق من قابلية البناء:** وهي خوارزمية عكسية تختبر ما إذا كانت خماسية أولية معطاة تنتمي إلى الفئة القابلة للبناء هندسياً، وتستخلص، إن أمكن، المتجهات المولِّدة لها.

1.4 الخوارزمية المباشرة: من الهندسة إلى العدد: تنفذ هذه الخوارزمية المنهجية البنائية بشكل مباشر، حيث تنطلق من الكيان الهندسي (زوج المتجهات) لتوليد الكيان العددي (الخماسية)، مع التحقق من أوليتها.

خوارزمية 1.4: توليد خماسية فيثاغورية

- **المدخلات:** زوج من المتجهات
$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3),\ \vec{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{Z}^3$.
- **المخرجات:** الخماسية (a, b, c, d, e) وحالة أوليتها(أولية أم لا).

الخطوات:

1) **التحقق من الصلاحية:** التأكد من أن المتّجهين $\vec{p},\ \vec{q}$ غير صفريين وأنّهما متعامدان.
2) **حساب مربعات النظيم:** $P = \|\vec{p}\|^2;\ Q = \|\vec{q}\|^2$
3) **حساب عناصر الخماسية:**
   - $(a, b, c) \leftarrow 2(\vec{p} \times \vec{q})$
   - $d \leftarrow |P - Q|$
   - $e \leftarrow P + Q$
4) **التحقق من الأولية:** فحص ما إذا كانت الخماسية أولية عبر التحقق من الشرطين:
   - $\gcd(P, Q) = 1$ ✓
   - $P \not\equiv Q \pmod 2$ ✓
5) **إرجاع المخرجات:** الخماسية الناتجة هي $(|a|, |b|, |c|, d, e)$ مع تحديد حالة أوليتها بناءً على نتيجة الخطوة 4.

مثال 1.4: توليد خماسية أولية

- **المدخلات:** $\vec{p} = (2,1,0)\ \vec{q} = (1, -2,3),$
- **التحقق:**

- $\vec{p} \cdot \vec{q} = 2 - 2 + 0 = 0$ (متعامدان)
- $P = 2^2 + 1^2 + 0^2 = 5, Q = 1^2 + (-2)^2 + 3^2 = 14$
- $\gcd(5,14) = 1$ و $14 \pmod 2 \not\equiv 5$. (شروط الأولية محققة)

- **الحساب:**
  - $\vec{p} \times \vec{q} = (3, -6, -5)$
  - $(a, b, c) = (6, -12, -10)$
  - $e = 5 + 14 = 19 \; d = |5 - 14| = 9,$

- **المخرجات: الخماسية الأولية:**

$(|a|, |b|, |c|, d, e) = (6,12,10,9,19)|)$ وهذه الخماسية أوليّة

- **التحقق:**

$$6^2 + 12^2 + 10^2 + 9^2 = 361 = 19^2$$

2.4 الخوارزمية العكسية: التحقق من قابلية البناء: تتناول هذه الخوارزمية المسألة العكسية، حيث تبدأ من خماسية أولية وتختبر ما إذا كانت قابلة للبناء هندسياً.

خوارزمية 2.4: التحقق من قابلية البناء الهندسي (الخوارزمية العكسية)

- **المدخلات:** خماسية فيثاغورية أولية وموجبة (a, b, c, d, e) بصيغتها القياسية $(a, b, c$ زوجية، d, e فردية وموجبة).
- **المخرجات:** زوج المتجهات الصحيحة المتعامدة $(\vec{p}, \vec{q})$ الذي يولد الخماسية، أو "غير قابلة للبناء" إذا كان هذا الزوج غير موجود في $\mathbb{Z}^3$

الخطوات :

1) حساب الكميات المستهدفة:

$$P_{\text{target}} \leftarrow \frac{e+d}{2}$$

$$Q_{\text{target}} \leftarrow \frac{e-d}{2}$$

$$\vec{u}_{\text{vec}} \leftarrow \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

2) **فحص شرط ليجاندر (تمهيدي):** التحقق من أن كلاً من P_{target} و Q_{target} يمكن كتابته كمجموع ثلاثة مربعات أعداد صحيحة. إذا فشل الشرط لأي منهما، تتوقف الخوارزمية وتُعيد "غير قابلة للبناء"

3) **توليد المتجهات المرشحة:** إيجاد مجموعة الحلول الصحيحة S_q للمعادلة الديوفانتية:

$$Q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = Q_{\text{target}}$$

4) **الاختبار والتحقق التكراري:** لكل متجه مرشح $\vec{q}_{\text{cand}} \in S_q$:

a. التحقق من التعامد: تحقق مما إذا كان

$$\vec{u}_{\text{vec}} \cdot \vec{q}_{\text{cand}} = 0$$

إذا لم يكن كذلك، انتقل إلى المتجه المرشح التالي.

b. حساب المعامل القياسي: احسب

$$\lambda^2 \leftarrow \frac{P_{\text{target}}}{||\vec{u}_{\text{vec}}||^2 \cdot ||\vec{q}_{\text{cand}}||^2}$$

تحقق مما إذا كان λ^2 مربعاً كاملاً لعدد نسبي λ. إذا لم يكن كذلك، انتقل إلى المتجه المرشح التالي

c. بناء المتجه واختبار الصحة: احسب المتجه المرشح

$$\vec{p}_{\text{cand}} \leftarrow \lambda(\vec{u}_{\text{vec}} \times \vec{q}_{\text{cand}})$$

تحقق فيما إذا كانت جميع مكونات $\vec{p}_{\text{cand}}$ أعداداً صحيحة

d. النجاح: إذا كانت المكونات صحيحة، فقد تم العثور على الزوج المولد. أعد الزوج $(\vec{p}_{\text{cand}}, \vec{q}_{\text{cand}})$ وأوقف الخوارزمية.

5) **نتيجة الفشل:** إذا انتهت عملية الفحص لجميع المتجهات المرشحة في S_q دون العثور على زوج صالح، تُعيد الخوارزمية "غير قابلة للبناء".

مثال 2.4: التحقق من خماسية قابلة للبناء

- **المدخل:** الخماسية الأولية $(8,4,0,1,9)$ (من بارامترات ديكسون $(2,1,0,2)$).
- **الخطوات:** $P_{target} = \frac{9+1}{2} = 5$ ، $Q_{target} = \frac{9-1}{2} = 4$

$$\vec{u} = (4,2,0)$$

a. حلول $\|\vec{q}\|^2 = 4$: هي تباديل $(\pm 2,0,0)$ و $(\pm 1, \pm 1, \sqrt{2})$ (غير صحيح). إذن

$$S_q = \{(\pm 2,0,0), (0, \pm 2,0), (0,0, \pm 2)\}$$

b. نختبر $\vec{q} = (1,-2,0)$ فنجد أن النظيم ليس 4.

نختبر $\vec{q} = (2,0,0)$

$$\vec{q} = (2,0,0) \cdot \vec{u} = (2,0,0) \cdot (4,2,0) = 8 \neq 0$$

c. نختبر $\vec{q} \cdot \vec{u} = 0$, $\vec{q} = (0,0,2)$. (مرشح صالح).

d. $\vec{v}_{cand} = \vec{u} \times \vec{q} = (4,2,0) \times (0,0,2) = (4,-8,0)$

e. $\|\vec{u}\|^2 = 20, Q_{target} = 4, P_{target} = 5$

f. $\lambda^2 = \frac{5}{20 \cdot 4} = \frac{1}{16} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$

g. $\vec{p} = \left(\frac{1}{4}\right)(4,-8,0) = (1,-2,0)$ هذا متجه صحيح.

h. المخرجات: الزوج $(\vec{p}, \vec{q}) = \big((1,-2,0),(0,0,2)\big)$

مثال 3.4: التحقق من المثال المضاد

- **المدخل:** الخماسية الأولية $(4,4,4,1,7)$
- **الخطوات:**

a. $P_{target} = 4, Q_{target} = 3,\ \vec{u} = (2,2,2)$

b. حلول $\|\vec{q}\|^2 = 3$: هي تباديل $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

c. For each $\vec{q}$ in $\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1), \dots\}$:

- $\vec{q} \cdot \vec{u} = q_1(2) + q_2(2) + q_3(2) = 2(q_1 + q_2 + q_3)$
- بما أن $q_i \in \{\pm 1\}$، فإن $q_1 + q_2 + q_3$ هو عدد فردي.
- إذن $\vec{q} \cdot \vec{u} \neq 0$ لجميع المرشحين.

d. المخرجات: "غير قابلة للبناء".

5. مناقشة، النتائج والتوصيات

❖ **النتائج:** لقد أثمر هذا البحث عن تحقيق مجموعة من النتائج الجوهرية والمترابطة في دراسة بنية الخماسيات الفيثاغورية، والتي يمكن تلخيصها في النقاط التالية:

1) **تأسيس منهجية بنائية:** تم بنجاح تطوير وتقديم منهجية بنائية جديدة لتوليد الخماسيات الفيثاغورية الأولية انطلاقاً من أزواج المتجهات الصحيحة المتعامدة في الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد ($\mathbb{Z}^3$). وقد تم إثبات صحة هذه المنهجية رياضياً.

2) **تحديد شروط الأولية:** تم اشتقاق وبرهنة الشروط الرياضية اللازمة والكافية لضمان أن تكون الخماسية الفيثاغورية المولّدة عبر هذه المنهجية أولية، وتتلخص هذه الشروط في

شرطين أساسيين: الأولية النسبية لمربعات النظيم للمتجهين المولدين، وشرط التباين الزوجي لهما.

3) **توصيف نطاق الشمولية وإثبات محدوديته:** أثبت البحث أن المنهجية المقترحة هي شاملة لفئة جزئية مهمة من الخماسيات الفيثاغورية الأولية (تلك التي يمكن اشتقاقها من بارامترات ديكسون (x, y, z, w) حيث يكون أحد البارامترات x, y, z مساوياً للصفر). ومع ذلك، تم إثبات أن هذه المنهجية ليست شاملة كلياً عبر تقديم مثال مضاد، وهو الخماسية $(4,4,4,1,7)$.

4) **كشف العائق الجبري عبر جبر الكواتيرنيونات:** تم توظيف جبر الكواتيرنيونات كأداة تحليلية متقدمة لتفسير سبب عدم الشمولية الكاملة للمنهجية الهندسية. وقد كشف التحليل أن العائق البنيوي الأساسي يتمثل في شرط جبري محدد: قابلية تحليل كواتيرنيون معين إلى عاملين من الكواتيرنيونات البحتة.

5) **تقديم تصنيف بنيوي جديد:** بناءً على النتائج السابقة، يقدم هذا البحث مساهمته الأكثر أهمية، وهي تصنيف بنيوي جديد للخماسيات الفيثاغورية الأولية يميزها إلى فئتين متمايزتين جوهرياً:

- **الفئة الأولى: الخماسيات "القابلة للبناء هندسياً"**: وهي تلك التي يمكن توليدها مباشرة عبر منهجية المتجهات المتعامدة، وتكافئ جبرياً تلك التي يمكن تحليل كواتيرنيوناتها المولدة إلى عاملين من الكواتيرنيونات البحتة.
- **الفئة الثانية: الخماسيات "غير القابلة للبناء هندسياً" أو "ذات الأصل الجبري العام"**: وهي تلك التي لا يمكن توليدها بالمنهجية الهندسية المقترحة. يتطلب تحليلها في إطار الكواتيرنيونات عاملاً واحداً على الأقل غير بحت (له جزء حقيقي غير صفري). تجدر الإشارة إلى أن مصطلح "جبري" هنا لا يعني أن الفئة الأولى ليست جبرية، بل يشير إلى أن أصل هذه الفئة لا يقتصر على البنية الهندسية للمتجهات في $\mathbb{Z}^3$، وإنما يتطلب بنية جبرية أعم (حلقة كواتيرنيونات ليبشتز بأكملها) لا يمكن اختزالها بالكامل إلى متجهات بحتة.

❖ **المقترحات والتوصيات:** انطلاقاً من التصنيف البنيوي الذي تم الكشف عنه والفجوات المعرفية التي أبرزها، يوصي البحث بالتوجه نحو المسارات البحثية المستقبلية التالية:

1) **تعميم المنهجية الهندسية وتطوير نظرية موحدة:** يُقترح العمل على تعميم المنهجية البنائية الحالية لتشمل فئة الخماسيات "الجبرية البحتة". قد يتطلب ذلك توسيع الإطار الهندسي من فضاء المتجهات البحتة ($\mathbb{Z}^3$) إلى بنية جبرية أعم تسمح بدمج المكون الحقيقي الذي يظهر في عوامل الكواتيرنيونات غير البحتة. الهدف الأسمى هو تطوير صيغة بارامترية موحدة تولد جميع الخماسيات الأولية وتوضح الأصل البنيوي لكل فئة.

2) **دراسة الكثافة النسبية للفئات ضمن نظرية الأعداد التحليلية:** يفتح التصنيف الجديد سؤالاً جوهرياً في نظرية الأعداد التحليلية: ما هي الكثافة النسبية للخماسيات "القابلة للبناء هندسياً" مقارنة بالخماسيات "الجبرية البحتة"؟ يوصى بالبدء بتحقيقات حسابية باستخدام الخوارزميات المطورة في هذا البحث لتقدير هذه النسبة، ومن ثم الانتقال إلى محاولة إثباتها نظرياً باستخدام أدوات متقدمة في نظرية الأعداد.

3) **تحليل التعقيد الحسابي وتطبيقاته في علم التشفير:** يُقترح دراسة "مسألة التحليل العكسي" المرتبطة بالمنهجية: بالنظر إلى خماسية فيثاغورية أولية "قابلة للبناء هندسياً"، ما هو التعقيد الحسابي لإيجاد زوج المتجهات الصحيحة المتعامدة التي تولدها؟ إذا ثبت أن هذه المسألة صعبة حسابياً، فقد تشكل أساساً لتصميم أنظمة تشفير جديدة قائمة على بنية جبرية–هندسية

المراجع(References):

1. Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). An Introduction to the Theory of Numbers (6th ed.). Oxford University Press.
2. Dickson, L. E. (1920). History of the theory of numbers: Diophantine analysis (Vol. 2). Carnegie Institution of Washington.
3. Smith, D. A. (2003). On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry. AK Peters.
4. Voight, J. (2021). Quaternion algebras (p. 885). Springer Nature.
5. S. Frisch and L. Vaserstein, "Polynomial parametrization of Pythagorean quadruples, quintuples and sextuples," J. Pure Appl. Algebra, vol. 216, no. 1, pp. 184–191, Jan. 2012, doi: 10.1016/j.jpaa.2011.06.002 https://arxiv.org/submit/6311235/preview
6. Hürlimann, W. E. R. N. E. R. (2015). On the number of primitive Pythagorean quintuples. Journal of Algebra, Number Theory: Advances and Applications, 13(1), 13-28.
7. M. R. Spiegel, (2009) Schaum's Outline of Vector Analysis, 2nd ed. New York, NY: McGraw-Hill.