الحلقات شبه المحلية بالنسبة إلى مثالي يميني

إيمان الخوجة[1] حمزة حاكمي[2] مريم حاكمي[3]

الملخص

تعد الحلقة المحلية، واحدة من أهم الحلقات في صف الحلقات التي أساس جاكبسون لها لايساوي الصفر. لأجل ذلك درسنا في هذه الورقة العلمية تعميماً للحلقة المحلية تحت اسم الحلقة شبه المحلية بالنسبة إلى مثالي يميني. حيث نقول عن حلقة ما R إنها شبه محلية بالنسبة إلى المثالي اليميني $P \neq R$ إذا كان لأجل كل عنصر $a \in R$ إما العنصر a أو العنصر $1-a$ يكون قابلاً للقلب جزئياً في R بالنسبة إلى المثالي اليميني P. وقد تبين لنا أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R شبه محلية بالنسبة إلى المثالي اليميني $P \neq R$، إذا كان لأجل كل عنصر $a \in R$ إما Ra أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً $P-$جامداً $e \in R$ وأن $e \notin P$. إضافة لذلك، تكون الحلقة R شبه محلية بالنسبة إلى المثالي اليميني $P \neq R$ عندما وفقط عندما لأجل أي مثاليين يساريين A, B للحلقة R يحققان $R = A + B$، إما A أو B يحوي عنصراً $P-$جامداً $e \in R$ وأن $e \notin P$.

إضافة لذلك، درسنا العلاقة بين الحلقة R وحلقة المصفوفات فوق R، حيث أثبتنا أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R شبه محلية هو أن تكون حلقة المصفوفات القطرية من المرتبة الثانية $D_2(R)$، شبه محلية بالنسبة لمثاليين يمينيين P_0 و Q_0 معرفين مسبقاً.

الكلمات المفتاحية. العنصر الجامد، العنصر القابل للقلب جزئياً، الحلقة المحلية وشبه المحلية. العنصر $P-$الجامد، العنصر $P-$القابل للقلب جزئياً، الحلقات $P-$شبه المحلية.

---

[1] أستاذ مساعد في قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة حمص.

[2] أستاذ في قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة حمص.

[3] طالب دراسات عليا في قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة حمص.

رقم التصنيف العالمي للعام 2020: 16E40, 16E70, 16D40, 16D50, 16U99.

Quasi-Local Rings
Relative to Right Ideal

Eaman Al-Khouja[1] Hamza Hakmi[2] Maryam Bassam Hakmi[3]

Abstract

The local ring is conceder one of the most important rings in the class of rings which has a nonzero Jacobson radical. For that we study in this scientific paper a generalization for the local ring, called a quasi-local ring relative to right ideal. Where we call a ring R is a quasi-local ring relative to right ideal $P \neq R$ of a ring R, if for every element $a \in R$ either a or $1-a$ is a partially invertible element relative to P in R. We show that the necessary and suffic-ient condition to be that a ring R is quasi-local relative to right ideal $P \neq R$ of R, if and only if for every element $a \in R$ either a or $1-a$ contains an $P-$idempotent element $e \in R$, $e \notin P$.

In addition to that, we proved that the ring R is quasi-local relative to right ideal $P \neq R$ of R, if and only if for every two left ideals A, B of a ring R such that $R = A + B$, either A or B contains an $P-$idempotent element $e \in R$, $e \notin P$.

Furthermore, we study the relationship between the ring R and the ring of matrices ring over R. Where, we proved that the necessary and sufficient condition to be that a ring R is quasi-local, if the ring of 2×2 diagonal matrices $D_2(R)$ over R is quasi-local relative to some right ideals P_0, Q_0 of $D_2(R)$.

Key Words: Idempotent and partially invertible elements, Local, Quasi-local and $P-$Quasi-local ring, $P-$idempotent, $P-$partially invertible.

2020 **Mathematical Subject Classification:** 16E40, 16E70, 16D40, 16D50, 16U99 .

[1] Assistant Professor, Department of Mathematics Homs University.
[2] Professor, Department of Mathematics Homs University.
[3] Department of Mathematics Homs University.

المقـــدمـــة.

إن صف الحلقات يمكن تجزئته إلى صفين غير متقاطعين، الأول هو صف الحلقات التي أساس جاكبسون له يساوي الصفر، ومن أهم عناصر هذا الصف الحلقات البسيطة ونصف البسيطة. أما الصف الثاني، هو صف الحلقات التي أساس جاكبسون لا يساوي الصفر، ومن أهم عناصر هذا الصف الحلقات المحلية والأرتينية. لما كان للحلقة المحلية أهمية كبيرة في نظرية الحلقات، فقد ظهر لها الكثير من التعاميم. حيث نقول عن حلقة ما إنها محلية إذا حوت مثالياً أعظمياً واحداً فقط. ينتج من هذا التعريف أن كل عنصر a من حلقة محلية R إما أن يكون قابلاً للقلب في R أو أن العنصر $1-a$ يكون قابلاً للقلب في R، وبالتالي لأجل كل عنصر a من حلقة محلية R يحقق إما $aR \cong R$ أو $(1-a)R \cong R$، وبالتالي فإن هذه الحلقة تحوي بداخلها نسخاً كثيرة عنها. فضلاً عن ذلك إن هذه الحلقة لا تحوي حدوداً مباشرة تختلف عن R والصفر. لأجل ذلك درسنا في هذه الورقة العلمية تعميماً للحلقة المحلية تحت اسم الحلقة شبه المحلية بالنسبة إلى مثالي يميني. حيث نقول عن حلقة ما R إنها شبه محلية بالنسبة إلى المثالي اليميني $P \neq R$ إذا كان لأجل كل عنصر $a \in R$ إما العنصر a أو العنصر $1-a$ يكون قابلاً للقلب جزئياً في R بالنسبة إلى المثالي اليميني P. وقد تبين لنا أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R شبه محلية بالنسبة إلى المثالي اليميني $P \neq R$، إذا كان لأجل كل عنصر $a \in R$ إما Ra أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً $-P$ جامداً $e \in R$ وأن $e \notin P$. إضافة لذلك، تكون الحلقة R شبه محلية بالنسبة إلى المثالي اليميني $P \neq R$ عندما وفقط عندما لأجل أي مثاليين يساريين A, B للحلقة R يحققان $R = A + B$، إما A أو B يحوي عنصراً $-P$ جامداً $e \in R$ وأن $e \notin P$. إضافة لذلك، درسنا العلاقة بين الحلقة R وحلقة المصفوفات فوق R، حيث أثبتنا أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R شبه محلية هو أن تكون حلقة المصفوفات القطرية من المرتبة الثانية $D_2(R)$، شبه محلية بالنسبة لمثاليين يمينيين P_0 و Q_0 محددين مسبقاً. وأثبتنا أيضاً، أن الشرط اللازم والكافي كي تكون الحلقة R شبه محلية هو أن تكون حلقة المصفوفات المثلثية العليا (السفلى) من المرتبة الثانية، شبه محلية بالنسبة لمثاليين يمينيين P و Q معرفين مسبقاً.

الهـــدف مـــن البحــــث.

لما كانت الحلقة المحلية تحتل أهمية كبيرة في نظرية الحلقات، نظراً لأنها تحتوي مثالياً أعظمياً واحداً فقط، حيث إنها تأتي في المرتبة الأولى من حيث الأهمية في نظرية الحلقات، وذلك في صف الحلقات التي أساس جاكبسون لها لا يساوي الصفر. ونظراً لهذه الأهمية تم في [6] دراسة الحلقات $r-$النظيفة بالنسبة إلى مثالي يميني كتعميم لهذه الحلقة، وفي هذه الورقة العلمية سندرس تعميماً جديداً لهذه الحلقة تحت اسم الحلقات $P-$شبه المحلية، وذلك لإعطاء وصف جديد لهذه الحلقة.

1 – الـــدراســـــة المـــرجعيـــــة.

جميع الحلقات R التي سندرسها هي حلقات واحدية فيها $1\neq 0$.

تعريـــــف $1-1$. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $a\in R$ إنه منتظم، إذا وجد عنصر $b\in R$ يحقق $a=aba$، ونقول عن الحلقة R إنها منتظمة إذا كان كل عنصر من الحلقة R هو عنصر منتظم، [4].

تعريـــــف $1-2$. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر $e\in R$ إنه جامد إذا كان $e^2=e$، ونقول عن العنصر الجامد $e\in R$ إنه مركزي إذا كان $eR=Re$، [1].

تعريـــــف $1-3$. لتكن R حلقة. نقول عن العنصر المغاير للصفر $a\in R$ إنه قابل للقلب جزئياً في R، إذا وجد عنصر $0\neq b\in R$ يحقق $b=bab$، ونقول عن الحلقة R إنها شبه منتظمة إذا كان كل عنصر مغاير للصفر هو قابل للقلب جزئياً في R، [5].

تعريـــــف $1-4$. نقول عن الحلقة R إنها محلية إذا كان لأجل كل عنصر $a\in R$، إما a أو $1-a$ قابل للقلب في R، [7].

تعريـــــف1−5. نقول عن الحلقة R إنها شبه محلية إذا كان لأجل كل عنصر $a \in R$ ، إما a أو $1-a$ قابل للقلب جزئياً في R .

تعريـــــف1−6. لتكن R حلقة، وليكن $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R. نقول عن العنصر $e \in R$ إنه جامد بالنسبة إلى المثالي اليميني P ، أو اختصاراً $P-$جامد إذا حقق الشروط $e^2 - e \in P$ وأن $eP \subseteq P$ ، [2].

الـدراســـــة البحثيــــــة.

2 – العنــاصــر $P-$القـــابلـــــة للقــلـــب جـــزئيـــاً.

تعريـــــف 2−1.

لتكن R حلقة، وليكن $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R. نقول عن العنصر $a \in R$ إنه قابل للقلب جزئياً في R بالنسبة إلى المثالي اليميني P ، أو اختصاراً $P-$قابل للقلب جزئياً، إذا وجد عنصر $b \in R$ بحيث إن $b \notin P$ ويحقق أن $bab - b \in P$ وأن $baP \subseteq P$.

ينتج من التعريف مباشرة أنه لأجل $P = 0$ فإن مفهومي العناصر القابلة للقلب جزئياً والعناصر $P-$القابلة للقلب جزئياً، يتطابقان.

اعتماداً على التعريف السابق يمكننا صياغة التمهيدية الآتية:

تمهيديـــــــة 2−2.

لتكن R حلقة، وليكن $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R. كل من العنصرين $1,-1 \in R$ هو عنصر قابل للقلب جزئياً في R بالنسبة لأي مثالي يميني $P \neq R$ للحلقة R .

البرهـــــــان.

لما كان $0 \in P$ ، فإنه لأجل $a = b = 1$ نجد $1-1 = 0 \in P$ وأن $1P \subseteq P$. أيضاً لأجل $a = b = -1$ نجد أن:

$$(-1)(-1)(-1)-(-1)=-1+1=0\in P$$

وأن $(-1)(-1)P\subseteq P$. فضلاً عن ذلك، لما كان $1,-1\notin P$ ينتج أن كلاً من العنصرين $1,-1\in R$ هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R .

تمهيديـــــة 2-3.

لتكن R حلقة، وليكن $P\neq R$ مثالياً يمينياً في R . لأجل أي عنصرين $a,b\in R$ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 – إذا كان الجداء ab هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R ، عندئذ يكون العنصر b هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R .

2 – إذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث يكون a^n هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R ، عندئذ العنصر a هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R .

البرهـــــــان.

1 – لنفرض أن الجداء $ab\in R$ هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر $x\in R$ بحيث إن $x\notin P$ ويحقق $x(ab)x-x\in P,\ x(ab)P\subseteq P$. ومنه نجد أن $x(ab)x-x=p_0$ حيث $p_0\in P$ وبالتالي يكون:

$$(xa)b(xa)-xa=p_0a\in PR\subseteq P \text{ ، و } (xa)bP=x(ab)P\subseteq P$$

فضلاً عن ذلك، إن $xa\in R$ وإن $xa\notin P$ ، لأنه إذا كان $xa\in P$ ، نجد أن:

$$x=(xa)bx-p_0\in PR+P\subseteq P$$

وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن العنصر b هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R .

2 – لنفرض أنه يوجد عدد صحيح $n>0$ بحيث a^n هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر $y\in R$ بحيث إن $y\notin P$ ويحقق $ya^ny-y\in P,\ ya^nP\subseteq P$ ومنه فإن $ya^ny-y=p_1$ حيث $p_1\in P$ ، وبالتالي فإن:

$$(ya^{n-1})a(ya^{n-1})-ya^{n-1}=p_1a^{n-1}\in PR\subseteq P$$

وأن $P \subseteq P$ $(ya^{n-1})aP = ya^nP \subseteq P$. كما أن، $ya^{n-1} \notin P$ ، لأنه إذا كان $ya^{n-1} \in P$ نجد أن $y = ya^ny - p_1 = (ya^{n-1})ay - p_1 \in PR + P \subseteq P$. وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن العنصر a هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R .

تمهيديـــــــة 2-4.

لتكن R حلقة، وليكن $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R . القضايا الآتية صحيحة:

1 – كل عنصر قابل للقلب من اليسار في R هو عنصر $P-$قابل للقلب جزئياً في R .

2 – كل عنصر قابل للقلب في R هو عنصر $P-$قابل للقلب جزئياً في R .

3 – كل عنصر $P-$جامد $e \in R$ بحيث $e \notin P$ هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R .

البرهـــــــــان.

1 – ليكن $a \in R$ عنصر قابل للقلب من اليسار في R، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$، بحيث إن $ba = 1$ ومنه فإن $bab - b = 0 \in P$ وأن $baP \subseteq P$. فضلاً عن ذلك، $b \notin P$، لأنه إذا كان $b \in P$ نجد أن $1 = ba \in PR \subseteq P$، ومنه فإن $P = R$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن العنصر $a \in R$ هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R .

2 – ينتج مباشرة من (1).

3 – ليكن $e \in R$ عنصراً $P-$جامداً بحيث $e \notin P$، عندئذ $e^2 - e \in P$ وأن $eP \subseteq P$، ومنه فإن $e^2 = e + p_0$ حيث $p_0 \in P$ ، وأن:

$$e \cdot e \cdot e - e = e^2 \cdot e - e = (e + p_0)e - e = e^2 + p_0 e - e =$$
$$= e + p_0 + p_0 e - e = p_0(1 + e) \in PR \subseteq P$$

وأن $e^2P \subseteq eP \subseteq P$. وهذا يبين أن العنصر e هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R .

3 – الحـــلقــــات $P-$شبــــــه المحــــليـــــة.

تعريـــــــف 3-1.

لتكن R حلقة، وليكن $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R. نقول عن الحلقة R إنها شبه محلية بالنسبة إلى المثالي اليميني P، أو اختصاراً $P-$شبه محلية، إذا كان لأجل كل عنصر $a \in R$، إما a أو $1-a$ هو عنصر $P-$قابل للقلب جزئياً في R.

ينتج من التعريف مباشرة، أنه لأجل $P = 0$ فإن مفهومي الحلقات شبه المحلية والحلقات $P-$شبه المحلية يتطابقان.

لنورد الآن عدداً من الشروط اللازمة والكافية كي تكون حلقة ما شبه محلية بالنسبة إلى مثالي يميني:

مبرهنـــــة 3-2.

لتكن R حلقة و $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R. الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة R هي $P-$شبه محلية.

2 - لأجل كل عنصر $a \in R$، إما Ra أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً $P-$جامداً $e \in R$ وأن $e \notin P$.

البرهـــــان.

$(1) \Rightarrow (2)$. لنفرض أن الحلقة R هي $P-$شبه محلية، وليكن $a \in R$، عندئذ حسب الفرض إما a أو $1-a$ هو عنصر $P-$قابل للقلب جزئياً في R.

- إذا كان العنصر a هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R، عندئذ يوجد عنصر $b \in R$ بحيث $b \notin P$ ويحقق أن $bab - b \in P,\ baP \subseteq P$، ومنه فإن $bab = b + p_0$ حيث $p_0 \in P$. لنضع $e = ba$، فنجد أن $e \in R$، وأن:

$$e^2 - e = baba - ba = (bab - b)a \in PR \subseteq P$$

$$eP = baP \subseteq P$$

وهذا يبين أن e عنصر $P-$جامد في R وأن $e = ba \in Ra$. فضلاً عن ذلك، إن $e \notin P$، لأنه إذا كان $e \in P$، نجد أن:

$$b = bab - p_0 = eb - p_0 \in PR + P \subseteq P$$

وهذا غير ممكن، ومنه فإن $e \notin P$.

- إذا كان العنصر $1-a$ هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد $d \in R$ بحيث $d \notin P$ ويحقق $d(1-a)P \subseteq P$, $d(1-a)d - d \in P$ ، ومنه فإن:

$$d(1-a)d = d + p_1$$

حيث $p_1 \in P$. لنضع $g = d(1-a)$ ، فنجد أن $g \in R$ ، وأن:

$$g^2 - g = d(1-a)d(1-a) - d(1-a) = [d(1-a)d - d](1-a) \in PR \subseteq P$$

$$gP = d(1-a)P \subseteq P$$

وهذا يبين أن g عنصر $P-$جامد في R وأن $g = d(1-a) \in R(1-a)$. فضلاً عن ذلك، $g \notin P$ ، لأنه إذا كان $g \in P$ ، نجد أن:

$$d = d(1-a)d - p_1 = gd - p_1 \in PR + P \subseteq P$$

وهذا غير ممكن، ومنه فإن $g \notin P$.

$(1) \Leftarrow (2)$. ليكن $a \in R$ ، عندئذ حسب الفرض إما Ra أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً $P-$جامداً $e \in R$ بحيث $e \notin P$. ليكن $e \in R$ عنصر $P-$جامد بحيث $e \notin P$ ، عندئذ $eP \subseteq P$, $e^2 - e \in P$ ، ومنه يوجد عنصر $p_0 \in P$ بحيث إن $e^2 = e + p_0$.

- إذا كان $e \in Ra$ ، عندئذ يوجد عنصر $b \in R$ بحيث إن $e = ba$ وإن $b \notin P$ ، لأنه إذا كان $b \in P$ نجد أن $e = ba \in PR \subseteq P$ وهذا غير ممكن. فضلاً عن ذلك، لما كان $e = ba$ نجد $e^2 = eba$ ومنه فإن $e + p_0 = eba$ ، وبالتالي فإن $e^2 + p_0 e = ebae$ ومنه يكون $e + p_0 + p_0 e = ebae$ ومنه نجد أن $eb + p_0(b + eb) = (eb)a(eb)$ وهذا يبين أن:

$$(eb)a(eb) - eb = p_0(b + eb) \in PR \subseteq P$$

$$(eb)aP = e^2 P \subseteq eP \subseteq P$$

كما أن $eb \notin P$ ، لأنه إذا كان $eb \in P$ نجد أن $e = eba - p_0 \in PR + P \subseteq P$ وهذا غير ممكن، أي إن $eb \notin P$ ، وهذا يبين أن العنصر a هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R .

- إذا كان $e \in R(1-a)$ ، عندئذ يوجد عنصر $d \in R$ بحيث إن $e = d(1-a)$ وإن $d \notin P$ ، لأنه إذا كان $d \in P$ نجد أن $e = d(1-a) \in PR \subseteq P$ وهذا غير ممكن.

لما كان $e = d(1-a)$ فإن $e^2 = ed(1-a)$ ومنه $e + p_0 = ed(1-a)$ وبالتالي فإن $e^2 + p_0e = ed(1-a)e$ ومنه يكون $e + p_0 + p_0e = ed(1-a)e$ ومنه نجد أن:

$$ed + p_0(d + ed) = (ed)(1-a)(ed)$$

وهذا يبين أن $(ed)(1-a)(ed) - ed = p_0(d + ed) \in PR \subseteq P$ ، كما أن:

$$(ed)(1-a)P = e^2P \subseteq eP \subseteq P$$

إضافة لذلك، $ed \notin P$ ، لأنه إذا كان $ed \in P$ نجد أن:

$$e = ed(1-a) - p_0 \in PR + P \subseteq P$$

وهذا غير ممكن، أي إن $ed \notin P$ ، وهذا يبين أن العنصر $1-a$ هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R . مما سبق نجد أن الحلقة R هي $P-$شبه محلية.

مبرهنـــــــة 3-3.

لأجل أي حلقة R ، وليكن $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R . الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - الحلقة R هي $P-$شبه محلية.

2 - لأجل أي مثاليين يساريين A, B للحلقة R بحيث $R = A + B$ ، فإنه إما A أو B يحوي عنصراً $P-$جامداً $e \in R$ بحيث $e \notin P$.

البرهــــــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن الحلقة R هي $P-$شبه محلية، وليكن A, B مثاليين يساريين في R بحيث $R = A + B$ ، لما كان $1 \in R$، فإن $1 = a + b$ حيث $a \in A$ و $b \in B$، ومنه فإن $b = 1 - a$ ، ولما كانت الحلقة R هي $P-$شبه محلية، فإنه حسب المبرهنة (2-3) إما Ra أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً $P-$جامداً $e \in R$ بحيث $e \notin P$.

- إذا كان $e \in Ra$ ، عندئذ فإن $e \in Ra \subseteq RA \subseteq A$.

- إذا كان $e \in R(1-a)$ ، عندئذ فإن $e \in R(1-a) = Rb \subseteq RB \subseteq B$.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $a \in R$. لما كان $1 = a + (1-a)$، نجد أن $R = Ra + R(1-a)$ ، ولما كان كل من Ra و $R(1-a)$ مثالياً يسارياً في R ، فإنه حسب الفرض إما Ra أو $R(1-a)$ يحوي عنصراً $P-$جامداً $e \in R$ بحيث $e \notin P$ ، وحسب المبرهنة (2-3) فإن الحلقة R هي $P-$شبه محلية.

مبرهنـــــــة 3-4.

لتكن R حلقة، وليكن $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R. إذا كانت الحلقة R شبه محلية عناصرها الجامدة $0,1$ فقط، عندئذ العناصر $P-$الجامدة في R هي $0,1,\ p,1+p$ فقط، وذلك لأجل كل $p \in P$.

البرهـــــــان.

لنفرض أن الحلقة R شبه محلية وأن العناصر الجامدة في R هي $0,1$ فقط. ليكن $e \in R$ عنصراً $P-$جامداً، عندئذ $e^2 - e \in P$ و $eP \subseteq P$، ومنه فإن $e^2 = e + p_0$ حيث $p_0 \in P$. إذا كان $e = 0$ أو $e = 1$ يتم المطلوب. لنفرض أن $e \neq 0$ وأن $e \neq 1$. لما كانت R حلقة شبه محلية وأن $e \in R$، عندئذ إما e أو $1-e$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R.

- إذا كان العنصر e قابلاً للقلب جزئياً في R، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث إن $beb = b$. ولما كان $eb \in R$ عنصراً جامداً في R، فإنه حسب الفرض إما $eb = 0$ أو $eb = 1$. إذا كان $eb = 0$، عندئذ يكون $b = beb = 0$ وهذا تناقض، ومنه نجد أن $eb = 1$، وبالتالي يكون $e^2b = eb + p_0b$. ومنه نجد أن $e = 1 + p_0b$، ولما كان $p_0b \in PR \subseteq P$ نجد أن $e = 1 + p$ حيث $p \in P$.

- إذا كان العنصر $1-e$ قابلاً للقلب جزئياً في R، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $d \in R$ بحيث $d(1-e)d = d$. لما كان $(1-e)d \in R$ عنصراً جامداً في R، وحسب الفرض إما $(1-e)d = 0$ أو أن $(1-e)d = 1$. إذا كان $(1-e)d = 0$، عندئذ يكون $d = d(1-e)d = 0$ وهذا تناقض، ومنه $(1-e)d = 1$، ولما كان $e^2 = e + p_0$، نجد $-e(1-e) = p_0$ وبالتالي $-e(1-e)d = p_0d$ ومنه $e = -p_0d \in PR \subseteq P$، وبالتالي يكون $e = p$ حيث $p \in P$.

مبرهنـــــــة 3-5.

لتكن R حلقة، وليكن $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R. إذا كانت الحلقة R شبه محلية عناصرها الجامدة $0,1$ فقط، عندئذ تكون الحلقة R هي $P-$شبه محلية وعناصرها $P-$ الجامدة هي $0,1,\ p,1+p$ فقط، وذلك لأجل كل $p \in P$.

البرهـــــــان.

لنفرض أن الحلقة R شبه محلية وأن العناصر الجامدة في R هي $0,1$ فقط، عندئذ حسب المبرهنة $(3-4)$ تكون العناصر $P-$الجامدة في R هي فقط $0,1,\ p,1+p$، وذلك لأجل كل $p \in P$. ليكن $a \in R$، لما كانت الحلقة R شبه محلية، عندئذ إما a أو $1-a$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R.

- إذا كان العنصر a قابلاً للقلب جزئياً في R، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث يكون $b = bab$. ولما كان $ba \in R$ عنصراً جامداً في R، فإنه حسب الفرض إما $ba = 0$ أو $ba = 1$. إذا كان $ba = 0$، نجد أن $b = bab = 0$ وهذا تناقض، ومنه فإن $ba = 1$، وهذا يبين أن العنصر a قابل للقلب من اليسار، وحسب التمهيدية $(2-4)$ نجد أن العنصر a هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R.

- إذا كان العنصر $1-a$ قابلاً للقلب جزئياً في R، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $d \in R$ بحيث يكون $d = d(1-a)d$. لما كان $d(1-a) \in R$ عنصراً جامداً، فإنه حسب الفرض إما $d(1-a) = 0$ أو $d(1-a) = 1$. إذا كان $d(1-a) = 0$، نجد أن $d = d(1-a)d = 0$ وهذا تناقض، ومنه فإن $d(1-a) = 1$، وهذا يبين أن العنصر $1-a$ قابل للقلب من اليسار في R وحسب التمهيدية $(2-4)$ نجد أن العنصر $1-a$ هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R. مما سبق تكون الحلقة R هي $P-$شبه محلية.

تعريـــــــف 3-6. نقول عن الحلقة R إنها نظيفة إذا كان كل عنصر $a \in R$ يكتب على شكل مجموع لعنصرين أحدهما قابل للقلب والآخر جامد في R، [8].

مبرهنـــــــة 3-7.

كل حلقة نظيفة R عناصرها الجامدة $0,1$ فقط، تكون شبه محلية بالنسبة إلى أي مثالي يميني $P \neq R$ للحلقة R.

البرهـــــــان.

لنفرض أن R حلقة نظيفة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط، وليكن $P \neq R$ مثالياً يمينياً للحلقة R. ليكن $x \in R$ ، لما كانت الحلقة R نظيفة، عندئذ $x = a + e$ حيث $a \in R$ عنصر قابل للقلب في R وأن $e \in R$ عنصر جامد. ولما كانت العناصر الجامدة في R هي $0,1$ فقط، فإنه إما $e = 0$ أو $e = 1$.

− إذا كان $e = 0$، عندئذ فإن $x = a$ ، ولما كان العنصر a قابلاً للقلب فإنه يوجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ بحيث إن $ba = 1$ وهذا يبين أن العنصر a قابل للقلب من اليسار في R وحسب التمهيدية $(2-4)$ نجد أن العنصر $x = a$ هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R.

− إذا كان $e = 1$، عندئذ فإن $x = a + 1$ ، ومنه فإن $-a = 1 - x$ ، ولما كان العنصر a قابل للقلب فإنه يوجد عنصر مغاير للصفر $d \in R$ بحيث $da = 1$، ومنه فإن $(-d)(-a) = 1$ وهذا يبين أن العنصر $-a$ قابل للقلب من اليسار في R وحسب التمهيدية $(2-4)$ نجد أن العنصر $-a = 1 - x$ هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R.

مما سبق نجد أن الحلقة R هي $P-$شبه محلية.

تعريـــــف 3-8. نقول عن الحلقة R إنها $r-$نظيفة إذا كان كل عنصر $a \in R$ يكتب على شكل مجموع لعنصرين أحدهما منتظم والآخر جامد في R ، [3].

مبرهنـــــة 3-9.

كل حلقة $r-$نظيفة R عناصرها الجامدة $0,1$ فقط، تكون شبه محلية بالنسبة إلى أي مثالي يميني $P \neq R$ للحلقة R.

البرهـــــــان.

لنفرض أن R حلقة $r-$نظيفة عناصرها الجامدة هي $0,1$ فقط، وليكن $P \neq R$ مثالياً يمينياً للحلقة R. ليكن $x \in R$ ، لما كانت R هي $r-$نظيفة، عندئذ فإن $x = a + e$ حيث $a \in R$ عنصر منتظم في R وأن $e \in R$ عنصر جامد. سوف نميز حالتين:

- إذا كان $a=0$، عندئذ فإن $x=e$، وحسب الفرض إما $e=0$ أو $e=1$. إذا كان $x=e=0$ ولما كان $1=x+(1-x)$ نجد أن $1-x=1$ هو عنصر $P-$قابل للقلب جزئياً في R. إذا كان $x=e=1$ نجد أن العنصر x هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R.

- إذا كان $a\neq 0$ ولما كان العنصر a منتظماً فإنه يوجد عنصر مغاير للصفر $b\in R$ بحيث إن $a=aba$. ولما كان $ba\in R$ عنصراً جامداً مغايراً للصفر في R نجد بحسب الفرض أن $ba=1$ وهذا يبين أن العنصر a قابل للقلب من اليسار في R، وحسب التمهيدية (2-4) نجد أن العنصر a هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R.

- إذا كان $e=0$ نجد أن $x=a$ هو $P-$قابل للقلب جزئيا في R.

- إذا كان $e=1$ نجد أن $1-x=-a$ هو $P-$قابل للقلب جزئياً في R.

مما سبق نجد أن الحلقة R هي $P-$شبه محلية.

4 – حــلقـــة المصــفوفـــات $P-$شبـــه المحـليـــة.

تمهيديـــــــة 4-1.

لتكن R حلقة، ولنفرض أن $D_2(R)$ حلقة المصفوفات القطرية من المرتبة الثانية فوق R.

لنأخذ المجموعتين الآتيتين:

$$P_0=\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a\in R \right\} , \qquad Q_0=\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : b\in R \right\}$$

كل من P_0, Q_0 هو مثالي يميني في $D_2(R)$ و $P_0\neq D_2(R)$ و $Q_0\neq D_2(R)$.

البرهـــــــــان.

واضح.

بالاعتماد على المصطلحات الواردة في التمهيدية (4-1) سنورد المبرهنة الآتية:

مبرهنـــــــة 4-2.

لأجل أي حلقة R، الشروط الآتية متكافئة:

1 – الحلقة R شبه محلية.

2 – الحلقة $D_2(R)$ هي P_0-شبه محلية.

3 – الحلقة $D_2(R)$ هي Q_0-شبه محلية.

البرهـــــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن الحلقة R شبه محلية، وليكن $\alpha=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\in D_2(R)$، حيث $a,b\in R$. لما كان $b\in R$ وأن الحلقة R شبه محلية، عندئذ إما b أو $1-b$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R.

– إذا كان العنصر b قابلاً للقلب جزئياً في R، فإنه يوجد عنصر مغاير للصفر $x\in R$ بحيث إن $x=xbx$. ومنه أياً كان $y\in R$، فإن $\beta=\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}\in D_2(R)$ و $\beta\notin P_0$، لأن $x\neq 0$، ويحقق:

$$\beta\alpha\beta=\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ya & 0 \\ 0 & xb \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} yay & 0 \\ 0 & xbx \end{bmatrix}$$

$$\beta\alpha\beta-\beta=\begin{bmatrix} yay & 0 \\ 0 & xbx \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} yay-y & 0 \\ 0 & xbx-x \end{bmatrix}\in P_0$$

وأنه أياً كان $t=\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in P_0$، حيث $a'\in R$، فإن:

$$\beta\alpha t=\begin{bmatrix} ya & 0 \\ 0 & xb \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} yaa' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in P_0$$

ومنه فإن $\beta\alpha P_0\subseteq P_0$، وهذا يبين أن α عنصر P_0-قابل للقلب جزئياً في $D_2(R)$.

– إذا كان العنصر $1-b$ قابلاً للقلب جزئياً في R، فإنه يوجد عنصر مغاير للصفر $x\in R$ بحيث $x=x(1-b)x$. ومنه أياً كان $y\in R$، فإن $\beta=\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}\in D_2(R)$ وأن $\beta\notin P_0$، لأن $x\neq 0$، ويحقق أن:

$$\beta(1-\alpha)\beta=\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1-b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(1-a)y & 0 \\ 0 & x(1-b)x \end{bmatrix}$$

$$\beta(1-\alpha)\beta-\beta=\begin{bmatrix} y(1-a)y & 0 \\ 0 & x(1-b)x \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} y(1-a)y-y & 0 \\ 0 & x(1-b)x-x \end{bmatrix}\in P_0$$

وأنه أياً كان $t=\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in P_0$، حيث $a'\in R$، فإن:

$$\beta(1-\alpha)t=\begin{bmatrix} y(1-a) & 0 \\ 0 & x(1-b) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(1-a)a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in P_0$$

ومنه فإن $\beta(1-\alpha)P_0\subseteq P_0$، وهذا يبين أن $1-\alpha$ هو P_0-قابل للقلب جزئياً في الحلقة $D_2(R)$.

مما سبق نجد أن الحلقة $D_2(R)$ هي P_0-شبه محلية.

$(2)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن الحلقة $D_2(R)$ هي P_0-شبه محلية، وليكن $a\in R$، عندئذ فإن $\alpha=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\in D_2(R)$. لما كانت الحلقة $D_2(R)$ هي P_0-شبه محلية، فإنه إما العنصر α أو $1-\alpha$ هو P_0-قابل للقلب جزئياً في الحلقة $D_2(R)$.

- إذا كان α هو P_0-قابلاً للقلب جزئياً في $D_2(R)$، عندئذ يوجد $\beta=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\in D_2(R)$ حيث $x,y\in R$ وأن $\beta\notin P_0$ ويحقق أن $\beta\alpha\beta-\beta\in P_0$ وأن $\beta\alpha P_0\subseteq P_0$. لما كان $\beta\notin P_0$ نجد أن $y\neq 0$، كما أن:

$$\beta\alpha\beta-\beta=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -x & 0 \\ 0 & yay-y \end{bmatrix}\in P_0$$

وهذا يبين أن $yay-y=0$، أي $yay=y$، ومنه العنصر a قابل للقلب جزئياً في R.

- إذا كان $1-\alpha$ هو P_0-قابلاً للقلب جزئياً في الحلقة $D_2(R)$ ، عندئذ يوجد:

$$\beta=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\in D_2(R)$$

حيث $x,y\in R$ وأن $\beta\notin P_0$ ويحقق $\beta(1-\alpha)\beta-\beta\in P_0$ و $\beta(1-\alpha)P_0\subseteq P_0$.

لما كان $\beta\notin P_0$ نجد أن $y\neq 0$ ، كما أن:

$$\beta(1-\alpha)\beta-\beta=\begin{bmatrix} x^2-x & 0 \\ 0 & y(1-a)y-y \end{bmatrix}\in P_0$$

وهذا يبين أن $y(1-a)y-y=0$ ، أي إن $y(1-a)y=y$ ، ومنه فإن العنصر $1-a$ قابل للقلب جزئياً في R . مما سبق نجد أن الحلقة R شبه محلية.

بطريقة مشابهة يمكننا إثبات صحة التكافؤ $(1)\Leftrightarrow(3)$.

تمهيديـــــــة 4-3.

لتكن R حلقة، لنفرض أن $U_2(R)$ حلقة المصفوفات المثلثية العليا من المرتبة الثانية فوق الحلقة R . المجموعة $P=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}: a,b\in R\right\}$ تشكل مثالياً يمينياً في الحلقة $U_2(R)$ وأن $P\neq U_2(R)$. لنفرض أيضاً $L_2(R)$ حلقة المصفوفات المثلثية السفلى من المرتبة الثانية فوق الحلقة R .

المجموعة $Q=\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}: a,b\in R\right\}$ تشكل مثالياً يمينياً في الحلقة $L_2(R)$ وأن $Q\neq L_2(R)$.

البرهـــــــان.

واضح.

بالاعتماد على المصطلحات الواردة في التمهيدية (4-3) سنورد الآن المبرهنة الآتية:

مبرهنــــــــة 4-4.

لأجل أي حلقة R الشروط الآتية متكافئة:

1 - الحلقة R شبه محلية.

2 - الحلقة $U_2(R)$ هي $P-$شبه محلية.

3 - الحلقة $L_2(R)$ هي $Q-$شبه محلية.

البرهـــــــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن الحلقة R شبه محلية، وليكن $\alpha=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\in U_2(R)$، حيث $a,b,c\in R$. لما كان $c\in R$ وأن R شبه محلية، عندئذ إما c أو $1-c$ عنصر قابل للقلب جزئياً في R.

- إذا كان العنصر c قابلاً للقلب جزئياً في R، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $x\in R$ بحيث إن $xcx=x$. ومنه أياً كان $x'\in R$ فإن $\beta=\begin{bmatrix} x' & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}\in U_2(R)$ وأن $\beta\notin P$، لأن $x\neq 0$. فضلاً عن ذلك، إن $\beta\alpha\beta=\begin{bmatrix} x'ax' & x'bx \\ 0 & xcx \end{bmatrix}$، ومنه فإن:

$$\beta\alpha\beta-\beta=\begin{bmatrix} x'ax'-x' & x'bx \\ 0 & xcx-x \end{bmatrix}\in P$$

وأنه أياً كان $t=\begin{bmatrix} a' & b' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in P$ حيث $a',b'\in R$، فإن:

$$\beta\alpha t=\begin{bmatrix} x'a & x'b \\ 0 & xc \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a' & b' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'aa' & x'ab' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in P$$

وهذا يبين أن $\beta\alpha P\subseteq P$. مما سبق نجد أن العنصر α هو $P-$قابل للقلب جزئياً في الحلقة $U_2(R)$.

– إذا كان العنصر $1-c$ قابلاً للقلب جزئياً في R ، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $y \in R$ بحيث $y(1-c)y = y$. ومنه أياً كان $y' \in R$ فإن $\beta = \begin{bmatrix} y' & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \in U_2(R)$ وأن $\beta \notin P$ ، لأن $y \neq 0$. فضلاً عن ذلك، إن:

$$\beta(1-\alpha)\beta = \begin{bmatrix} y'(1-a)y' & -y'by \\ 0 & y(1-c)y \end{bmatrix}$$

ومنه فإن:

$$\beta(1-\alpha)\beta - \beta = \begin{bmatrix} y'(1-a)y' - y' & -y'by \\ 0 & y(1-c)y - y \end{bmatrix} \in P$$

وأنه أياً كان $t = \begin{bmatrix} a'' & b'' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in P$ حيث $a'', b'' \in R$ ، فإن:

$$\beta(1-\alpha)t = \begin{bmatrix} y'(1-a)a'' & y'(1-a)b'' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in P$$

وهذا يبين أن $\beta(1-\alpha)P \subseteq P$. مما سبق نجد أن $1-\alpha$ هو $P-$قابل للقلب جزئياً في $U_2(R)$. وهكذا فإن الحلقة $U_2(R)$ هي $P-$شبه محلية.

$(2)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن الحلقة $U_2(R)$ هي $P-$شبه محلية، وليكن $a \in R$ ، عندئذ فإن $\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in U_2(R)$ وحسب الفرض إما α أو $1-\alpha$ هو عنصر $P-$قابل للقلب جزئياً في الحلقة $U_2(R)$.

– إذا كان العنصر α هو $P-$قابل للقلب جزئياً في $U_2(R)$، عندئذ يوجد عنصر $\beta \in U_2(R)$ بحيث $\beta \notin P$ ويحقق أن $\beta\alpha\beta - \beta \in P$ وأن $\beta\alpha P \subseteq P$. لما كان $\beta \in U_2(R)$ فإن $\beta = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$ وأن $x, y, z \in R$. فضلاً عن ذلك، إن $z \neq 0$ ، لأن $\beta \notin P$. كما أن:

$$\beta\alpha\beta=\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & ya\\ 0 & za\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & yaz\\ 0 & zaz\end{bmatrix}$$

$$\beta\alpha\beta-\beta=\begin{bmatrix}0 & yaz\\ 0 & zaz\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x & yaz-y\\ 0 & zaz-z\end{bmatrix}\in P$$

ومنه نجد أن $zaz-z=0$ وبالتالي فإن $zaz=z$ ، ومنه فإن العنصر a قابل للقلب جزئياً في R .

- إذا كان العنصر $1-\alpha$ هو $P-$قابل للقلب جزئياً في $U_2(R)$، عندئذ يوجد عنصر $\beta\in U_2(R)$ بحيث $\beta\notin P$ ويحقق $\beta(1-\alpha)\beta-\beta\in P$ وأن $\beta(1-\alpha)P\subseteq P$.

لما كان $\beta\in U_2(R)$ فإن $\beta=\begin{bmatrix}x & y\\ 0 & z\end{bmatrix}$ وأن $x,y,z\in R$. فضلاً عن ذلك، $z\neq 0$ ، لأن $\beta\notin P$. كما أن:

$$\beta(1-\alpha)\beta=\begin{bmatrix}x^2 & xy+y(1-a)z\\ 0 & z(1-a)z\end{bmatrix}$$

$$\beta(1-\alpha)\beta-\beta=\begin{bmatrix}x^2-x & xy+y(1-a)z-y\\ 0 & z(1-a)z-z\end{bmatrix}\in P$$

ومنه نجد أن $z(1-a)z-z=0$ وبالتالي فإن $z(1-a)z=z$ ، ومنه فإن العنصر $1-a$ قابل للقلب جزئياً في R . مما سبق نجد أن الحلقة R شبه محلية.

بطريقة مشابهة يمكننا إثبات صحة التكافؤ $(1)\Leftrightarrow(3)$.

المـراجــع العــلميـــة.

[1] – Anderson, F. W and Fuller, K. R., " Rings and Categories of Modules ", New York. Springer 1973.

[2] – Andrunakievich A. V and Andrunakievich V. A, " Rings that are regular relative to right ideal ", Mat. Zametki. **Vol. 49**, No. 3 1991, pp. 3–11.

[3] – Ashrafi, N and Nasibi, E," Rings in Which Elements are Sum of an Idempotent and Regular Element ", Bulletin of the Iranian Mathematical Society. **Vol.** 39, No. 3, 2013, pp. 579 – 588.

[4] – Goodearl, K. R., " Von Neumann Regular Rings ", Pitman 1979 .

[5] – Hamza, H., "I_0 – Rings and I_0 – Module", Math. J. Okayama Univ. **Vol. 40,** 1998, pp. 91 – 97.

[6] – Hamza, H., " r – Clean Rings Relative to Right Ideals ", Journal of Algebraic Systems. **Vol. 9**, No. 2, 2022, pp. 1 – 19.

[7] – Lambek, J., " Lectures on Rings and Modules ", Blaisdell, Mass. 1966.

[8] – Nicholson, W. K., and Zhou, Y., " Rings in Which Elements are Uniquely the Sum of an Idempotent and a Unit ", Glasgow Math. J. **Vol. 46**, No. 2, (2004), pp. 227 – 236.