العناصر القابلة للقلب بالنسبة لمثالي يميني

عبد الباسط الخطيب[1] حمزة حاكمي[2] إيمان الحاج جاسم[3]
جامعة البعث – كلية العلوم – قسم الرياضيات

الملخص

مما لاشك فيه أن العناصر القابلة للقلب في أي حلقة تلعب دوراً مميزاً في الحلقة. في هذه الورقة العلمية تابعنا دراستنا للحلقات بالنسبة لمثالي يميني، حيث درسنا العناصر القابلة وغير القابلة للقلب بالنسبة لمثالي يميني كتعميم للعناصر القابلة للقلب.

وقد أثبتنا أنه إذا كانت R حلقة و $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R فإن مجموعة العناصر القابلة للقلب من اليمين بالنسبة للمثالي P في الحلقة R تشكل نصف زمرة واحدية في R بالنسبة لعملية الضرب المعرفة على الحلقة R.

فضلاً عن ذلك، أثبتنا أنه إذا كانت R حلقة و $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R فإن مجموعة العناصر غير القابلة للقلب بالنسبة للمثالي اليميني P وهي:

$$K = \{ a : a \in R; R \neq aR + P \}$$

تحقق الشرطين الآتيين:

1 – المجموعة K مغلقة بالنسبة لعملية الجمع المعرفة على R.

2 – المجموعة K تشكل مثالياً يمينياً في R يحقق $K \neq R$.

الكلمات المفتاحية. العنصر القابل للقلب، العنصر غير القابل للقلب، الجسم، العنصر الجامد، العنصر P – الجامد، العنصر P – القابل للقلب، العنصر P – غير القابل للقلب

رقم التصنيف العالمي للعام 2020: 16U99, 16E50, 16D80, 16D40.

[1] أستاذ في قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة البعث.

[2] أستاذ في قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة دمشق.

[3] طالب دراسات عليا قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة البعث.

Invertible Elements Relative to Right Ideals

Abdulbaset Alkhatib[1] Hamza Hakmi[2] Eman Alhaj Jasem[3]

AL-BaathUniversity - Faculty of Sciences - Department of Mathematics

Abstract

The invertible elements in any ring play important role in the ring. In this scientific paper we continue our study of rings relative to right ideal, where we study the invertible and noninvertible elements relative to right ideal as a generalization of invertible elements.

We have proved that if R is a ring and $P \neq R$ is a right ideal of R, then the set of a right invertible elements is unitary semi-group in R under multiplicative operation defined on R.

In addition to that, we proved that if R is a ring and $P \neq R$ is a right ideal of R, then the set K of a right noninvertible elements relative to P which is:

$$K = \{ a : a \in R; R \neq aR + P \}$$

satisfy the following conditions:

1 – The set K is closed under the summation on R.

2 – The set K is a proper right ideal in R.

Key Words: Invertible element, noninvertible element, skew field, idempotent element, $P-$idempotent element, $P-$invertible element.

2020 **Mathematical Subject Classification:** 16U99,16E50,16D80,16D40.

[1] Professor, Department of Mathematics Al-Baath University.

[2] Professor, Department of Mathematics Damascus University.

[3] Department of Mathematics Al-Baath University.

المقـــدمـــة.

في عام 1987 أدخل جبريان روسيان في [3] مفهوم الحلقة بالنسبة لمثالي أحادي الجانب (يميني) وكان هذا العمل الأول لدراسة الحلقة من خلال المثاليات أحادية الجانب حيث درسوا مفهوم شبه الانتظام بالنسبة لمثالي يميني بغية إعطاء وصف جديد لأساس جاكبسون للحلقة. وفي عام1991 تم نقل هذا المفهوم إلى الحلقات المنتظمة [4] وسميت فيما بعد هذه الحلقات بالحلقات المنتظمة بالنسبة لمثالي يميني وذلك في [2]، حيث تم إثبات أن كل حلقة تكون منتظمة بالنسبة لأي مثالي يميني أعظمي فيها.

ونظراً إلى النتائج المهمة التي تم التوصل إليها في [2]، ظهرت أعمال جديدة درست العديد من مفاهيم في الحلقة بالنسبة لمثالي يميني.

ففي عام 2018 درس Hakmi عدداً من الخصائص المهمة بالنسبة لمثالي يميني، فضلاً عن دراسته للحلقات شبه الجامدة بالنسبة لمثالي يميني وذلك في [6] كتعميم للحلقات شبه الجامدة التي تمت دراستها في [5].

وفي عام 2021 قام Hakmi بدراسة الحلقات المحلية بالنسبة لمثالي يميني وذلك في [7] وأثبت أن الشرط اللازم والكافي كي تكون حلقة ما محلية هو أن تكون حلقة المصفوفات من المرتبة الثانية فوق هذه الحلقة محلية بالنسبة لمثالي يميني محدد، فضلاً عن ذلك أثبت أن كل حلقة تكون محلية بالنسبة لأي مثالي يميني أعظمي فيها.

في هذه الورقة العلمية تابعنا دراستنا للحلقات بالنسبة لمثالي يميني، حيث درسنا العناصر القابلة وغير القابلة للقلب بالنسبة لمثالي.

وقد أثبتنا أنه إذا كانت R حلقة و $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R فإن مجموعة العناصر القابلة للقلب من اليمين بالنسبة للمثالي P في الحلقة R تشكل نصف زمرة واحدية في R بالنسبة لعملية الضرب المعرفة على الحلقة R.

فضلاً عن ذلك، أثبتنا أنه لأجل أي حلقة $R \neq 0$ الشروط الآتية متكافئة:

1 – الحلقة R جسم.

2 – لأجل كل عنصر مغاير للصفر $a \in R$ توجد عناصر $x, y \in R$ بحيث إن العنصر $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix}$ قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$ بالنسبة للمثالي اليميني:

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$$

3 – لأجل كل عنصر مغاير للصفر $a \in R$ توجد عناصر $x, y \in R$ بحيث إن العنصر $\begin{bmatrix} a & 0 \\ x & y \end{bmatrix}$ قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$ بالنسبة للمثالي اليميني:

$$Q = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$$

أخيراً أثبتنا أنه إذا كانت R حلقة و $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R فإن مجموعة العناصر غير القابلة للقلب بالنسبة للمثالي اليميني P وهي $K = \{ a : a \in R; R \neq aR + P \}$ تحقق الشرطين الآتيين:

1 – المجموعة K مغلقة بالنسبة لعملية الجمع المعرفة على R.

2 – المجموعة K تشكل مثالياً يمينياً في R يحقق $K \neq R$.

الهـــدف مـــن البحـــــث.

دراسة مفاهيم جديدة في الحلقة بالنسبة لمثالي يميني وقد خصصنا هذه الورقة العلمية لدراسة العناصر القابلة وغير القابلة للقلب بالنسبة لمثالي يميني. وفي هذا السياق حصلنا على نتائج جديدة في هذين الموضوعين.

1 – الـــدراســـــة المـــرجعيـــــة.

جميع الحلقات R التي سندرسها هي حلقات واحدية فيها $1 \neq 0$ وحيثما كان P فإن $P \neq R$ مثالي يميني في R.

1–1. نقول عن الحلقة R إنها جسم إذا كان كل عنصر مغاير للصفر يملك مقلوباً في R، [9].

1-2. نسمي تقاطع جميع المثاليات اليسارية (اليمينية) الأعظمية في الحلقة R بأساس جاكبسون للحلقة R ونرمز له $J(R)$، [8].

1-3. نقول عن العنصر $e \in R$ إنه جامد إذا كان $e^2 = e$، [1].

1-4. نقول عن العنصر $e \in R$ إنه $P-$جامد إذا كان $e^2 - e \in P$ و $eP \subseteq P$، [2].

2 – الـدراســـــة البحثيـــــة.

العنــاصــر $P-$القـابـلـــة للقــلـــب من اليميـــن.

تعريـــــف.

لتكن R حلقة و $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R. نقول عن العنصر $a \in R$ إنه قابل للقلب من اليمين بالنسبة للمثالي اليميني P في الحلقة R، أو اختصاراً $P-$قابل للقلب من اليمين في R إذا كان $R = aR + P$, $aP \subseteq P$.

ينتج من التعريف مباشرة أنه في أي حلقة فإن 1 هو عنصر قابل للقلب من اليمين في R بالنسبة لأي مثالي يميني $P \neq R$ للحلقة R. فضلاً عن ذلك، فإنه لأجل $P = 0$ يكون مفهوم قابلية القلب من اليمين بالنسبة للمثالي اليميني P يتطابق مع مفهوم قابلية القلب من اليمين.

تمهيديــــة 2-1.

لتكن R حلقة و $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R وأن $a,b \in R$ بحيث إن $a-b \in P$، عندئذ الشرط اللازم والكافي كي يكون العنصر a هو $P-$قابل للقلب من اليمين في R هو أن يكون العنصر b هو $P-$قابل للقلب من اليمين في R.

البرهـــــان.

لنفرض أن $a-b \in P$، عندئذ فإن $a = b + p_0$ حيث $p_0 \in P$.

لزوم الشرط. لنفرض أن العنصر a هو $P-$قابل للقلب من اليمين في R، عندئذ فإن:

$$aP \subseteq P, \quad R = aR + P$$

ومنه نجد أنه أياً كان $t \in P$ فإن:

$$bt = (a - p_0)t = at + (-p_0)t \in aP + P \subseteq P$$

وهذا يبين أن $bP \subseteq P$. من جهة أخرى، لدينا:

$$bR + P = (a - p_0)R + P \subseteq aR + (-p_0)R + P \subseteq$$
$$\subseteq aR + P = (b + p_0)R + P \subseteq bR + p_0R + P \subseteq bR + P$$

ومنه نجد أن:

$$bR + P = aR + P$$

وبالتالي فإن $R = bR + P$ ومنه العنصر b هو $P-$قابل للقلب من اليمين في R.

بطريقة مشابهة يمكننا اثبات كفاية الشرط.

تمهيديــــة 2-2.

لتكن R حلقة و $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R. عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 – أياً كان $a \in P$ فإن a ليس $P-$قابلاً للقلب من اليمين في R.

2 – إذا كان $e \in R$ عنصراً $P-$جامداً وكان e هو $P-$قابل للقلب من اليمين في R، عندئذ فإن $e = 1 + p$ حيث $p \in P$.

البرهـــــان.

1 – ليكن $a \in R$ وأن $a \in P$ ولنفرض جدلاً أن العنصر a هو $P-$قابل للقلب من اليمين في R، عندئذ فإن $R = aR + P$, $aP \subseteq P$ ومنه يكون:

$$R = aR + P \subseteq PR + P \subseteq P$$

وهذا يبين أن $P = R$ وهذا غير ممكن، ومنه فإن a ليس $P-$قابلاً للقلب من اليمين في R.

2 – لنفرض أن $e \in R$ عنصر $P-$جامد، عندئذ فإن $e^2 - e \in P$, $eP \subseteq P$ ومنه فإن $e^2 = e + p_0$ حيث $p_0 \in P$. لنفرض أن e هو $P-$قابل للقلب من اليمين في R، عندئذ يكون:

$$eP \subseteq P, \quad R = eR + P$$

ومنه يوجد $x \in R$ و $p_1 \in P$ بحيث $1 = ex + p_1$ وبالتالي يكون:

$$e = e(ex + p_1) = e^2x + ep_1 =$$
$$= (e + p_0)x + ep_1 = ex + p_0x + ep_1$$

$$e(1-x) = p_0x + ep_1 \in PR + eP \subseteq P$$

لنفرض أن $p_2 = p_0x + ep_1 \in P$ فنجد أن $e(1-x) = p_2$ ولما كان:

$$1 = x + (1-x)$$

نجد أن:

$$e = ex + e(1-x) = ex + p_2$$

وبالتالي يكون $e = 1 - p_1 + p_2$. بفرض أن $p = -p_1 + p_2 \in P$ نجد أن $e = 1 + p$.

تمهيديـــة 2-3.

لتكن R حلقة و $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R. عندئذ لأجل أي عنصر $a \in R$ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – العنصر a هو $P-$قابل للقلب من اليمين في R.

2 – يوجد عنصر $x \in R$ بحيث يكون $1 - ax \in P$ وأن $aP \subseteq P$.

البرهــــان.

$(1) \Rightarrow (2)$. لنفرض أن العنصر a هو $P-$قابل للقلب من اليمين في R، عندئذ فإن:

$$aP \subseteq P, \quad R = aR + P$$

ومنه يوجد $x \in R$ و $p_0 \in P$ بحيث $1 = ax + p_0$ وبالتالي يكون $1 - ax = p_0 \in P$.

$(2) \Rightarrow (1)$. لدينا بحسب الفرض أن $aP \subseteq P$ وأن $1 - ax \in P$ حيث $x \in R$ ومنه يوجد $p_1 \in P$ بحيث إن $1 - ax = p_1$ وبالتالي يكون:

$$1 = ax + p_1 \in aR + P$$

ومنه فإن $R = aR + P$ وهذا يبين أن العنصر a هو $P-$قابل للقلب من اليمين في R.

مبرهنـــــة 2-4.

لتكن R حلقة و $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R. إن مجموعة العناصر $P-$القابلة للقلب من اليمين في الحلقة R تشكل نصف زمرة واحدية في R بالنسبة لعملية الضرب المعرفة على الحلقة R.

البرهــــان.

لنفرض أن $U_P(R)$ مجموعة العناصر $P-$القابلة للقلب من اليمين في الحلقة R، فنجد أن $U_P(R)$ هي مجموعة جزئية غير خالية في R، لأن $1\in U_P(R)$.

ليكن $a,b\in U_P(R)$ ولنبرهن على أن $ab\in U_P(R)$. لما كان $a,b\in U_P(R)$ عندئذ فإن:

$$aP\subseteq P\,,\quad R=aR+P$$

$$bP\subseteq P\,,\quad R=bR+P$$

ومنه فإن:

$$(ab)P=a(bP)\subseteq aP\subseteq P$$

ولما كان العنصر b هو $P-$قابل للقلب من اليمين في R فإنه بحسب التمهيدية (3-2) يوجد عنصر $y\in R$ بحيث $1-by\in P$ ومنه فإن $a(1-by)\in aP\subseteq P$ ولما كان $1=by+(1-by)$ نجد أن:

$$a=aby+a(1-by)\in abR+P$$

أي إن $aR\subseteq abR+P$ ولما كان $R=aR+P$ نجد أن:

$$R=aR+P\subseteq abR+P+P\subseteq abR+P\subseteq R$$

وهكذا فإن $R=abR+P$. مما سبق نجد أن $ab\in U_P(R)$ وهذا يبين أن المجموعة $U_P(R)$ مغلقة بالنسبة لعملية الضرب المعرفة على الحلقة R وبالتالي فإن المجموعة $U_P(R)$ هي نصف زمرة واحدية في R.

لتكن R حلقة و $M_2(R)$ حلقة المصفوفات المربعة من المرتبة الثانية فوق الحلقة R ولنفرض أن:

$$P=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}: a,b\in R\right\},\quad Q=\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0\\ a & b\end{bmatrix}: a,b\in R\right\}$$

إن كلاً من P,Q مثالي يميني في الحلقة $M_2(R)$ و $P\neq M_2(R)$ و $Q\neq M_2(R)$.

العلاقة بين العناصر القابلة للقلب من اليمين في R والعناصر $P-$القابلة للقلب ($Q-$ القابلة للقلب) من اليمين في الحلقة $M_2(R)$ نوردها من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنـــــــة 2-5.

لتكن R حلقة و $a \in R$. عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 – إذا كان العنصر a قابلاً للقلب من اليمين في R، عندئذ أياً كان $x, y \in R$ فإن $\alpha = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix}$ هو عنصر $P-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

2 – إذا وجدت عناصر $x, y \in R$ بحيث إن العنصر $\alpha = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix}$ هو عنصر $P-$ قابل للقلب من اليمين في $M_2(R)$، عندئذ يكون a قابلاً للقلب من اليمين في R.

3 – إذا كان العنصر a قابلاً للقلب من اليمين في R، عندئذ أياً كان $x, y \in R$ فإن $\alpha = \begin{bmatrix} a & 0 \\ x & y \end{bmatrix}$ هو عنصر $Q-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

4 – إذا وجدت عناصر $x, y \in R$ بحيث إن العنصر $\alpha = \begin{bmatrix} a & 0 \\ x & y \end{bmatrix}$ هو عنصر $Q-$ قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$ عندئذ يكون a قابلاً للقلب من اليمين في R.

البرهـــــان.

1 – لنفرض أن العنصر a قابل للقلب من اليمين في R، عندئذ يوجد $b \in R$ بحيث $ab = 1$ ومنه أياً كان $u, v \in R$ فإن $\beta = \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M_2(R)$ ويحقق أياً كان $x, y \in R$ فإن:

$$1 - \alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} xu & xv + yb \\ 0 & ab \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - xu & -xv - yb \\ 0 & 1 - ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - xu & -xv - yb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in P$$

فضلاً عن ذلك، إن $\alpha P \subseteq P$، لأنه أياً كان $\sigma = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in P$ فإن:

$$\alpha\sigma = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xc & xd \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in P$$

وهذا يبين أن العنصر α هو $P-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

2 – ليكن $x, y \in R$ بحيث يكون $\alpha = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix}$ عنصراً P– قابلاً للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$، عندئذ يوجد $\beta = \begin{bmatrix} u & v \\ w & b \end{bmatrix} \in M_2(R)$ حيث $u, v, w, b \in R$ يحقق أن $1-\alpha\beta \in P$ ومنه نجد أن:

$$1-\alpha\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u & v \\ w & b \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} xu+yw & xv+yb \\ aw & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-xu-yw & -xv-yb \\ -aw & 1-ab \end{bmatrix} \in P$$

وهذا يبين أن $ab=1$، أي إن العنصر a قابل للقلب من اليمين في R.

3 – يبرهن بطريقة مشابهة كما في (1).

4 – يبرهن بطريقة مشابهة كما في (2).

اعتماداً على المبرهنة (2–5) يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــــة.

لتكن R حلقة و $a \in R$. عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1 – العنصر a قابل للقلب من اليمين في R عندما وفقط عندما توجد عناصر $x, y \in R$ بحيث يكون العنصر $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix} \in M_2(R)$ هو P– قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

2 – العنصر a قابل للقلب من اليمين في R عندما وفقط عندما توجد عناصر $x, y \in R$ بحيث يكون العنصر $\begin{bmatrix} a & 0 \\ x & y \end{bmatrix} \in M_2(R)$ هو $Q-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

مبرهنــــــة 2-6.

لتكن $R \neq 0$ حلقة. عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 – كل عنصر مغاير للصفر في الحلقة R يكون قابلاً للقلب من اليمين (اليسار) عندما وفقط عندما يكون كل عنصر مغاير للصفر في الحلقة R قابلاً للقلب.

2 – كل عنصر مغاير للصفر في الحلقة R يكون قابلاً للقلب من اليمين عندما وفقط عندما يكون لأجل كل عنصر مغاير للصفر $a \in R$ توجد عناصر $x, y \in R$ تحقق أن العنصر $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix} \in M_2(R)$ هو $P-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

3 – كل عنصر مغاير للصفر في الحلقة R يكون قابلاً للقلب من اليمين عندما وفقط عندما يكون لأجل كل عنصر مغاير للصفر $a \in R$ توجد عناصر $x, y \in R$ تحقق أن العنصر $\begin{bmatrix} a & 0 \\ x & y \end{bmatrix} \in M_2(R)$ هو $Q-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

البرهـــــان.

$(1)(\Leftarrow)$. ليكن $a \in R$ عنصراً مغايراً للصفر، عندئذ بحسب الفرض فإن a قابل للقلب من اليمين في الحلقة R ومنه يوجد $b \in R$ بحيث $ab = 1$ وأن $b \neq 0$ وبحسب الفرض أيضاً فإن العنصر b قابل للقلب من اليمين في R ومنه يوجد عنصر مغاير للصفر $c \in R$ بحيث $bc = 1$ ومنه نجد أن:

$$c = 1 \cdot c = (ab)c = a(bc) = a \cdot 1 = a$$

وهكذا نجد أن $ab = 1 = ba$، أي إن العنصر a قابل للقلب في R. العكس واضح.

(2) و(3) بحسب المبرهنة (2-5).

اعتماداً على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة المبرهنة الآتية:

مبرهنــــــة 2-7.

لأجل أي حلقة $R \neq 0$ الشروط الآتية متكافئة:

1 – كل عنصر مغاير للصفر في R قابل للقلب في R.

2 – لأجل كل عنصر مغاير للصفر $a \in R$ توجد عناصر $x, y \in R$ بحيث إن العنصر

$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix}$ هو عنصر $P-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

3 − لأجل كل عنصر مغاير للصفر $a \in R$ توجد عناصر $x, y \in R$ بحيث إن العنصر $\begin{bmatrix} a & 0 \\ x & y \end{bmatrix}$ هو عنصر $Q-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

البرهـــــان.

$(1) \Rightarrow (2)$. ليكن $a \in R$ عنصراً مغايراً للصفر في R، عندئذ حسب الفرض فإن العنصر a قابل للقلب من اليمين في الحلقة R وحسب المبرهنة $(2-5)$ فإنه لأجل أي عنصرين $x, y \in R$ فإن العنصر $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix}$ هو $P-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

$(2) \Rightarrow (1)$. ليكن $a \in R$ عنصراً مغايراً للصفر في R، عندئذ حسب الفرض توجد عناصر $x, y \in R$ بحيث إن العنصر $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix}$ هو $P-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$ وبحسب المبرهنة $(2-6)$ يكون العنصر a قابلاً للقلب من اليمين في الحلقة R وبحسب المبرهنة $(2-6)$ يكون العنصر a قابلاً للقلب في الحلقة R. بطريقة مشابهة يمكننا إثبات صحة التكافؤ $(1) \Leftrightarrow (3)$.

اعتماداً على المبرهنة $(2-7)$ يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـــــة.

لأجل أي حلقة $R \neq 0$ الشروط الآتية متكافئة:

1 − الحلقة R هي جسم.

2 − لأجل أي عنصر مغاير للصفر $a \in R$ توجد عناصر $x, y \in R$ بحيث يكون العنصر $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix}$ هو $P-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

3 – لأجل أي عنصر مغاير للصفر $a \in R$ توجد عناصر $x, y \in R$ بحيث يكون العنصر $\begin{bmatrix} a & 0 \\ x & y \end{bmatrix}$ هو $Q-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

تمهيديـــة 2-8.

لتكن R حلقة و $a \in R$ عنصراً مغايراً للصفر. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1 – العنصر a قابل للقلب من اليمين في R.

2 – يوجد عنصر $x \in R$ بحيث إن العنصر $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ هو $P-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

3 – يوجد عنصر $x \in R$ بحيث إن العنصر $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ هو $Q-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

البرهـــــان.

$(1) \Rightarrow (2)$. لنفرض أن العنصر $a \in R$ قابل للقلب من اليمين في R، عندئذ بحسب المبرهنة (2-5) أياً كان $x, y \in R$ فإن العنصر $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & a \end{bmatrix}$ هو $P-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$ ولأجل $y = 0$ نجد أن العنصر $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ هو $P-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

$(2) \Rightarrow (1)$. حسب الفرض يوجد عنصر $x \in R$ بحيث إن العنصر الآتي:

$$\alpha = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in M_2(R)$$

هو $P-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$ وبحسب التمهيدية (2-3) يوجد $\beta \in M_2(R)$ بحيث يكون $1-\alpha\beta \in P$. لنفرض أن $\beta = \begin{bmatrix} u & v \\ w & b \end{bmatrix} \in M_2(R)$ حيث

$u,v,w,b\in R$، عندئذ:

$$1-\alpha\beta=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x&0\\0&a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u&v\\w&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}xu&xv\\aw&ab\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}1-xu&-xv\\-aw&1-ab\end{bmatrix}\in P$$

وهذا يبين أن $ab=1$ وبالتالي فإن العنصر a قابل للقلب من اليمين في الحلقة R.
بطريقة مشابهة يمكننا إثبات صحة التكافؤ $(1)\Leftrightarrow(3)$.

اعتماداً على المبرهنة $(2-8)$ يمكننا صياغة المبرهنة الآتية:

مبرهنـــــة 2-9.

لأجل أي حلقة $R\neq 0$ الشروط الآتية متكافئة:

1 − الحلقة R هي جسم.

2 − لأجل أي عنصر مغاير للصفر $a\in R$ يوجد عنصر $x\in R$ بحيث يكون العنصر $\begin{bmatrix}x&0\\0&a\end{bmatrix}$ هو $P-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

3 − لأجل أي عنصر مغاير للصفر $a\in R$ يوجد عنصر $x\in R$ بحيث يكون العنصر $\begin{bmatrix}a&0\\0&x\end{bmatrix}$ هو $Q-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$.

البرهـــــان.

$(1)\Rightarrow(2)$. لنفرض أن الحلقة R جسم وليكن $a\in R$ عنصراً مغايراً للصفر في R، عندئذ فإن a قابل للقلب من اليمين في R وبحسب المبرهنة $(2-8)$ يوجد عنصر $x\in R$ بحيث يكون العنصر $\begin{bmatrix}x&0\\0&a\end{bmatrix}$ هو $P-$قابل للقلب من اليمين في $M_2(R)$.

$(2)\Leftarrow(1)$. ليكن $a\in R$ عنصراً مغايراً للصفر في R، عندئذ حسب الفرض فإنه يوجد عنصر $x\in R$ بحيث يكون العنصر $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ هو $P-$قابل للقلب من اليمين في الحلقة $M_2(R)$ وحسب المبرهنة $(2-8)$ نجد أن العنصر a قابل للقلب من اليمين في R ومنه فإن الحلقة R هي جسم. بطريقة مشابهة يمكننا إثبات صحة التكافؤ $(1)\Leftrightarrow(3)$.

العناصر $P-$غير القابلة للقلب من اليمين.

تعريف.

لتكن R حلقة و $P\neq R$ مثالياً يمينياً في R. نقول عن العنصر $a\in R$ إنه غير قابل للقلب من اليمين بالنسبة للمثالي اليميني P في الحلقة R، أو اختصاراً $P-$غير قابل للقلب من اليمين في R إذا كان $R\neq aR+P$.

ينتج من التعريف مباشرة التمهيدية الآتية:

تمهيدية 2-10.

لتكن R حلقة و $P\neq R$ مثالياً يمينياً في R. عندئذ لأجل أي عنصر $a\in R$ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - $R\neq aR+P$.

2 - أياً كان $x\in R$ فإن $1-ax\notin P$.

البرهان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن $R\neq aR+P$ ولنفرض جدلاً أنه يوجد $x\in R$ بحيث $1-ax\in P$، عندئذ يوجد $p\in P$ بحيث إن $1-ax=p$ ومنه يكون:

$$1=ax+p\in aR+P$$

وهذا يبين أن $R=aR+P$ وهذا غير ممكن، ومنه فإن $1-ax\notin P$ وذلك أياً كان $x\in R$.

$(2)\Leftarrow(1)$. لنفرض جدلاً أن $R=aR+P$، عندئذ يوجد $x\in R$ و $p\in P$ بحيث إن $1=ax+p$ ومنه $1-ax=p\in P$ وهذا يناقض الفرض ومنه فإن $R\neq aR+P$.

تمهيديـــة 2-11.

لتكن R حلقة و $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R. إن مجموعة العناصر غير القابلة للقلب من اليمين بالنسبة للمثالي اليميني P الآتية:

$$K = \{ a : a \in R; R \neq aR + P \}$$

تحقق الخواص الآتية:

1 - $K \neq \Phi$ و $K \neq R$.

2 - $P \subseteq K$.

البرهـــــان.

1 - واضح أن $0 \in K$، لأن $R \neq P = 0R + P$. ومنه فإن $K \neq \Phi$. فضلاً عن ذلك، إن $1 \notin K$، لأن $1R + P = R$ ومنه $K \neq R$.

2 - ليكن $p \in P$، عندئذ فإن:

$$P \subseteq pR + P \subseteq PR + P \subseteq P$$

ومنه فإن $P = pR + P$ وبالتالي يكون $R \neq P = pR + P$ وهذا يبين أن $p \in K$ ومنه فإن $P \subseteq K$.

مبرهنـــة 2-12.

لتكن R حلقة و $P \neq R$ مثالياً يمينياً في R. لنفرض أن:

$$K = \{ a : a \in R; R \neq aR + P \}$$

عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1 – المجموعة K مغلقة بالنسبة لعملية الجمع المعرفة على R.

2 – المجموعة K تشكل مثالياً يمينياً في R يحقق $K \neq R$.

3 – K أكبر مثالي يميني في R.

4 – يوجد في الحلقة R مثالي يميني أكبر N بحيث يكون $N \neq R$ وأن $P \subseteq N$.

5 – لأجل كل عنصر $a \in R$ إما العنصر a أو العنصر $1-a$ هو $P-$قابل للقلب من اليمين في R.

6 – يوجد في R مثالي يميني أعظمي واحد فقط M بحيث $P \subseteq M$.

البرهـــــان.

$(1)\Rightarrow(2)$. لنفرض أن المجموعة K مغلقة بالنسبة لعملية الجمع المعرفة على R. وليكن $a\in K$، عندئذ $R\neq aR+P$ ومنه أياً كان $x\in R$ فإن $R\neq axR+P$، لأنه إذا وجد $x\in R$ بحيث $R=axR+P$ نجد أن:

$$R=axR+P\subseteq aR+P\subseteq P$$

وبالتالي يكون $R=aR+P$ وهذا غير ممكن، ومنه فإن $ax\in K$ وذلك أياً كان $x\in R$ وبالتالي فإن المجموعة K تشكل مثالياً يمينياً في R وبحسب التمهيدية $(2-11)$ نجد أن $K\neq R$.

$(2)\Rightarrow(3)$. ليكن B مثالياً يمينياً في R بحيث إن $B\neq R$ وأن $P\subseteq B$، عندئذ لأجل كل عنصر $b\in B$ فإن $R\neq bR+P$، لأنه إذا وجد $b\in B$ بحيث $b\notin K$ فإن:

$$R=bR+P$$

عندئذ يكون:

$$R=bR+P\subseteq B+P\subseteq B\subseteq P$$

ومنه فإن $B=R$ وهذا غير ممكن، ومنه فإن $B\subseteq K$.

$(3)\Rightarrow(4)$. واضح.

$(4)\Rightarrow(5)$. لنفرض أن N هو أكبر مثالي يميني في R يحقق $N\neq R$ وأن $P\subseteq N$ وليكن $x\in R$، لنفرض أن $R\neq xR+P$ وأن $R\neq(1-x)R+P$، عندئذ فإن:

$$(1-x)R+P\subseteq N \text{ و } xR+P\subseteq N$$

وهذا يبين أن $x\in N$ و $1-x\in N$ ولما كان $1=x+(1-x)$ نجد أن $1\in N$ ومنه يكون $N=R$ وهذا تناقض.

$(5)\Rightarrow(1)$. ليكن $a,b\in K$، عندئذ $R\neq aR+P$ و $R\neq bR+P$. لنفرض أن $a+b\notin K$، عندئذ فإن $R=(a+b)R+P$ ومنه فإن $1=(a+b)x+p_0$ حيث $x\in R$ و $p_0\in P$.

فضلاً عن ذلك إن $1-bx=ax+p_0$. إن $1-bx\in K$، لأنه إذا كان $1-bx\notin K$ نجد أن:

$$R=(1-bx)R+P=(ax+p_0)R+P\subseteq axR+P\subseteq aR+P\subseteq R$$

وهذا يبين أن $R = aR + P$ وهذا تناقض، ومنه نجد أن:

$$1 = bx + (1 - bx) \in K$$

وهذا غير ممكن، وبالتالي المجموعة K مغلقة بالنسبة لعملية الجمع المعرفة على R .

$(3) \Leftarrow (6)$. لنفرض أن K أكبر مثالي يميني في R . لما كان $K \neq R$ فإنه يوجد مثالي يميني أعظمي M في R بحيث إن $K \subseteq M$ ولما كان K أكبر مثالي يميني في R نجد أن $K = M$ وهذا يبين أن R تحوي فقط مثالي يميني أعظمي واحد هو M وأن $P \subseteq M$.

$(6) \Leftarrow (3)$. واضح.

المـراجــع العــلميـــة.

[1] – Anderson, F. W. & Fuller, K. R. " Rings and Categories of Modules ", New York. Springer (1973).

[2] – Andrunakievich, A. V. and Andrunakievich, V. A. " Rings that are Regular Relative to Right Ideals ", Mat. Zametki, 1991, Volume 49, Issue 3, 3 – 11.

[3] – Andrunakievich,V. A. and Ryabukhin, Yu. M. " Quasi-Regularity and Primitivity Relative to Right Ideals of a Ring ", Mat. Sb. (N.S.),134(176):4(2) (1987), 451 – 471: Math. USSR-Sb., 62:2 (1989), 445-464.

[4] – Goodearl, K. R."Von Neumann Regular Rings", Pitman 1979.

[5] – Hamza, H. " I_0 – Rings and I_0 – Modules ", Math. J. Okayama Univ. 40 (1998) , p. 91 – 97 .[2000].

[6] – Hamza H., " On Some Characterizations of Regular and Potent Rings Relative to Right Ideal ", Novi Sad J. Math. Vol. 48, No. 1, (2018), p. 1 – 7.

[7] – Hamza H., " P – Regular and P – Local Rings ", Journal of Algebra and Related Topic. Vol. 9, No. 2, (2021), pp. 1 – 19.

[8] – Kasch, F. " Modules and Rings ", London Math. Soc. Mono. 1982.

[9] – Lambek, J."Lectures on Rings and Modules", Blaisdell, Mass. 1966.