

حساب معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي لمنظومة ديناميكية مستمرة

اسم الباحث: سراب علي محمود

العنوان: قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة البعث.

الدكتور المشرف: مصطفى حسن + د. محمد العلي

البريد الإلكتروني: sarabmahmoud83@gmail.com

ملخص البحث:

معاملات ليابونوف الأسية هي واحدة من مقاييس الفوضى في المنظومات الديناميكية [1]. وبشكل خاص كون معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي λ_1 موجباً هو دليل قوي على وجود الفوضى. إن قيمة λ_1 تخبرنا فيما إذا كانت منظومة ديناميكية معطاة فوضوية أم لا. فإذا كان $\lambda_1 > 0$ عندئذٍ تعد المنظومة فوضوية وإلا إذا كان $\lambda_1 < 0$ تعد غير فوضوية. نهتم في هذا البحث بطرق حساب هذا المعامل، ونقدم طريقة تحليلية لحسابه بالإضافة إلى خوارزمية عددية تبين كيفية حساب هذا المعامل. كما نقوم بتطبيق نتائج هذا البحث على عدة منظومات ديناميكية شهيرة، ونقدم ملحقاً يتضمن النصوص البرمجية التي استخدمناها لانجاز الحسابات العددية.

كلمات مفتاحية: المنظومات الديناميكية المستمرة - التدفق - مسار
المنظومة - معاملات ليابونوف الأسية - معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي
- فضاء الموضع لمنظومة ديناميكية.

The Largest Lyapunov exponent for a Continuous Dynamical System

.
:

Abstract

Lyapunov exponents are important measures of Chaos in dynamical systems[1]. Particularly, a positive largest Lyapunov exponent λ_1 is a strong indicator of chaos. The value of λ_1 would tell us whether or not a given dynamical system is chaotic. If $\lambda_1 > 0$, then the dynamical system is chaotic, otherwise if $\lambda_1 < 0$, then the dynamical system is non-chaotic.

We will find an analytic method to calculate this exponent. In addition, we will give an algorithm for the calculation criteria, and finally we will calculate the largest Lyapunov exponent for some famous dynamical systems, and then we will give program's codes which we write for the calculation.

Key words: Dynamical Systems – Flow – Trajectory – Lyapunov Exponents – The Largest Lyapunov Exponent – Phase Space.

مقدمة

تستخدم معاملات ليابونوف بشكل واسع في دراسة المنظومات الديناميكية، لقد كان قام أوسيلديك (Oseledec) بدراسة نظرية لهذه المعاملات، كما عمل كلاً من بينتين (Benttin) وولف (Wolf) في هذا المجال .

بدايةً، سنعرف بإيجاز معاملات ليابونوف الأسية وسنهتم في دراستنا هذه في المنظومات الديناميكية المستمرة من الشكل $\frac{dX}{dt} = F(X)$ ، وسنقدم طريقة تحليلية لحساب هذا المعامل بالإضافة إلى خوارزمية عددية تبين طريقة الحساب، بالإضافة إلى ملحق يتضمن النصوص البرمجية التي قمنا بكتابتها لتساعدنا في الحساب.

هدف البحث

نريد الوصول إلى طريقة عملية وتحليلية لحساب معامل ليابونوف الأعظمي.

مواد وطرق البحث

سنقوم بدراسة تحليلية تعتمد على نشر تايلور وسنستخدم برنامج ماثماتيكا (Mathematica) لكتابة برامج تقوم بحساب قيمة هذا المعامل.

1. معامل ليابونوف الأعظمي

لتكن المنظومة الديناميكية المؤلفة من n معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى التالية:

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (1)$$

حيث أن $X \in \mathbb{R}^n$ هو متجه ذو n بعد، $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ هي دالة قابلة للمفاضلة، t هو متحول الزمن.

بفرض أن X^0 هي نقطة من فضاء الموضع للمنظومة (1) و تقع ضمن مجال جذب أحد جواذب المنظومة و ليكن A ، و لنرمز بالرمز $\phi_t(X^0)$ لتدفق هذه المنظومة الذي يحقق الشروط الابتدائية $\phi_0(X^0) = X^0$ ، ولتكن $\{E_i\}_{i=1}^n$ قاعدة لفضاء الموضع و $0 < \delta \ll 1$ عدد حقيقي موجب صغير بقدر كافٍ. يمكننا ضمن هذه الفرضيات الحصول على مجموعة من التدفقات ذات الاضطرابات الصغيرة للمنظومة (1)، وهي $\{\phi_t(X^0 + \delta E_i)\}_{i=1}^n$ ذات الشروط الابتدائية $\phi_0(X^0 + \delta E_i) = X^0 + \delta E_i$ حيث $1 \leq i \leq n$. و إذا رمزنا بالرمز $\delta_i(t)$ للمتجه الموجه من $\phi_t(X^0)$ إلى $\phi_t(X^0 + \delta E_i)$ في أي لحظة زمنية، فإن $\delta_i(0) = \delta E_i$ ، لقد تم إثبات أن النهاية التالية:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} \frac{\|\delta_i(t)\|}{\|\delta_i(0)\|} \quad (2)$$

موجودة عندما $\delta \rightarrow 0$ و هي ذاتها من أجل أي متجه وحدة توجيه E_i في فضاء الموضع. و تعرف هذه النهاية على أنها معامل ليايبنوف الأعظمي ويرمز بها بالرمز λ_1 .

2. الطريقة التحليلية لحساب معامل ليايبنوف الأعظمي:

لنأخذ المسارين $\phi_t(X^0)$ و $\phi_t(X^0 + \delta E_1)$ للمنظومة (1) الموافقين للشروط الابتدائية $\phi_0(X^0) = X^0$ و $\phi_0(X^0 + \delta E_1) = X^0 + \delta E_1$ حيث $0 < \delta \ll 1$.

و بهذا الشكل يمكن تعريف المتجه $\delta_1(t)$ في فضاء موضع المنظومة المعطاة بالعلاقة:

$$\delta_1(t) = \phi_t(X^0 + \delta E_1) - \phi_t(X^0) \quad (3)$$

الآن، باشتقاق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة للزمن و بالاستفادة من كون $\phi_t(X^0)$ و $\phi_t(X^0 + \delta E_1)$ هما حلول للمعادلة التفاضلية (1) ، نجد أن:

$$\frac{d}{dt} \delta_1(t) = F(\phi_t(X^0) + \delta_1(t)) - F(\phi_t(X^0)) \quad (4)$$

بنشر الدالة F في جوار $\phi_t(X^0)$ ، نجد:

$$\frac{d}{dt} \delta_1(t) = \mathfrak{J}(\phi_t(X^0)) \delta_1(t) \quad (5)$$

حيث أن \mathfrak{J} هي المصفوفة اليعقوبية للدالة F . لكن و بما أن $\phi_t(X^0)$ هي أحد حلول المعادلة التفاضلية (1) ، فإنه يمكن كتابة المعادلة الأخيرة بالشكل :

$$\frac{d\delta_1}{dt} = \mathfrak{J}(X) \delta_1 \quad (6)$$

الآن، بتقسيم الطرفين على δ $\|\delta_1(0)\| = \delta$ ، يمكن أن نكتب المعادلة السابقة بالشكل:

$$; \quad L(0) = E_1 \frac{dL}{dt} = \mathfrak{J}(X) \cdot L \quad (7)$$

حيث أن E_1 هو أي متجه وحدة في فضاء موضع المنظومة المعطاة.

و بالتالي نستنتج أنه يمكن حساب معامل ليابونوف الأسي الأعظمي من خلال حل جملة المعادلتين (1) و (7) معاً و من ثم إيجاد قيمة المعامل λ_1 من العلاقة التالية:

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} \|L(t)\| \quad (8)$$

نسمي المعادلة (8) بالمعادلة الأساسية لحساب معامل ليابونوف الأسي الأعظمي.

3. خوارزمية حساب معامل ليابونوف الأسي الأعظمي لمنظومة ديناميكية:

لتكن لدينا منظومة ديناميكية من الشكل (1) والمكونة من n معادلة تفاضلية، عندئذٍ تلخص هذه الخوارزمية بالخطوات التالية:

1- نعرف المنظومة الجديدة المؤلفة من $(2n)$ معادلة والتي يكون فيها الـ n معادلة الأولى هي معادلات المنظومة نفسها:

$$\frac{dX}{dt} = F(X)$$

والمعادلات الباقية هي :

$$\frac{dL}{dt} = \mathfrak{J}(X).L$$

2- نطبق طريقة عددية لحل المنظومة (مثل طريقة رانج كوتا) من أجل الشروط الابتدائية:

$$X(t_0) = X_0$$

$$L(t_0) = E_1$$

- 3- نحسب في كل خطوة اللوغاريتم الطبيعي لطويلة L .
- 4- نجمع اللوغاريتمات ونقسمها على عدد التكرارات (بعد إهمال عدد كاف من الحلول الأولى للمنظومة (ما نسميه بالعابر الديناميكي).

فحصل بذلك على معامل ليابونوف الأعظمي.

4. أمثلة:

مثال 1:

منظومة لورنز: يعطى نموذج لورنز للحمل الحراري [Lorenz (1963)] بواسطة منظومة ديناميكية مستمرة (تفاضلية) ثلاثية الأبعاد من الشكل:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - qz \end{cases} \quad (9)$$

حيث أن p, q, r هي وسطاء حقيقية موجبة تتعلق بالحالة الفيزيائية للمائع.

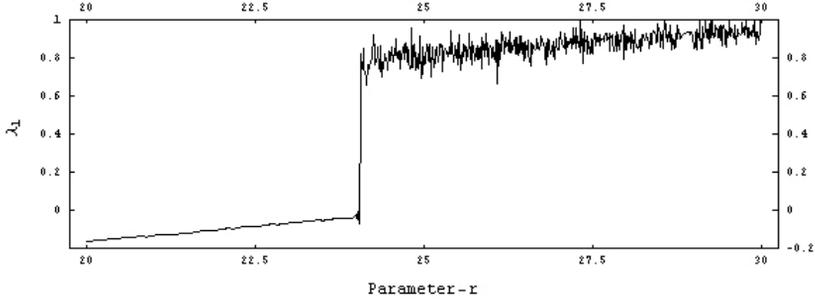
لقد حسبنا معامل ليابونوف الأعظمي لهذه المنظومة وفق الخوارزمية السابقة

من أجل قيمتي الوسيطين $p = 10, q = \frac{8}{3}$ وقيم الوسيط $r \in [20, 30]$ ،

حيث يبين الشكل (1) تغير قيمة معامل ليابونوف بتغير قيمة الوسيط r ،

يتضح من الشكل أن المسار يكون غير فوضوياً من أجل قيم الوسيط

$r < 24$ ويصبح فوضوياً من أجل بقية قيم المجال.

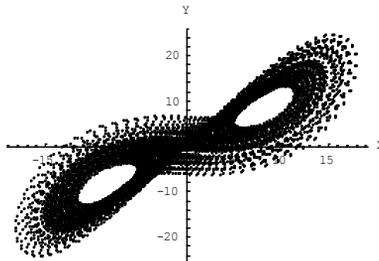


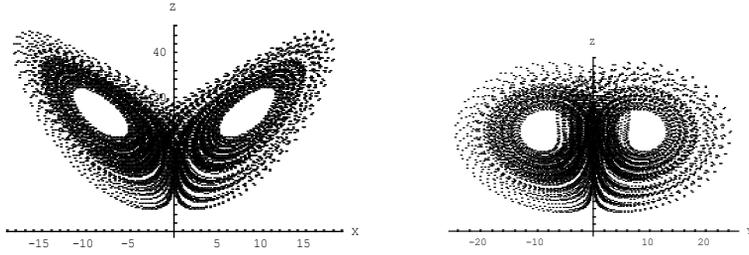
الشكل (1): معامل ليابونوف لمنظومة لورنز من أجل قيمتي الوسيطين

$$p = 10, q = \frac{8}{3}$$

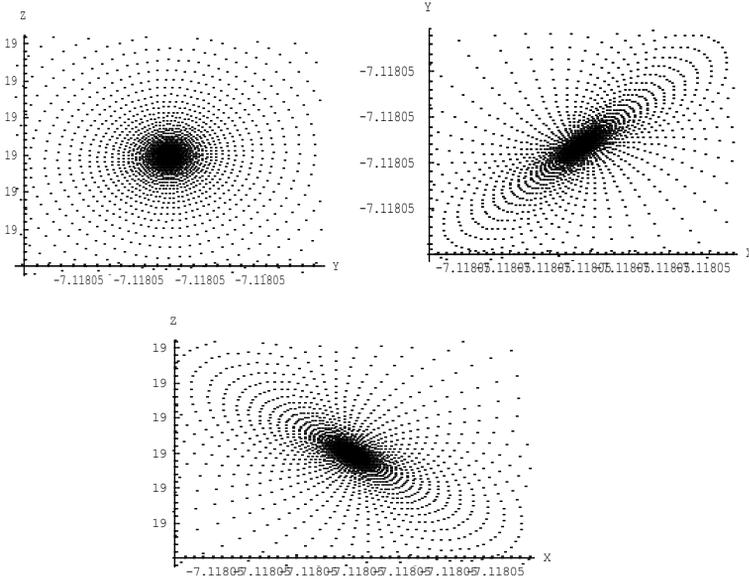
كما يبين الشكل (2) مساقط المسار الفوضوي لهذه المنظومة الديناميكية في المستوي $(x-y)$ والمستوي $(x-z)$ و $(y-z)$ على الترتيب من أجل قيم الوسطاء $r = 28$ و $p = 10$ و $q = 8/3$.

ويبين الشكل (3) مساقط المسار الغير الفوضوي لهذه المنظومة الديناميكية في المستوي $(x-y)$ و $(x-z)$ و $(y-z)$ على الترتيب من أجل قيم الوسطاء $r = 20$ و $p = 10$ و $q = 8/3$.





الشكل (2) مساقط جاذب منظومة لورنز الفوضوي عاى المستويات الاحداثية من أجل قيم الوسطاء $r = 28$ و $p = 10$ و $q = 8/3$.



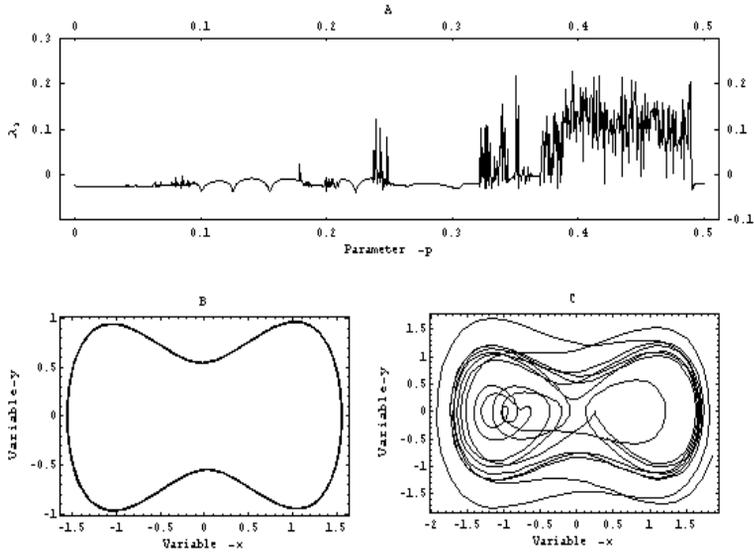
الشكل (3) مساقط جاذب منظومة لورنز الفوضوي عاى المستويات الاحداثية من أجل قيم الوسطاء $r = 20$ و $p = 10$ و $q = 8/3$.

مثال 2: منظومة دفينغ القسرية (*Driven Duffing System*): تعطى هذه المنظومة بجملة المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى التالية :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - qy + p \cos(rz) \\ \frac{dz}{dt} = 1 \end{cases} \quad (10)$$

حيث p و q و r هي وسطاء هذه المنظومة. و سنثبت قيمة الوسيطين $q=0.05$ و $r=0.7$ أما الوسيط p فيمكن له أن يأخذ أية قيمة في المجال $[0, 0.5]$.

قمنا أيضاً بحساب معامل ليابونوف الأسي الأعظمي لهذه المنظومة وفق الخوارزمية السابقة ووجدنا أن معامل ليابونوف الأسي الأعظمي λ_1 يكون موجباً من أجل بعض قيم الوسيط p و سالباً من أجل قيم أخرى. و الشكل (4) يوضح مسارين نموذجيين لهذه المنظومة من أجل القيمتين التاليتين للوسيط p و هما $p = 0.125$ (المسار الغير فوضوي) و $p = 0.4$ (المسار الفوضوي) على الترتيب.



الشكل (4): (A) معامل ليايبنوف الأسي لمنظومة دفينغ القسرية

(B) المسار غير الفوضوي $p = 0.125$ (C) المسار الفوضوي $p = 0.4$

مثال 3

منظومة روسلر المختزلة (*Reduced Rossler System*): تعطي هذه

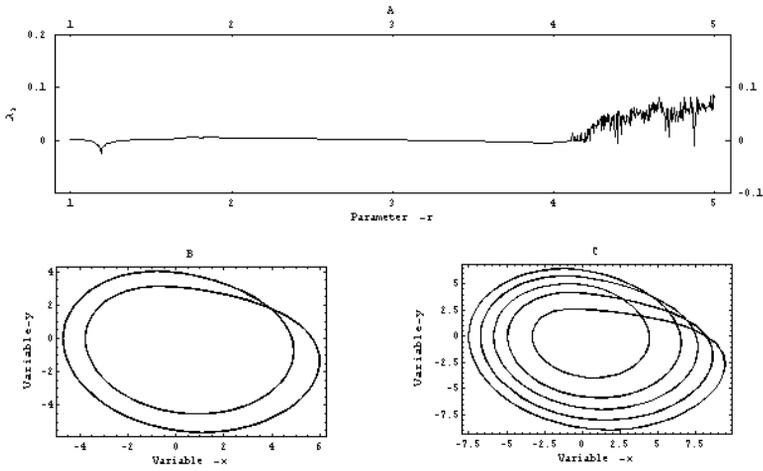
المنظومة بجملة المعادلات التفاضلية الثلاثة من المرتبة الأولى التالية

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x \\ \frac{dy}{dt} = x + py \\ \frac{dz}{dt} = q + z(x - r) \end{cases} \quad (11)$$

حيث p و q و r هي وسطاء لهذه المنظومة، وبحساب معامل

ليايبنوف لهذه المنظومة

من أجل قيمتي الوسيطين $p = q = 0.2$ ومن أجل قيم الوسيط $r \in [1, 5]$ نجد معامل ليايونوف الأسي الأعظمي λ_1 يكون موجباً من أجل بعض قيم الوسيط r و سالباً من أجل قيم أخرى. و الشكل (5) يوضح مسارين نموذجيين لهذه المنظومة من أجل القيمتين التاليتين للوسيط $r = 3$ (مسار لافوضوي) و $r = 4.7$ (مسار فوضوي)، على الترتيب.



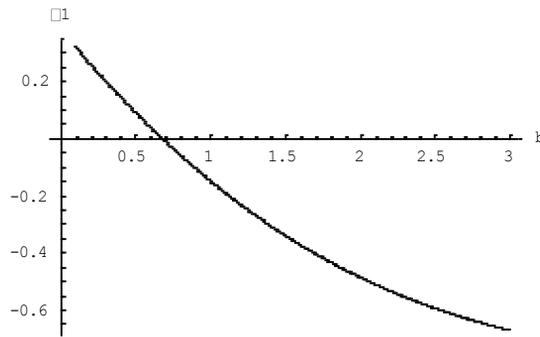
الشكل (5): (A) معامل ليايونوف الأسي الأعظمي لمنظومة روسلر المختزلة (B) الجاذب غير الفوضوي للمنظومة من أجل $r = 3$ (C) الجاذب الفوضوي للمنظومة من أجل $r = 4.7$.

منظومة سيلينكوف

تعطى هذه المنظومة بالمعادلات التالية :

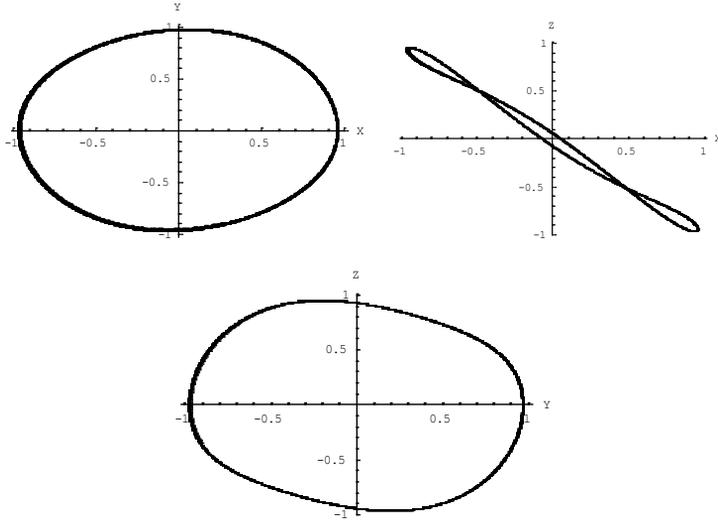
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = x^3 - a^2x - y - bz \end{cases} \quad (12)$$

حيث a, b وسطاء المنظومة، لنثبت $a = 1.3$ ، ولنترك b يتحول في المجال $[0,3]$ ، وبحساب معامل ليابونوف لهذه المنظومة مع هذه القيم للوسطاء وفق الخوارزمية المذكورة أعلاه نجد أنه مع ازدياد قيمة الوسيط b من 0 الى 3 فان معامل ليابونوف الأعظمي تتغير قيمته من موجبة لتصبح سالبة بالقرب من القيمة $b \approx 0.7$ ، وبعدها يظهر الجاذب غير الفوضوي من أجل بقية قيم المجال، الشكل (6) يوضح ذلك، والشكل (7) يوضح الجاذب غير الفوضوي الموافق لقيم الوسطاء $a = 1.3$ $b = 1$ ،



الشكل (6) : معامل ليابونوف الأعظمي لمنظومة سيلينكوف من أجل قيم

$$\text{الوسطاء } a = 1.3 \text{ , } b \in [0,3]$$



الشكل (7) : مساقط الجاذب غير الفوضوي لمنظومة سيلينكوف من أجل قيم الوسطاء $b=1$ $a=1.3$,

ملحق بالنصوص البرمجية

1- برنامج يحسب معامل ليايبنوف الأعظمي لمنظومة لورنز من أجل

$$: r \in [20,30] \quad q=8/3, \quad p=10$$

```

$MaxExtraPrecision 10000000000.;
NextPointRK fun_, initialX_, h_ :=
Module [k1, k2, k3, k4 ; k1 fun initialX
k2 fun initialX h k1
k3 fun initialX h k2
k4 fun initialX h k3
initialX h k1 k2 k3 k4
6 3 3 6
SolRK fun_, initialX_, h_, L_ :=
NestList NextPointRK fun_, #, h &, initialX, Round L/h
InitialRK fun_, initialX_, h_, L_ :=
Nest NextPointRK fun_, #, h &, initialX, Round L/h
f X_ := p X^2 - r X - 1;
X := 1;
p X := 1;
X := 2;
X := 4;
X := 1;
X := 5;
X := 6;
p := 10; q := 8/3; r := 23.7;
X0 := InitialRK f, 1., 0., 0., 1., 0., 0. 0.01, 100
t1 := SolRK f, X0, 0.01, 100
txy := Table [t1[[i, 2]], {i, 1, Length t1}];
pxy := ListPlot [txy, AxesLabel {X, Y}];
txz := Table [t1[[i, 3]], {i, 1, Length t1}];
pxz := ListPlot [txz, AxesLabel {X, Z}];
tyz := Table [t1[[i, 1]], {i, 1, Length t1}];
pyz := ListPlot [tyz, AxesLabel {Y, Z}];
While [r < 29.,
tt1 := SolRK f, X0, 0.1, 1
s := 0; For [i, 1, Length tt1, i, Log [tt1[[i, 4]]^2
tt1[[i, 5]]^2 tt1[[i, 6]]^2
s := s + 1; s1 := s/i; i := Length Lyap; Append Lyap, s1];
ListPlot Lyap, AxesLabel {r, "1"}

```

2- برنامج يحسب معامل ليابونوف الأسي لمنظومة ديفينغ من أجل قيم

$$, r \in [20,30] \quad q=8/3, \quad p=10 \quad \text{الوسطاء}$$

```

$MaxExtraPrecision 1000000000000;
NextPointRK fun_, initialX_, h_, L_ :=
Module [k1, k2, k3, k4, k1 fun initialX_
k2 fun initialX_ h_ k1
k3 fun initialX_ h_ k2 k4 fun initialX_ h_ k3
initialX_ h_ k1 k2 k3 k4
6 3 3 6
SolRK fun_, initialX_, h_, L_ :=
NestList NextPointRK fun, #, h &, initialX, Round [L/h

InitialRK fun_, initialX_, h_, L_ :=
Nest NextPointRK fun, #, h &, initialX, Round [L/h
f X_ := k-2 X-1 - X-1 X-2
p Cos [X-1, X-1, X-1, X-1, X-1, X-1, X-1, X-1, X-1, X-1
q X-1 r X-1 p Sin [X-1, 0
p 0.4; q 0.05; r 0.3;
X0 InitialRK E, 0.1, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0 0.1, 1
t1 SolRK E, X0, 0.01, 100
txy Table [t1, 1, 2, 1, Length t1
pxy ListPlot xxy, AxesLabel {X", "Y"
txz Table [t1, 1, 3, 1, Length t1
pxz ListPlot txz, AxesLabel {X", "Z"
tyz Table [t1, 2, 3, 1, Length t1
pyz ListPlot tyz, AxesLabel {Y", "Z"
Lyap {}
p 0.0001
While p 0.5,
tt1 SolRK E, X0, 0.1, 1
s 0;
For [1, i, Length tt1
i Log [tt1 [i, 4]^2 tt1 [i, 5]^2 tt1 [i, 6]^2
; s s 1; s1 s/i; i i
Lyap Append Lyap, p, s1 p 0.01
ListPlot Lyap, AxesLabel {p", "i"

```

برنامج يحسب معامل ل يابونوف الأعظمي لمنظومة سيلينكوف من

$$a = 1 \text{ و } b \in [0,3]$$

```

$MaxExtraPrecision = 10000000000000000;
NextPointRK[fun_, initialX_, h_] :=
Module[{k1, k2, k3, k4}, k1 = fun[initialX];
k2 = fun[initialX + h/2 k1];
k3 = fun[initialX + h/2 k2]; k4 = fun[initialX + h k3];
initialX + h (k1/6 + k2/3 + k3/3 + k4/6);
SolRK[fun_, initialX_, h_, L_] :=
NestList[NextPointRK[fun, #, h] &, initialX, Round[L/h]]
InitialRK[fun_, initialX_, h_, L_] :=
Nest[NextPointRK[fun, #, h] &, initialX, Round[L/h]]
f[X_] := -X^2 + X^3 + a^2 X^4 + b X^5;
X[6] := X[6] + h f[X[6]];
a = 1.3; b = 1.;
X0 = InitialRK[f, 0.1, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 1];
t1 = SolRK[f, X0, 0.01, 100];
txy = Table[{t, 1, 2}, {t, 1, Length[t1]}];
pxy = ListPlot[txy, AxesLabel -> {"X", "Y"}];
txz = Table[{t, 1, 3}, {t, 1, Length[t1]}];
pxz = ListPlot[txz, AxesLabel -> {"X", "Z"}];
tyz = Table[{t, 2, 3}, {t, 1, Length[t1]}];
pyz = ListPlot[tyz, AxesLabel -> {"Y", "Z"}];
Lyap = {};
b = 0.1;
While[b < 3.,
tt1 = SolRK[f, X0, 0.1, 1];
s = 0;
For[i = 1, i < Length[tt1],
{1, Log[tt1[[i, 4]]^2] - tt1[[i, 5]]^2 - tt1[[i, 6]]^2};
; s = s + 1; s1 = s/i; i = i + 1;
Lyap = Append[Lyap, {s1, b}]; b = 0.1];
ListPlot[Lyap, AxesLabel -> {"b", "1"}];

```

المراجع العلمية

- [1]-Froeschle, C., J., 1984. The Lyapunov Characteristic Exponents and Applications. *Mecanique Theorique et Applique*, Numero Special : 101-132.
- [2]-Galias, Z., 1999. Local Transversal Lyapunov Exponents for Analysis of Synchronization of Chaotic Systems. *Int. J. Circuit Theory and Applications*, **27** (6) : 589-604.
- [3]- Grond, F., and Diebner H. H., 2005. Local Lyapunov Exponents for Dissipative Continuous Systems. *Chaos, Solitons and Fractals***23** (5) : 1809-1817.
- [4]-Dewar, R. L. and Henry, B.I., 1992. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. World Scientific, Singapore.
- [5]-Drazin, P.G., 1992. *Nonlinear Systems*. Cambridge Univ. Press, Glasgow.