دراسة تقريب لتابع زيتا الريماني في فضاء التوابع القابلة للمكاملة وفضاء التوابع القابلة للمكاملة تربيعاً

اعداد : د. الاء ابو العينين

ملخص

قمنا في هذه المقالة بدراسة تقريب لتابع زيتا الريماني المُعرف في المقالة [5] في الفضائين $L^2(D_m)$ و $L^1(D_m)$، حيث أن هذا التقريب هو تعديل وتحسين للتقريب المُعرف في المقالة [1]، حيث تمت الدراسة في المقالة [5] في الفضاء $\mathrm{C}(D_m)$.

ووجدنا بالنتائج العددية أن التقريب المُعرف في المقالة [5] يُعطي نتائج أفضل من التقريب المُعرف في المقالة [1] في الفضائين $L^2(D_m)$ و$L^1(D_m)$، وقمنا أيضاً بدراسة الخطأ النسبي في الفضاءات $L^2(D_m)$ و $L^1(D_m)$ و $\mathrm{C}(D_m)$ ومقارنة النتائج لنجد أن التقريب في الفضاء $L^2(D_m)$ هو الأفضل. وقمنا بحساب جميع النتائج العددية وبناء الخوارزميات باستخدام البرنامج الحاسوبي Wolfram Mathematica 10.0.

الكلمات المفتاحية: تابع زيتا الريماني، المستقيم الحرج، تقريب كسري، فضاء التوابع المستمرة، فضاء التوابع القابلة للمكاملة، فضاء التوابع القابلة للمكاملة تربيعياً.

An approximation of the Riemannian zeta function in the integrable functions space and the quadratically integrable functions space

Abstract

In this article, we study an approximation of the Riemannian zeta function defined in [5] in the two spaces $L^2(D_m)$ and $L^1(D_m)$, This approximation is a modification and improvement of the approximation defined in [1].

The study the space $C(D_m)$ in [5] and we found with numerical results that the approximation defined in [5] gives better results than the approximation defined in [1] in the two spaces $L^2(D_m)$ and $L^1(D_m)$. We also study the relative error of the spaces $L^2(D_m)$ and $L^1(D_m)$ and $C(D_m)$, and compare the results to find that the approximation in the space $L^2(D_m)$ is the best. We calculated all numerical results and built algorithms using Wolfram Mathematica 10.0.

Keywords: Riemann zeta function, critical line, rational approximation, the continuous functions space, the integrable functions space, the quadratically integrable functions space.

1_مقدمة

عرفت المقالة [1] متتالية من التوابع الكسرية المتقاربة موضعياً بانتظام لتابع زيتا الريماني، وقد لوحظ من الحسابات العددية أن هذه المتتالية تتقارب بشكل بطيء عند ازدياد مرتبة التقريب، بالإضافة إلى أن طول مجال التقارب على المستقيم الحرج الذي يحوي أصفار التابع زيتا صغير جداً، وقدمت المقالة [5] تعديلاً للتقريب السابق، ليعطي نتائج تقريبية أفضل وفي مجال أكبر على المستقيم الحرج، حيث تمت المقارنة عددياً بين نتائج المتتالية المعرفة في المقالة [1] و التعديل المعرف في المقالة [5] في فضاء التوابع المستمرة.

قمنا في هذه المقالة بدراسة التقريب المُعرف في المقالة [5] في فضاء التوابع القابلة للمكاملة تربيعياً $L^2(D_m)$ وفضاء التوابع القابلة للمكاملة $L^1(D_m)$ (اللذان لهما دوراً مهماً في دراسة العديد من مجالات الرياضيات والفيزياء)، ووجدنا أن التقريب المُعرف في المقالة [5] يُعطي أيضاً نتائج عددية أفضل من التقريب المُعرف في المقالة [1] وذلك عند دراسة الخطأ وفق النظيم في الفضائين السابقين.

وقمنا أيضاً بدراسة الخطأ النسبي للتقريب المُعدل في المقالة [5] في الفضاءات $C(D_m)$ و $L^2(D_m)$ و $L^1(D_m)$ بهدف المقارنة بين النتائج، ووجدنا أن الخطأ في الفضاء $L^2(D_m)$ هو الأقل، ومنه التقريب في الفضاء $L^2(D_m)$ هو الأفضل.

حيث D_m هو مجال التقارب في المستقيم الحرج و m مرتبة التقارب.

2_ هدف البحث

نظراً لوجود العديد من خواص تابع زيتا الريماني التحليلية مجهولةً او بدون برهان، بالإضافة لوجود العديد من المسائل المفتوحة حول تابع زيتا الريماني، فإن إيجاد تقريب لتابع زيتا الريماني بتابع مألوف يُعدّ خطوة هامة في معرفة خصائص التابع في المستوي العقدي وبشكل خاص عند المستقيم الحرج.

3_تعاريف ومفاهيم أساسية:

3_1_تابع زيتا الريماني [2]

يُعرف تابع زيتا الريماني أو تابع إيتا ديرخليه كما يلي:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad ; s \in \mathbb{C}$$

وتتقارب المتسلسلة بالإطلاق عندما $\mathrm{Re}(s) > 1$.

وتمكن ريمان من تعريف تمديد تحليلي لتابع زيتا على كامل المستوي العقدي ما عدا النقطة $s = 1$ (التي تمثل قطباً بسيطاً لـ ζ) كما يلي:

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left(\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{+\infty}\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right)$$

حيث ϑ هو تابع تيتا جاكوبي المعرف كما يلي:

$$\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi x}$$

وΓ هو تابع غاما العقدي.

والتمديد تابع تحليلي على C مع وجود أقطاب بسيطة عند النقاط الصحيحة غير الموجبة $s = 0, -1, -2, \ldots$.

وأثبت ريمان أيضاً العلاقة التالية:

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s); \quad s \in C/\{1\}$$

والتي تسمى بالمعادلة التابعيّة لتابع زيتا الريماني.

3_2_ أصفار تابع زيتا الريماني [2]

لندرس حلول المعادلة التالية:

$$\zeta(s) = 0\ ;\ s \in C/\{1\}$$

1_اذا كان $\mathrm{Re}(s) > 1$ فإن $\zeta(s) \neq 0$.

2_اذا كان $\mathrm{Re}(s) < 0$، نجد من المعادلة التابعيّة ما يلي:

بما أن $\mathrm{Re}(s) < 0$ فإن $\mathrm{Re}(1-s) > 1$ ومنه $\zeta(1-s) \neq 0$

ولدينا أيضاً $2^s\pi^{s-1}\Gamma(1-s)$ لا تقبل أصفاراً، ومنه:

$$\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow s = -2k \ \ , \ \ k \in N^*$$

ومنه فإن تابع زيتا الريماني ينعدم عند النقاط الزوجية السالبة $-2, -4, -6, -8, \ldots$ وتسمى أصفاراً بديهية لتابع زيتا الريماني لأنها تنتج بسهولة.

3_ من أجل المجال $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$، تم إثبات أن تابع زيتا الريماني لا ينعدم عندما $\mathrm{Re}(s) = 1$ وعندما $\mathrm{Re}(s) = 0$، أما الأصفار المحققة $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ فتُسمى أصفار غير بديهية.

وتُسمى المنطقة $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ بالشريط الحرج والمستقيم $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ بالمستقيم الحرج. وتم اثبات وجود عدد غير منتهٍ من الأصفار للتابع زيتا واقعة على المستقيم الحرج.

3_3_فرضية ريمان

عام 1859 نشر ريمان مقالته [4] حول أصفار التابع زيتا الريماني غير البديهية، وفرض أنها تملك جزءاً حقيقياً يساوي $\frac{1}{2}$. ولكن نتائجه كانت بدون برهان كامل، لذلك سمّيت بفرضية ريمان، وإلى يومنا هذا لا يوجد برهان لهذه الفرضية والتي تُعدّ واحدة من أهم المسائل المفتوحة في الرياضيات وأعقدها على الإطلاق، وهي واحدة من المسائل المفتوحة السبع التي طرحها معهد كلاي عام 2000 فيما سمي بمسائل القرن، وعرض المعهد جائزة ماليّة قدرها مليون دولار أمريكي لمن يتقدم بإثبات لصحة أو عدم صحة فرضية ريمان.

تأتي الأهمية الكبيرة لفرضية ريمان لعلاقتها بتوزيع الأعداد الأولية، أي أن صحة فرضية ريمان تُمكننا من فهم توزيع الأعداد الأولية داخل الأعداد الطبيعية، ولذلك أهمية كبيرة في علم التشفير والاتصالات وأمن المعلومات، بالإضافة إلى تطبيقات تابع زيتا الريماني في فروع أخرى مثل الإحصاء والفيزياء.

3_4_ تقريب تابع زيتا

من أهم خوارزميات التقريب لتابع زيتا الريماني هي خوارزمية Odlyzko–Schonhage والتي تم من خلالها إيجاد اول 10^{13} صفر غير بديهي لتابع زيتا الريماني من قبل العالم غوردون عام 2004 [3]. حيث تم تقريب المستقيم الحرج لتابع زيتا الريماني $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ بتابع مألوف.

عرضت المقالة [1] تقريباً محلياً لتابع زيتا الريماني على الساحة العقدية بمتتالية من التوابع الكسرية كما يلي:

من اجل $m \in \mathbb{N}$ ،عُرفت الحدودية:

$$P_m(t) = (1-t)\left(1-\frac{t}{2}\right)\dots\left(1-\frac{t}{m}\right) = \prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{t}{j}\right)$$

حيث $(-1)^j a_{m,j}$ هي معاملات $P_m(t)$ بعد النشر، حيث $j = 0,\dots m$. أي:

$$P_m(t) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j a_{m,j} t^j$$

وعُرف التابع:

$$F_m(s) = \sum_{j=0}^{m}\frac{a_{m,j}B_j}{s+j-1}$$

حيث B_j هي أعداد برنولي، والتي تُعطى من خلال النشر:

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{B_j}{j!}z^j$$

حيث $B_1 = -\frac{1}{2}$ ، $B_0 = 1$.

وتم تعريف التابع:

$$G_m(s) = \sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j a_{m,j}}{s+j-1}$$

إنّ التقريب الكسري من المرتبة m لتابع زيتا الريماني يُعطى بالعلاقة:

$$Z_m(s) = \frac{F_m(s)}{G_m(s)(s-1)}$$

على سبيل المثال من أجل $m = 5$:

$$F_5(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{137}{120s} + \frac{5}{16(s+1)} - \frac{1}{240(s+3)}$$

$$G_5(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{137}{60s} + \frac{15}{8(s+1)} - \frac{17}{24(s+2)} + \frac{1}{8(s+3)} - \frac{1}{120(s+4)}$$

$$Z_5(s) = \frac{\frac{1}{s-1} - \frac{137}{120s} + \frac{5}{16(s+1)} - \frac{1}{240(s+3)}}{(s-1)\left(\frac{1}{s-1} - \frac{137}{60s} + \frac{15}{8(s+1)} - \frac{17}{24(s+2)} + \frac{1}{8(s+3)} - \frac{1}{120(s+4)}\right)}$$

إن Z_5 هو تقريب لتابع زيتا الريماني من المرتبة 5.

درست المقالة [1] تقارب Z_m من ζ ، وتم اثبات التقارب بانتظام في المنطقة $Re(s) > 0$ (ما عدا النقطة $s = 1$) مع تخمين أن التقارب صحيح على كامل المستوي العقدي.

ويكون $Z_m\left(\frac{1}{2}+it\right)$ تقريباً جيداً لـ $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ في المجال $D_m=\left[-\frac{2}{\pi}\ln m,\frac{2}{\pi}\ln m\right]$.

3_4_1_تعريف تابع التقريب Z_m^n

قامت المقالة [5] بتعديل على تعريف التابع Z_m بإضافة وسيط n كما يلي:

عُرفت حدودية من المرتبة $N=m+n$ كما يلي:

$$P_N(t)=(1-t)\left(1-\frac{t}{2}\right)\dots\left(1-\frac{t}{m+n}\right)=\prod_{j=1}^{m+n}\left(1-\frac{t}{j}\right)$$

ولتكن $(-1)^j a_{m+n,j}$ معاملات $P_N(t)$ ، حيث $j=0,\dots,N$. أي:

$$P_N(t)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^j a_{m,j}t^j$$

وبأخذ أول m معاملاً من معاملات $P_N(t)$. وتعريف التابعين:

$$F_m^n(s)=\sum_{j=0}^{m}\frac{a_{N,j}B_j}{s+j-1}$$

$$G_m^n(s)=\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j a_{N,j}}{s+j-1}$$

$$Z_m^n(s)=\frac{F_m^n(s)}{G_m^n(s)(s-1)}$$

من الواضح أن حيث $Z_m^0(s)=Z_m(s)$.

قارنت المقالة [5] بين التقريب $Z_m^n(s)$ والتقريب $Z_m(s)$ لتابع زيتا الريماني عندما $s=\frac{1}{2}+it$ أي على المستقيم الحرج، وذلك في الفضاء $C[D_m]$، ووجدت بالنتائج العددية ما يلي:

1_ من أجل m مثبتة و n متغيرة ، تناقص الخطأ بازدياد n .

2_ من اجل n مثبتة و m متغيرة، ليس من الضروري تناقص او ازدياد الخطأ بازدياد m .

3_ التعقيد الحسابي والزمن اللازم للحصول على تابع التقريب عند m كبيرة نسبياً و n صغيرة يكون أكبر عند n كبيرة نسبياً و m صغيرة، فمثلاً الزمن اللازم لبناء التابع Z_{100} حاسوبياً هو 845.104217 ثانية. والزمن اللازم لبناء التابع Z_{10}^{15} حاسوبياً هو 0.218402 ثانية. بالإضافة إلى أن الخطأ الناتج عن التقريب باستخدام Z_{100} هو 0.00358 وهو أكبر من الخطأ الناتج عن التقريب باستخدام Z_{10}^{15} ذو القيمة 0.00269، وذلك على المستقيم الحرج.

4_النتائج والمناقشة:

استكمالاً للدراسة والنتائج في المقالة [5]، قمنا بدراسة خطأ التقريب للتابعين:

$$Z_m\left(\frac{1}{2}+it\right) \text{ و } Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

في الفضائين $L^2(D_m)$ و$L^1(D_m)$، ووجدنا نتائج مشابهة للدراسة في الفضاء $C[D_m]$. وتم عرض النتائج في الجدولين (1) و (2).

حيث الجدول (1) يُعطي النتائج في الفضاء $L^2(D_m)$ حيث:

$$\left\|Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)-\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right\|_{L^2(D_m)}=\int_{-\frac{2}{\pi}\ln m}^{\frac{2}{\pi}\ln m}\left(Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)-\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right)^2 dt$$

والجدول (2) يُعطي النتائج في الفضاء $L^1(D_m)$ حيث:

$$\left\|Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)-\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right\|_{L^1(D_m)}=\int_{-\frac{2}{\pi}\ln m}^{\frac{2}{\pi}\ln m}\left|Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)-\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| dt$$

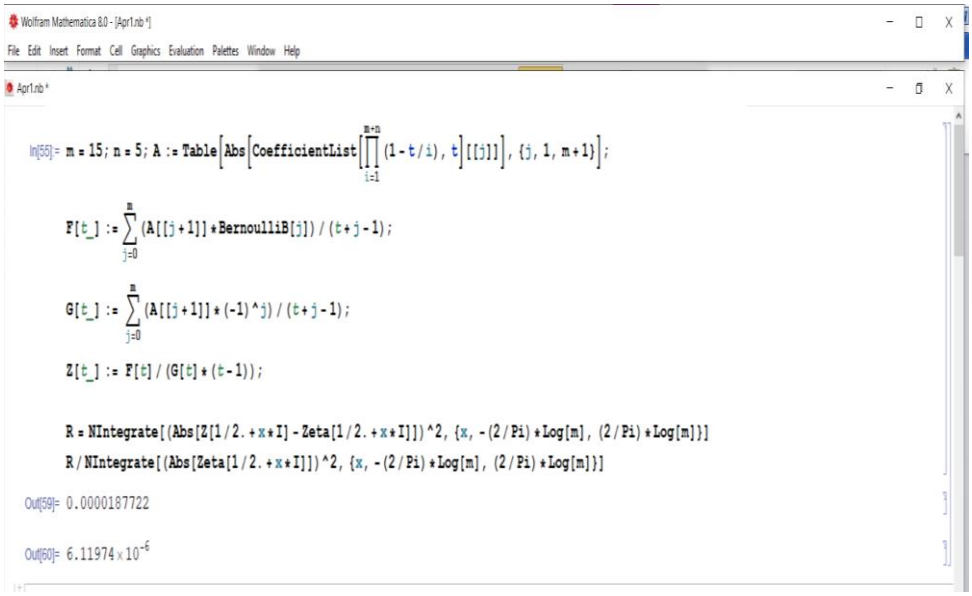
$n=25$	$n=15$	$n=10$	$n=3$	$n=2$	$n=1$	$n=0$	
0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00003	0.00004	0.00006	$m=10$
0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00003	0.00004	0.00005	$m=11$
0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00003	0.00004	0.00005	$m=12$
0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00003	0.00003	0.00004	$m=13$

0.00000	0.00000	0.00001	0.00002	0.00003	0.00003	0.00004	$m=14$
0.00000	0.00000	0.00001	0.00002	0.00002	0.00003	0.00004	$m=15$
0.00000	0.00000	0.00001	0.00002	0.00002	0.00003	0.00003	$m=16$
0.00000	0.00000	0.00001	0.00002	0.00002	0.00003	0.00003	$m=17$
0.00000	0.00000	0.00001	0.00002	0.00002	0.00002	0.00003	$m=18$
0.00000	0.00000	0.00001	0.00002	0.00002	0.00002	0.00003	$m=19$
0.00000	0.00000	0.00001	0.00002	0.00002	0.00002	0.00003	$m=20$
0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00002	0.00002	0.00002	$m=25$

0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002	0.00002	$m=30$
0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	$m=50$
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	$m=100$

الجدول (1) [القيم مُقربة لأقرب سبع منازل عشرية بعد الفاصلة]

وتم حساب القيم في الجدول (1) و (4) من خلال المقطع البرمجي التالي:

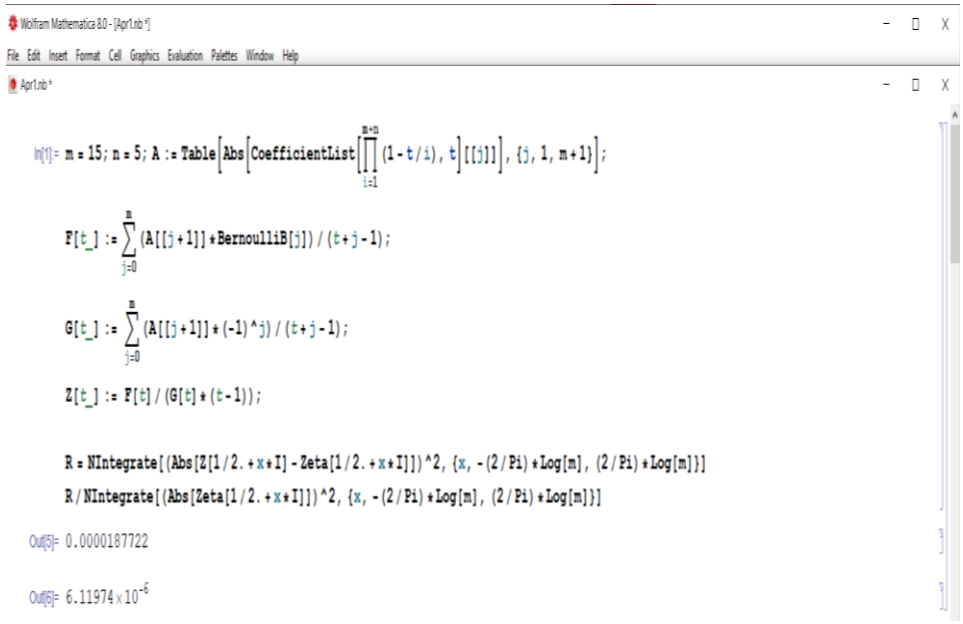


$n=25$	$n=15$	$n=10$	$n=3$	$n=2$	$n=1$	$n=0$	
0.00227	0.00331	0.00448	0.00812	0.00907	0.01023	0.01168	$m=10$
0.00214	0.00342	0.00460	0.00806	0.00893	0.00997	0.01124	$m=11$
0.00232	0.00356	0.00472	0.00799	0.00878	0.00972	0.01086	$m=12$
0.00242	0.00367	0.00481	0.00791	0.00864	0.0095	0.01051	$m=13$
0.00252	0.00377	0.00488	0.00782	0.00850	0.00928	0.01020	$m=14$
0.00261	0.00385	0.00494	0.00774	0.00836	0.00908	0.00992	$m=15$
0.00269	0.00393	0.00499	0.00765	0.00823	0.00890	0.00966	$m=16$
0.00276	0.004	0.00503	0.00756	0.00811	0.00873	0.00943	$m=17$
0.00283	0.00405	0.00506	0.00748	0.00799	0.00856	0.00921	$m=18$
0.00290	0.00410	0.00509	0.00739	0.00787	0.00841	0.00901	$m=$

							19
0.00296	0.00415	0.00511	0.00731	0.00776	0.00827	0.00883	$m = 20$
0.00319	0.00430	0.00515	0.00694	0.00728	0.00766	0.00807	$m = 25$
0.00336	0.00438	0.00512	0.00662	0.00689	0.00719	0.00751	$m = 30$
0.00364	0.00439	0.00487	0.00573	0.00587	0.00602	0.00618	$m = 50$
0.00364	0.00405	0.00429	0.00466	0.00472	0.00478	0.00484	$m = 100$

الجدول (2) [القيم مُقربة لأقرب ست منازل عشرية بعد الفاصلة]

وتم حساب القيم في الجدول (2) و (5) من خلال المقطع البرمجي التالي:



من الجدول (1) و (2) نستنتج:

1_ من أجل m مثبتة و n متغيرة ، تناقص الخطأ بازدياد n .

2_ من اجل n مثبتة و m متغيرة، ليس من الضروري تناقص او ازدياد الخطأ بازدياد m .

ومنه نستنتج أن التقريب $Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)$ يُعطي نتائج أفضل من $Z_m\left(\frac{1}{2}+it\right)$ عند تثبيت مرتبة التقريب في الفضائين $L^2(D_m)$ و $L^1(D_m)$. وهذه نتائج مطابقة لما وجدته المقالة [5] بدراستها في الفضاء $C(D_m)$.

4_1_ مقارنة قيم الخطأ في الفضاءات $L^2(D_m)$ و$L^1(D_m)$ و $C(D_m)$.

قمنا بدراسة الخطأ النسبي لتقريب التابع $Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)$ من تابع زيتا الريماني على المستقيم الحرج $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ في الفضاءات $L^2(D_m)$ و $L^1(D_m)$ و $C(D_m)$، وذلك بهدف المقارنة ومعرفة الفضاء الذي يحقق عنده التقريب $Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)$ الخطأ الأقل. وعرضنا النتائج في الجداول التالية:

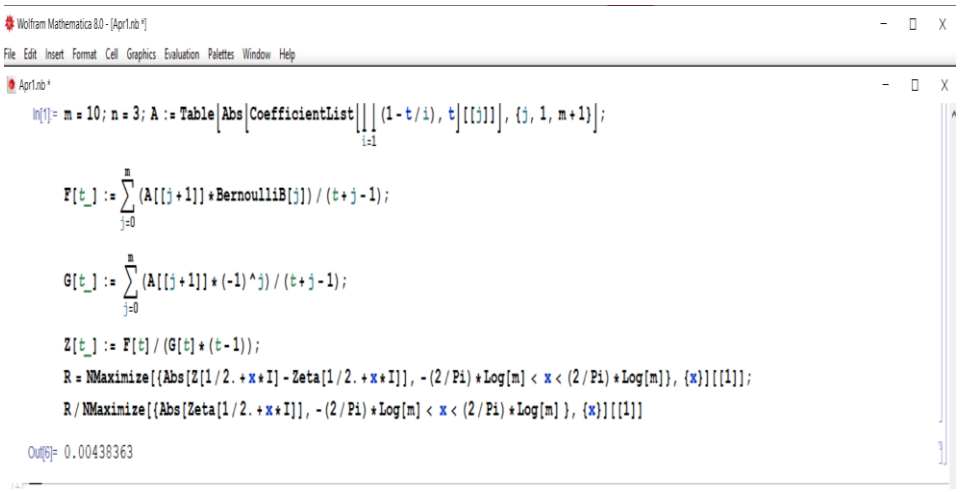
الجدول (3) يُعطي قيم الخطأ النسبي في الفضاء $C(D_m)$، والجدول (4) يُعطي قيم الخطأ النسبي في الفضاء $L^2(D_m)$، والجدول (5) يُعطي قيم الخطأ النسبي في الفضاء $L^1(D_m)$.

$n = 25$	$n = 15$	$n = 10$	$n = 3$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 0$	
0.00125	0.00183	0.002466	0.00438	0.00487	0.00547	0.00620	$m = 10$
0.00119	0.00188	0.00251	0.00430	0.00475	0.00528	0.00592	$m = 11$
0.00127	0.00194	0.002547	0.00423	0.00463	0.00511	0.00567	$m = 12$
0.00132	0.00198	0.002577	0.00416	0.00453	0.00495	0.00546	$m = 13$
0.00136	0.00202	0.00251	0.00409	0.00443	0.00482	0.00527	$m = 14$
0.00140	0.00205	0.002617	0.00402	0.00434	0.00469	0.00510	$m = 15$
0.00144	0.00208	0.002631	0.00396	0.00425	0.00458	0.00495	$m = 16$
0.00147	0.00211	0.002641	0.00390	0.00417	0.00448	0.00482	$m = 17$
0.00151	0.00213	0.002648	0.00385	0.00410	0.00438	0.00470	$m = 18$

0.00153	0.00215	0.002653	0.00379	0.00403	0.00429	0.00459	$m = 19$
0.00156	0.00217	0.002656	0.00374	0.00396	0.00421	0.00448	$m = 20$
0.00167	0.00222	0.002648	0.00352	0.00369	0.00387	0.00407	$m = 25$
0.00174	0.00225	0.002621	0.00335	0.00348	0.00362	0.00378	$m = 30$
0.00186	0.00223	0.002472	0.00288	0.00295	0.00303	0.00310	$m = 50$
0.00186	0.00206	0.002184	0.00236	0.00239	0.00242	0.00245	$m = 100$

الجدول (3) [القيم مُقربة لأقرب ست منازل عشرية بعد الفاصلة]

حيث تم حساب القيم في الجدول (3) من خلال المقطع البرمجي التالي:



$n = 25$	$n = 15$	$n = 10$	$n = 3$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 0$	
0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002	$m = 10$
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	$m = 11$
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	$m = 12$
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	$m = 13$
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	$m = 14$
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00001	$m =$

15							
$m = 16$	0.00001	0.00001	0.00009	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$m = 17$	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00007	0.00000	0.00000
$m = 18$	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$m = 19$	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$m = 20$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$m = 25$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$m = 30$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$m = 50$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$m = 10$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

الجدول(4) [التقريب لأقرب سبع منازل عشرية بعد الفاصلة]

$n=25$	$n=15$	$n=10$	$n=3$	$n=2$	$n=1$	$n=0$	
0.00081	0.00118	0.00160	0.00290	0.00324	0.00366	0.00418	$m=10$
0.00074	0.00119	0.00160	0.00281	0.00311	0.00348	0.00392	$m=11$
0.00079	0.00121	0.00161	0.00272	0.00299	0.00332	0.00370	$m=12$
0.00081	0.00122	0.00160	0.00264	0.00289	0.00317	0.00351	$m=13$
0.00082	0.00124	0.00160	0.00257	0.00279	0.00305	0.00335	$m=14$
0.00084	0.00124	0.00159	0.00250	0.00270	0.00293	0.00320	$m=15$
0.00085	0.00125	0.00159	0.00243	0.00262	0.00283	0.00307	$m=16$
0.00087	0.00125	0.00158	0.00237	0.00254	0.00274	0.00296	$m=17$
0.00088	0.00125	0.00157	0.00232	0.00248	0.00265	0.00286	$m=18$
0.00089	0.00126	0.00156	0.00226	0.00241	0.00258	0.00276	$m=19$

0.00089	0.00126	0.00155	0.00221	0.00235	0.00250	0.00268	$m = 20$
0.00092	0.00124	0.00149	0.00201	0.00211	0.00222	0.00234	$m = 25$
0.00094	0.00122	0.00143	0.00185	0.00193	0.00201	0.00210	$m = 30$
0.00093	0.00112	0.00124	0.00146	0.0015	0.00153	0.00157	$m = 50$
0.00083	0.00092	0.00097	0.00106	0.00107	0.00109	0.00110	100

الجدول (5) [التقريب لأقرب ست منازل عشرية بعد الفاصلة]

نلاحظ من الجداول (3) و(4) و(5) أن الخطأ النسبي لتقريب التابع $Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)$ من التابع $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ في الفضاء $L^2(D_m)$ هو الأقل، يليه الفضاء $L^1(D_m)$ ثم الفضاء $C(D_m)$، أي أن تقريب التابع $Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)$ من التابع $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ هو الأفضل في الفضاء $L^2(D_m)$ من بين الفضاءات $C(D_m)$ و $L^2(D_m)$ و $L^1(D_m)$.

5_الاستنتاجات:

1) التقريب $Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)$ يُعطي أيضاً نتائج أفضل من $Z_m\left(\frac{1}{2}+it\right)$ عند تثبيت مرتبة التقريب في الفضائين $L^2(D_m)$ و $L^1(D_m)$.
2) الخطأ النسبي لتقريب التابع $Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)$ من التابع $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ في الفضاء $L^2(D_m)$ هو الأقل من بين الفضاءات $C(D_m)$ و $L^2(D_m)$ و $L^1(D_m)$.

REFERENCES

[1] Ball, K., 2017. Rational approximations to the zeta function. *arXiv preprint arXiv:1706.07998*.

[2] Borwein, P., Choi, S., Rooney, B. and Weirathmueller, A. eds., 2008. *The Riemann hypothesis: a resource for the afficionado and virtuoso alike* (Vol. 27). Springer Science & Business Media.

[3] Menici, L. and Pappalardi, F., 2012. Zeros of the Riemann Zeta-function on the critical line. *A* thesis, Universit_adegliStudi Roma tre, Rome, Italy.

[4] *Riemann, B., 1859. On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity.(Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.). Monatsberichte der Berliner Akademie.*

[5] الاء أبو العينين و محمد الشيخ و محمد نور شمهّ، (2020)، تقريب كسري معدل لتابع زيتا الريماني، مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية مجلد 36 عدد1.