بصريات الحبيبات الصغيرة

تبعثر Mie

إعداد:

د. حيدر حسن المصطفى (*)

(*) قسم الفيزياء، كلية العلوم، جامعة حمص

الملخص:

يتضمن البحث دراسة مفصلة وبشكلٍ موجز لنظرية Mie (نظرياً وحسابياً)، التي تعتبر الأساس لحساب معاملات التبعثر والامتصاص للحبيبات الكروية ذات نصف قطر وقرينة انكسار معلومين. والهدف منه إعطاء توصيف واضح ومكتفي ذاتياً لنظرية Mie. هذه النظرية المشهورة مُناسبة لحساب المقاطع العرضية البصرية (الكفاءات) بدقة للحبيبات الكروية، والتي حساباتها تكون مطلوبة من أجل تشكيلة واسعة من التطبيقات البصرية.

أُنجزت خوارزميات الحسابات العددية لهذه النظرية باستخدام برنامج MATHCAD بهدف الحصول على قيم معاملات التبعثر والكفاءات البصرية المُقابلة لها بدقة وموثوقية عالية.

الكلمات المفتاحية:

نظرية Mie، التأثير المتبادل (اشعاع–مادة)، تطبيقات بصرية، معاملات التبعثر والامتصاص، قرينة انكسار، مقاطع عرضية، حبيبات كروية، بصريات الغلاف الجوي.

Optics of a Small Particle

Mie Scattering

H. AL Mustafa (*)
(*) Department of Physics, Homs University.

Abstract:

This research includes a detailed and brief study of the Mie theory (theoretically and arithmetically), which is considered the base of calculating the scattering and absorption coefficients of the spherical particles, whose radius and refractive index are known. The aim of this research is giving a clear and self-sufficient description of Mie theory. This famous theory is suitable for accurately calculating the optical cross sections (the efficiency) of spherical particle. These calculations are required for a wide range of optical applications.

The algorithms of the numerical calculations of this theory had been made by using MATHCAD program in order to get accurately and highly reliable values of the scattering and absorption coefficients and the corresponding optical efficiency.

Key Words:

Mie theory, Interaction (radiation-material), Optical applications., Scattering and absorption coefficients, Refractive index, Section cross, Spherical particles, Atmosphere optics.

مشكلة وأهمية البحث:

تبعثر الإشعاع الكهرومغناطيسي من حُبيبات كروية صغيرة والمدعو بتبعثر Mie، يتطلب حسابات التي من الممكن أن تصبح طويلة وحتى مُستحيلة وبالأخص في حال تضمنت دوال Mie ممانعات الوسط العقدية (السماحيات الكهربائية والنفاذية المغناطيسية)، بنفس الوقت مثل هكذا حسابات تكون مطلوبة من أجل تشكيلة واسعة من التطبيقات البصرية، حيث تشمل حسابات تبعثر Mie كامل مجال بصريات الغلاف الجوي. مجال التطبيقات من نهاية واحدة للطيف الكهرومغناطيسي إلى أخرى، من إشعاع UV الشمسي المُبعثر بوساطة رذاذ طبقة الأوزون إلى الأقمار الاصطناعية عبر الاشعاع المرئي وأشعة IR المُتبعثرة بوساطة الغيوم والرذاذ إلى الأمواج الميكروية والرادارية المُبعثرة من تكثفات بخار الماء الكبيرة (الخصائص الاشعاعية لهطول الأمطار (الترسيبات بشكل عام)) {6-4}.

مُقدمة:

في عام 1908، طور Gustav Mie نظرية في محاولة لفهم الألوان المختلفة في سلوك التبعثر والامتصاص الظاهرة بالحبيبات الغروية الصغيرة للذهب العالقة في الماء. بنفس الوقت تقريباً درسَ Peter Debye مسألة ضغط الاشعاع المطبق على الحبيبات الصغيرة في الفراغ. التطبيقات الأولى لهذه النظرية هي مسألة الفيزياء الفلكية التي تحمل في مضمونها التوصل إلى حل لمسألة الغلاف الكروي (sphere problem) {1}.

في الوقت الحالي، تعتبر نظرية التبعثر الكهرطيسي لغلاف كروي والمدعوة بنظرية Mie النظرية التي تزودنا بالطريقة العملية الوحيدة لحساب خصائص تبعثر الضوء للحبيبات المحددة بحجم وقرينة انكسار اختيارية.

معاملات Mie للحبيبات الكروية المتجانسة {1-6}:

بافتراض وجود حُبيبة كروية مغناطيسية، خصائص أوساطها مُيزت بالمقدارين $mu1 = \mu_1/\mu$ و $eps1 = \varepsilon_1/\varepsilon$ ، حيث ε و μ: السماحية الكهربائية والنفاذية المغناطيسية للوسط المحيط، بينما ε_1 و μ_1: وسطاء السماحية الكهربائية والنفاذية المغناطيسية للحبيبة الكروية. من أجل حبيبات كروية غير مغناطيسية (أي $\mu_1 = \mu$) ينتج عن ذلك وسيط وسط وحيد وبالتالي قرينة الانكسار m نسبةً إلى الوسط المحيط. هذه الحبيبة مُنارة (مُضاءة) بموجة مستوية طول الموجة لها λ.

الوسطاء الأساسية لحسابات Mie هي معاملات a_n ، b_n لحساب سعات الحقل المُبعثر، و c_n ، d_n لحساب سعات الحقل الداخلي على التوالي. هذه المعاملات تكون معطاة في المرجع BH{1}.

أولاً: معاملات الحقل الكهربائي المُبعثر:

$$a_n = \frac{\mu m^2 j_n(mx)[xj_n(x)]' - \mu_1 j_n(x)[mxj_n(mx)]'}{\mu m^2 j_n(mx)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x)[mxj_n(mx)]'}$$

$$b_n = \frac{\mu_1 j_n(mx)[xj_n(x)]' - \mu j_n(x)[mxj_n(mx)]'}{\mu_1 j_n(mx)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu h_n^{(1)}(x)[mxj_n(mx)]'}$$

تعني (′) في نهاية القوس الاشتقاق بالنسبة للمتغير المركب وكذلك الأمر بالنسبة لصياغات المعاملات للحقل الداخلي (كما هو موضح لاحقاً). الدليل n يتراوح من $(\infty - 1)$، لكن يمكن اقتطاع السلسلة اللانهائية الحاصلة في صبغ Mie عند الحد الأعظمي n_{max}، لهذا العدد Bohren و Huffman (1983) اقترحوا:

$$n_{\max} = x + 4x^{1/3} + 2$$

وهذه القيمة استخدمت في هذا البحث أيضاً، وسيط الحجم أُعطيَ بالعلاقة $x = ka$، حيث a: نصف قطر الحبيبة الكروية و $k = 2\pi/\lambda$ العدد الموجي، λ طول الموجة في الوسط المحيط، $m = (\varepsilon_1\mu_1)^{1/2}/(\varepsilon\mu)^{1/2}$ قرينة الانكسار بالنسبة للوسط المحيط وعلاقتها بنسب الممانعة بين داخل وخارج الحبيبة الكروية.

الدوال $j_n(z)$ و $y_n(z)$ هي دوال بيسِّل الكروية من المرتبة n، ودوال هانكل الكروية هي تراكيب خطية ل j_n، y_n. النوع الأول المطلوب أُعطيَ بالصياغة التالية:

$$h_n^{(1)} = j_n(z) + iy_n(z)$$

والمتغير المعطى mx أو $z = x$ على التوالي. المشتقات تُنتج دوال بيسِّل الكروية نفسها وهي:

$$[zj_n(z)]' = zj_{n-1}(z) - nj_n(z);\ [zh_n^{(1)}(z)]' = zh_{n-1}^{(1)}(z) - nh_n^{(1)}(z)$$

توجد علاقات بين دوال بيسِّل الكروية وبيسِّل الاسطوانية وهي:

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+0.5}(z)$$

$$y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{n+0.5}(z)$$

هنا J_ν، Y_ν: دوال بيسِّل من النوع الأول والثاني، من أجل $n = 0$ و $n = 1$ أعطيت دوال بيسِّل الكروية ببساطة بالصياغات التالية [BH, p. 87]:

$$j_0(z) = \sin z / z; \quad j_1(z) = \sin z / z^2 - \cos z / z$$
$$y_0(z) = -\cos z / z; \quad y_1(z) = -\cos z / z^2 - \sin z / z$$

ويمكن استعمال الصيغة الرياضية التكرارية التالية للحصول على الرتب الأعلى:

$$f_{n-1}(z) + f_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{z} f_n(z)$$

حيث: f_n أي دالة من الدوال j_n، y_n.

ثانياً: معاملات الحقل الداخلي:

تُعطى معاملات الحقل الداخلي التي تتضمن التأثيرات المغناطيسية بالصياغات الرياضية التالية:

$$c_n = \frac{\mu_1 j_n(x)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x)[xj_n(x)]'}{\mu_1 j_n(mx)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu h_n^{(1)}(x)[mxj_n(mx)]'}$$

$$d_n = \frac{\mu_1 m j_n(x)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 m h_n^{(1)}(x)[xj_n(x)]'}{\mu m^2 j_n(mx)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x)[mxj_n(mx)]'}$$

الحساب لكفاءات Mie {1,3-6}:

الكفاءات Q_i لتبادل التأثير للإشعاع مع حبيبة كروية نصف قطرها a هي المقاطع العرضية σ_i (رُمزت C_i في المرجع BH) المستنظمة على المقطع العرضي الهندسي للحبيبة $\sigma_g = \pi a^2$، حيث تُشير i إلى الأخماد $(i = ext)$ والامتصاص $(i = abs)$ والتبعثر $(i = sca)$ والتشتت الخلفي $(i = b)$ وضغط الاشعاع $(i = pr)$، والتي دُعيت في بعض الدراسات التطبيقية بالمعاملات الطيفية الفعلية للحالة (التبعثر، الامتصاص، ...الخ)

وبالتالي:

$$Q_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_g}$$

يتطلب انحفاظ الطاقة بأن:

$$Q_{ext} = Q_{sca} + Q_{abs}, \quad \text{or} \quad \sigma_{ext} = \sigma_{sca} + \sigma_{abs}$$

تنتج كفاءة التبعثر Q_{sca} من تكامل الاستطاعة المُبعثرة على جميع الاتجاهات، وتنتج كفاءة الإخماد Q_{ext} من مبرهنة التخامد، والتي دُعيت أيضاً بمبرهنة التشتت الأمامي والتي تؤدي إلى:

$$Q_{sca} = \frac{2}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

$$Q_{ext} = \frac{2}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\,\mathrm{Re}(a_n + b_n)$$

تنتج كفاءة الامتصاص Q_{abs} من العلاقة السابقة. جميع المتسلسلات الا نهائية من الممكن اقتطاعها بعد حدود n_{max} . علاوةً على ذلك، يُشير وسيط اللاتناظر $g = \langle \cos\theta \rangle$ إلى $cosine$ الوسطية لزاوية التبعثر θ بالنسبة للاستطاعة. التي تكون مُستخدمة على سبيل المثال في نماذج التيارين (الجريانين) (Two-Stream Models {7}) والتي تكون مرتبطة بكفاءة ضغط الاشعاع Q_{pr} وفق العلاقة التالية:

$$Q_{pr} = Q_{ext} - Q_{sca}\langle \cos\theta \rangle$$

$$Q_{sca}\langle \cos\theta \rangle = \frac{4}{x^2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{n+1}\mathrm{Re}(a_n a_{n+1}^* + b_n b_{n+1}^*) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\mathrm{Re}(a_n b_n^*)\right\}$$

وأخيراً، كفاءة التشتت الخلفي Q_b تكون معطاة بالعلاقة التالية:

$$Q_b = \frac{1}{x^2}\left|\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(-1)^n(a_n - b_n)\right|^2$$

النتائج والمناقشة:

شُكلت خوارزمية الحساب العددي وفقاً لبرنامج MATHCAD، كمايلي:

أولاً: تحديد الثوابت واستدعاء لدوال بيسِّل الكروية وتحديد لدوال هانكل الكروية ومشتقاتهم:

$$i := \sqrt{-1}$$

$$mu1 := 1$$

$$x := 1$$

$$mc := 1000 + 600i$$

$$mc = 1 \times 10^3 + 600i$$

$$nmax(x) := round\left[x + \left(4 \cdot x^{\frac{1}{3}}\right) + 2\right]$$

$$z(x) := mc \cdot x$$

$$nmax(x) = 7$$

$$n := 1, 2 .. nmax(x)$$

$$jx(n, x) := js(n, x)$$

$$yx(n, x) := ys(n, x)$$

$$hx(n, x) := jx(n, x) + i \cdot yx(n, x)$$

$$jz(n, x) := js(n, z(x))$$

$$yz(n, x) := ys(n, z(x))$$

$$hz(n, x) := jz(n, z(x)) + i \cdot yz(n, z(x))$$

$$djx(n,x) := (x \cdot jx(n-1,x)) - (n \cdot jx(n,x))$$

$$djz(n,x) := (z(x) \cdot jz(n-1,x)) - (n \cdot jz(n,x))$$

$$dhx(n,x) := (x \cdot hx(n-1,x)) - (n \cdot hx(n,x))$$

$$dhz(n,x) := (z(x) \cdot hz(n-1,x)) - (n \cdot hz(n,x))$$

ثانياً: تحديد قيم معاملات Mie والكفاءات البصرية من أجل حبيبة كروية متجانسة شبه معدنية غير مغناطيسية (أي $\mu_1 = \mu$)، وسيط الحجم $x = 1$، ومجال $n = (1-7)$ وفقاً للتسلسل التالي:

$$an(n,x) := \frac{\left(mc^2 \cdot jz(n,x) \cdot djx(n,x)\right) - (mul \cdot jx(n,x) \cdot djz(n,x))}{\left(mc^2 \cdot jz(n,x) \cdot dhx(n,x)\right) - (mul \cdot hx(n,x) \cdot djz(n,x))}$$

+

$$bn(n,x) := \frac{(mul \cdot jz(n,x) \cdot djx(n,x)) - (jx(n,x) \cdot djz(n,x))}{(mul \cdot jz(n,x) \cdot dhx(n,x)) - (hx(n,x) \cdot djz(n,x))}$$

$$cn(n,x) := \frac{(mul\, jx(n,x) \cdot dhx(n,x)) - (mul \cdot hx(n,x) \cdot djx(n,x))}{(mul\, jz(n,x) \cdot dhx(n,x)) - (hx(n,x) \cdot djz(n,x))}$$

$$dn(n,x) := \frac{(mul \cdot jx(n,x) \cdot dhx(n,x)) - (mul \cdot hx(n,x) \cdot djx(n,x))}{(jz(n,x) \cdot dhx(n,x)) - (mul \cdot hx(n,x) \cdot djz(n,x))}$$

$$an(n,1) = \begin{pmatrix} 0.2926 - 0.4542i \\ 9.4485 \times 10^{-4} - 0.0304i \\ 9.1438 \times 10^{-7} - 7.5607i \times 10^{-4} \\ 4.0178 \times 10^{-9} - 1.1412i \times 10^{-5} \\ 3.084 \times 10^{-11} - 1.1226i \times 10^{-7} \\ 1.7795 \times 10^{-13} - 7.7196i \times 10^{-10} \\ -3.9127i \times 10^{-12} \end{pmatrix}$$

$$bn(n,1) = \begin{pmatrix} 0.0456 + 0.2077i \\ 3.513 \times 10^{-4} + 0.0172i \\ 2.9391 \times 10^{-6} + 5.3955i \times 10^{-4} \\ 5.7572 \times 10^{-8} + 8.9204i \times 10^{-6} \\ 7.3295 \times 10^{-10} + 9.217i \times 10^{-8} \\ 6.1781 \times 10^{-12} + 6.5401i \times 10^{-10} \\ 3.7046 \times 10^{-14} + 3.388i \times 10^{-12} \end{pmatrix}$$

$$cn(n,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dn(n,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

تم مقارنة قيم هذه المعاملات مع القيم المرجعية (6) والمحسوبة من قبل المرجع باستخدام برنامج MATHLAB (دون ذكر تفاصيل عن الخوارزمية المستخدمة في حسابات دوال MATHLAB)، وكانت القيم المحسوبة لمعاملات Mie والكفاءات البصرية في هذا البحث مطابقة تماماً لقيمه.

$$Qsca := \left(\frac{2}{x^2}\right)\cdot\sum_{n=1}^{nmax(x)}\left[(2\cdot n+1)\cdot\left[\left(|an(n,x)|\right)^2+\left(|bn(n,x)|\right)^2\right]\right]$$

$Qsca = 2.0349$

$$Qext := \left(\frac{2}{x^2}\right)\cdot\sum_{n=1}^{nmax(x)}\left[(2\cdot n+1)\cdot Re(an(n,x)+bn(n,x))\right]$$

$Qext = 2.0424$

$Qabs := Qext - Qsca$

$Qabs = 7.4366\times10^{-3}$

$$Qp := \left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left[\left|\sum_{n=1}^{nmax(x)}\left[(2\cdot n+1)\cdot(-1)^n\cdot(an(n,x)-bn(n,x))\right]\right|\right]^2$$

$Qp = 3.6314$

$$Qp := \left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left[\left|\sum_{n=1}^{nmax(x)}\left[(2\cdot n+1)\cdot(-1)^n\cdot(an(n,x)-bn(n,x))\right]\right|\right]^2$$

$Qp = 3.6314$

$$Qscos := \left(\frac{4}{x^2\cdot Qsca}\right)\cdot\left[\left|\sum_{n=1}^{nmax(x)}\left[\left[\frac{n\cdot(n+2)}{n+1}\right]\cdot Re\left[\left(an(n,x)\cdot\overline{an(n+1,x)}\right)+\left(bn(n,x)\cdot\overline{bn(n+1,x)}\right)\right]\right]+\sum_{n=1}^{nmax(x)}\left[\left[\frac{(2\cdot n)+1}{n\cdot(n+1)}\right]\cdot Re\left(an(n,x)\cdot\overline{bn(n,x)}\right)\right]\right|$$

$Qscos = -0.1875$

$Qpr := Qext - Qscos$

$Qpr = 2.2298$

$$Qpsca := \frac{Qp}{Qsca}$$

$Qpsca = 1.7845$

ثالثاً: تحديد قيم معاملات Mie والكفاءات البصرية المقابلة لها من أجل حبيبة كروية متجانسة شفافة غير مغناطيسية (أي $\mu_1 = \mu$)، وسيط الحجم $x = 1$، ومجال $n = (1 - 7)$ وفقاً التسلسل السابق (التغير فقط بقيم الدخل: وسيط الحجم وقرينة الانكسار العقدية):

$$i := \sqrt{-1} \qquad x := 1 \qquad mul := 1$$

$$mc := 2 - 0.2i$$

$$mc = 2 - 0.2i \qquad nmax(x) := round\left[x + \left(\frac{1}{4 \cdot x^{3}}\right) + 2\right]$$

$$z(x) := mc \cdot x \qquad nmax(x) = 7$$

$$n := 1, 2 .. nmax(x)$$

$$jx(n, x) := js(n, x)$$

$$yx(n, x) := ys(n, x)$$

$$an(n, 1) = \begin{pmatrix} 0.0754 - 0.3761i \\ -2.0694 \times 10^{-3} - 0.0178i \\ -5.3405 \times 10^{-5} - 4.4832i \times 10^{-4} \\ -7.7758 \times 10^{-7} - 6.7856i \times 10^{-6} \\ -7.495 \times 10^{-9} - 6.685i \times 10^{-8} \\ -5.0918 \times 10^{-11} - 4.6031i \times 10^{-10} \\ -2.5604 \times 10^{-13} - 2.336i \times 10^{-12} \end{pmatrix} \qquad bn(n, 1) = \begin{pmatrix} -0.0304 - 0.0888i \\ -6.2277 \times 10^{-4} - 1.9466i \times 10^{-3} \\ -8.7304 \times 10^{-6} - 2.9446i \times 10^{-5} \\ -8.402 \times 10^{-8} - 2.932i \times 10^{-7} \\ -5.7437 \times 10^{-10} - 2.0406i \times 10^{-9} \\ -2.9107 \times 10^{-12} - 1.0452i \times 10^{-11} \\ -1.134 \times 10^{-14} - 4.1002i \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

$$cn(n, 1) = \begin{pmatrix} 0.9842 - 0.026i \\ 0.3417 + 0.0369i \\ 0.1494 + 0.0361i \\ 0.0681 + 0.025i \\ 0.0313 + 0.0155i \\ 0.0144 + 9.1353i \times 10^{-3} \\ 6.5308 \times 10^{-3} + 5.1802i \times 10^{-} \end{pmatrix} \qquad dn(n, 1) = \begin{pmatrix} 0.984156 - 0.02599i \\ 0.341682 + 0.036858i \\ 0.149399 + 0.036146i \\ 0.068104 + 0.025027i \\ 0.031313 + 0.015548i \\ 0.014361 + 9.135318i \times 10^{-3} \\ 6.530843 \times 10^{-3} + 5.180158i \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$Qsca := \left(\frac{2}{x^2}\right) \cdot \sum_{n=1}^{nmax(x)} \left[(2 \cdot n + 1) \cdot \left[\left(|an(n,x)|\right)^2 + \left(|bn(n,x)|\right)^2\right]\right]$$

$$Qsca = 0.9388$$

$$Qext := \left(\frac{2}{x^2}\right) \cdot \sum_{n=1}^{nmax(x)} \left[(2 \cdot n + 1) \cdot Re(an(n,x) + bn(n,x))\right]$$

$$Qext = 0.2423$$

$$Qabs := Qext - Qsca$$

$$Qabs = -0.6965$$

$$Qp := \left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left[\left|\sum_{n=1}^{nmax(x)} \left[(2 \cdot n + 1) \cdot (-1)^n \cdot (an(n,x) - bn(n,x))\right]\right|\right]^2$$

$$Qp = 0.7216$$

$$Qscos := \left(\frac{4}{x^2 \cdot Qsca}\right) \cdot \left[\sum_{n=1}^{nmax(x)} \left[\left[\frac{[n \cdot (n+2)]}{n+1}\right] \cdot Re\left[\left(an(n,x) \cdot \overline{an(n+1,x)}\right) + \left(bn(n,x) \cdot \overline{bn(n+1,x)}\right)\right]\right] + \sum_{n=1}^{nmax(x)} \left[\left[\frac{[(2 \cdot n)+1]}{n \cdot (n+1)}\right] \cdot Re\left(an(n,x) \cdot \overline{bn(n,x)}\right)\right]\right]$$

$$Qscos = 0.2422$$

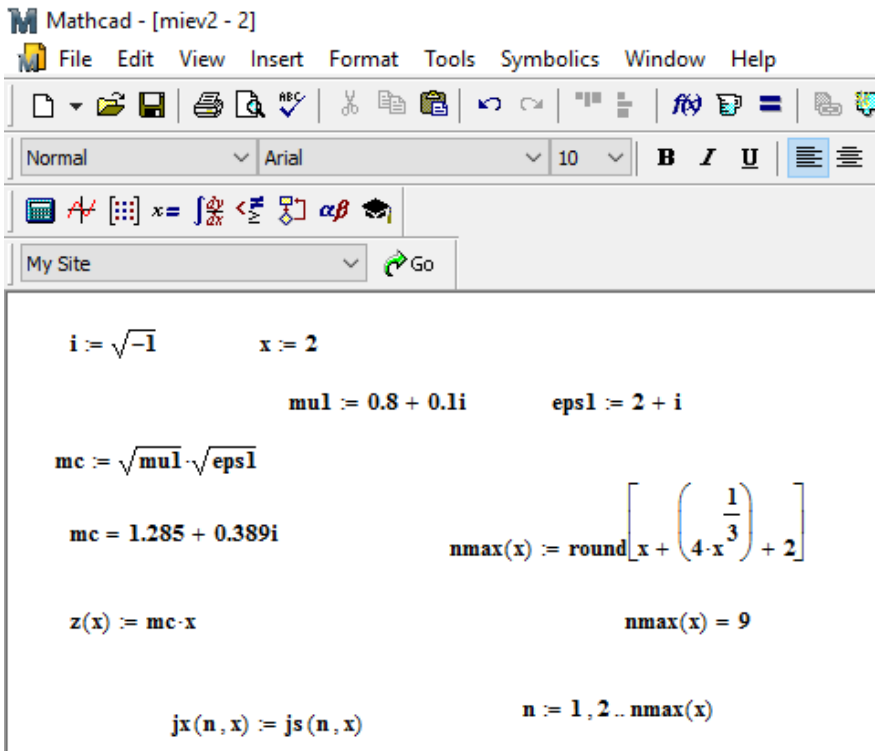
$$Qpr := Qext - Qscos$$

$$Qpr = 1.7626 \times 10^{-4}$$

$$Qpsca := \frac{Qp}{Qsca}$$

$$Qpsca = 0.7687$$

رابعاً: تحديد قيم معاملات Mie والكفاءات البصرية المقابلة لها من أجل حبيبة كروية متجانسة مغناطيسية (أي $\mu_1 \neq \mu$)، الممانعة العقدية وقرينة الانكسار ووسيط الحجم $x = 2$، ومجال $n = (1 - 9)$ موضحة في مدخلات البرنامج كمايلي:


Mathcad - [miev2 - 2]
File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help
Normal Arial 10
My Site Go
i := √-1 x := 2
mul := 0.8 + 0.1i eps1 := 2 + i
mc := √mul·√eps1
mc = 1.285 + 0.389i
nmax(x) := round(x + (1/(4·x^(1/3))) + 2)
z(x) := mc·x
nmax(x) = 9
jx(n, x) := js(n, x)
n := 1, 2 .. nmax(x)

$$an(n,1)=\begin{pmatrix}0.1318-0.1224i\\6.2438\times10^{-3}-9.7569i\times10^{-3}\\1.5364\times10^{-4}-2.7059i\times10^{-4}\\2.3017\times10^{-6}-4.2184i\times10^{-6}\\2.2538\times10^{-8}-4.2181i\times10^{-8}\\1.5457\times10^{-10}-2.9306i\times10^{-10}\\7.8215\times10^{-13}-1.4962i\times10^{-12}\\3.0377\times10^{-15}-5.8479i\times10^{-15}\\0\end{pmatrix}$$

$$bn(n,1)=\begin{pmatrix}0.0371+0.0265i\\1.8454\times10^{-3}+2.0939i\times10^{-3}\\4.667\times10^{-5}+6.3199i\times10^{-5}\\6.9581\times10^{-7}+1.0295i\times10^{-6}\\6.7819\times10^{-9}+1.0552i\times10^{-8}\\4.6393\times10^{-11}+7.447i\times10^{-11}\\2.345\times10^{-13}+3.8423i\times10^{-13}\\1.5132i\times10^{-15}\\0\end{pmatrix}$$

$$cn(n,1)=\begin{pmatrix}0.6684-0.0136i\\0.4684-0.1955i\\0.2813-0.2509i\\0.141-0.2415i\\0.0457-0.2026i\\-0.0124-0.1539i\\-0.0426-0.1066i\\-0.0536-0.0665i\\-0.0527-0.0356i\end{pmatrix}$$

$$dn(n,1)=\begin{pmatrix}0.76272-0.012585i\\0.488589-0.223344i\\0.284682-0.265668i\\0.140313-0.24968i\\0.043967-0.207103i\\-0.01424-0.156241i\\-0.04419-0.107706i\\-0.054821-0.066864i\\-0.053487-0.035609i\end{pmatrix}$$

$$Qsca := \left(\frac{2}{x^2}\right) \cdot \sum_{n=1}^{nmax(x)} \left[(2 \cdot n + 1) \cdot \left[\left(|an(n,x)|\right)^2 + \left(|bn(n,x)|\right)^2\right]\right]$$

$$Qsca = 0.6195$$

$$Qext := \left(\frac{2}{x^2}\right) \cdot \sum_{n=1}^{nmax(x)} \left[(2 \cdot n + 1) \cdot Re(an(n,x) + bn(n,x))\right]$$

$$Qext = 1.8443$$

$$Qabs := Qext - Qsca$$

$$Qabs = 1.2248$$

$$Qp := \left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left[\left|\sum_{n=1}^{nmax(x)} \left[(2 \cdot n + 1) \cdot (-1)^n \cdot (an(n,x) - bn(n,x))\right]\right|\right]^2$$

$$Qp = 0.0525$$

$$Qscos := \left(\frac{4}{x^2 \cdot Qsca}\right) \cdot \left[\sum_{n=1}^{nmax(x)} \left[\frac{[n \cdot (n+2)]}{n+1}\right] \cdot Re\left[an(n,x) \cdot \overline{an(n+1,x)} + bn(n,x) \cdot \overline{bn(n+1,x)}\right]\right] + \sum_{n=1}^{nmax(x)} \left[\frac{[(2 \cdot n)+1]}{n \cdot (n+1)}\right] \cdot Re\left[an(n,x) \cdot \overline{bn(n,x)}\right]$$

$$Qscos = 0.6445$$

$$Qpr := Qext - Qscos$$

$$Qpr = 1.1998$$

$$Qpsca := \frac{Qp}{Qsca}$$

$$Qpsca = 0.0847$$

تمت مقارنة قيم هذه الحالة مع القيم المرجعية للمرجع (6) وكانت مطابقة تماماً كما هو موضح بالجدول (1).

الجدير بالذكر بأن الحسابات المنجزة في هذا العمل باستخدام برنامج MATHCAD (باستعمال دوال MATHCAD) تتميز عن الأعمال المرجعية بسمتين:

الأولى: بأن الأعمال المرجعية (حصرياً مرجع واحد) حددت معاملات Mie والكفاءات البصرية المقابلة لها باستخدام دوال MATHLAB من أجل حبيبات كروية متجانسة شفافة غير مغناطيسية (أي الحالات شبه المعدنية والمغناطيسية لا يمكن حسابها في برامجهم) فعند إدراج قيم الدخل الخاصة بالحالات المغناطيسية وشبه المعدنية يُعطينا بالخرج (*NAN*) وهذا يعود إلى تفاصيل تتعلق بدوال بيسِّل المستخدمة في برامجهم لن ندخل في تفاصيلها الآن.

ثانياً: في الكود المنجز بهذا البحث يُعالج البرنامج هذه الحالات ويعطي قيم الكفاءات البصرية وبدقة عالية عند مقارنتها مع قيم المرجع لدينا، علماً أن المرجع لم يذكر كود دوال MATHLAB في مقالته بل أظهر فقط قيم الخرج لكوده الخاص في حالة الحبيبات الكروية المغناطيسية.

الجدول (1). قيم كفاءات Mie لتبادل الاشعاع مع الحبيبة الكروية للحالات: الشفافة غير مغناطيسية وشبه معدنية غير مغناطيسية والشفافة المغناطيسية مقارنةً بالمرجعية						
كفاءات Mie	من أجل حبيبة كروية متجانسة شفافة غير مغناطيسية		من أجل حبيبة كروية شبه معدنية غير مغناطيسية		من أجل حبيبة كروية متجانسة شفافة مغناطيسية	
قيم الدخل لقرينة الانكسار العقدية ووسيط الحجم	$\begin{cases} mu = 2 - 0.2i \\ x = 1 \end{cases}$		$\begin{cases} mu = 1000 + 600i \\ x = 1 \end{cases}$		$\begin{cases} mu1 = \frac{\mu_1}{\mu} = 0.8 + 0.1i \\ eps1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = 2 + i \\ mu = 1.285 + 0.389i \\ x = 2 \end{cases}$	
قيم الكفاءات	المحسوبة في هذا العمل	المرجعية {5}	المحسوبة في هذا العمل	المرجعية {6}	المحسوبة في هذا العمل	المرجعية {6}
كفاءة التبعثر Q_{sca}	0.9388	0.9388	2.0349	2.0349	0.6195	0.6195
كفاءة الإخماد Q_{ext}	0.2423	0.2423	2.0424	2.0424	1.8443	1.8443
كفاءة الامتصاص Q_{abs}	−0.6965	−0.6965	0.0074	0.0074	1.2248	1.2248
كفاءة التشتت الخلفي Q_p	0.7216	0.7216	3.6314	3.6314	0.0525	0.0525
كفاءة ضغط الاشعاع Q_{pr}	0.00018	0.00018	2.2298	2.2298	1.1998	1.1998

عامل اللاتناظر Q_{scos}	0.2422	0.2422	−0.1875	−0.1875	0.6445	0.6445
عامل العاكسية الطيفية $Q_{psca} = \frac{Q_p}{Q_{sca}}$	0.7687	0.7687	1.7845	1.7845	0.0847	0.0847

الاستنتاجات:

تم في هذا البحث ما يلي:

1 – تم تحديد الصياغات الرياضية الملائمة لنظرية Mie من أجل حساب معاملات التبعثر والامتصاص للحبيبات الكروية المتجانسة ذات نصف قطر وقرينة انكسار معلومين في الحالتين المغناطيسية وغير مغناطيسية.

2 – تحديد قيم معاملات التبعثر والامتصاص والكفاءات (المقاطع) البصرية لهذه الحبيبات باستخدام كود تم تصميمه باستعمال برنامج MATHCAD.

3 – مقارنة قيمنا المحسوبة مع القيم المرجعية وحصول تطابق تام، وهذا يساهم في توثيق البرنامج الذي جرى تصميمه في هذا العمل واعتماده في هكذا مجالات.

يمكن بهذا البرنامج الحصول على قيم الواقع الحقيقي للكفاءات البصرية في حالتي التحديد الدقيق لقيم قرينة الانكسار بتابعيتها لطول الموجة ونصف قطر الحبيبة.

يمكن تمديد العمل في هذا العمل ليشمل الحبيبات المطلية وتحديد معاملات التبعثر والانكسار والكفاءات البصرية المقابلة لها.

References

1. Bohren C.F. and D.R. Huffman, "Absorption and Scattering of Light by Small Particles", John Wiley, New York, NY (1983).
2. Abramowitz M. and I.A. Stegun (eds.), "Handbook of Mathematical Functions", Dover Publication, New York, NY (1965).
3. Guillaume B, " Mie theory for metal nanoparticles " Charg´e de recherche CNRS, Institut Fresnel, Universit´e Aix-Marseille, France (2012).
4. Wiscombe. W.J, "Improved Mie scattering algorithms" Reprinted from Applied Optics, Vol. 19, page 1505, May1, 1980.
5. M*ä*tzler C. "MATLAB Functions for Mie Scattering and Absorption", IAP Res. Rep. No. 02-08, June (2002).
6. M*ä*tzler C. "MATLAB Functions for Mie Scattering and Absorption", Version 2 IAP Res. Rep. No. 02-11, August (2002)
7. Meador W.E. and W.R. Weaver, "Two-Stream Approximations to Radiative Transfer in Planetary Atmospheres: A Unified Description of Existing Methods and a New Improvement", J. Atm. Sciences, Vol. 37,