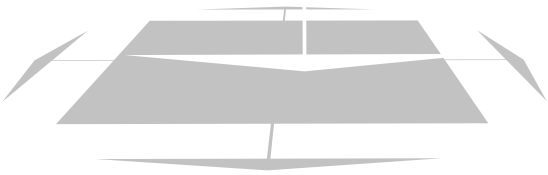
الحقول المتجهة المتقاربة في فضاء ريمان الخاص(K– فضاء) .

Riemannian space



الحقول المتجهة المتقاربة في فضاء ريمان الخاص
(**K**– فضاء) .

اعداد :د. محسن شيحة

ملخص البحث

نعرِّف في هذا البحث، المفاهيم الآتية:

1)- فضاء ريمان (K- **فضاء**)

2)- فضاء ريمان متساوي القياس.

3)- الحقل المتجهي المركزي في K- **فضاء.**

4)- الحقل المتجهي المتقارب في K- **فضاء.**

– نثبت أن أي حقل متجهي مركزي في K- **فضاء** هو حقل متجهي متقارب فيه.

– نوجد مركبات الحقل المتجهي المتقارب في K- **فضاء** ، وذلك بالنسبة لنظام إحداثي مفترض.

كلمات مفتاحية:

فضاء متساوي القياس، حقل مركزي ، حقل متقارب.

***Convergent Vector Fields in spechal RiemanniaSpace* (K-*space*)**

Abstract

In this paper we define:

1)- Riemannian space* K-*space.

2)- Equidistant Riemannian space.

3)- Central vector Fields in* K-*space

4)- Convergent vector Fields in* K-*space

A then We proved that every central vector field, is convergent vector field in* K-*space

In final, find structure of convergent vector field in* K-*space

---

- Key Words:

Equidistant space, central Field, convergent Field.

مقدمة البحث:

تمت دراسة فضاءآت ريمان الخاصة في أعمال متعددة[15,17-1] .

يعتبر الحقل المتجهي حقلاً تنسورياً من النوع $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$، ولقد تمت دراسة الحقول المتجهة المركزية والمتقاربة في فضاءات ريمان ذي التركيب $(F)^2 = 0,1,-1$ في أعمال [16,18]

،كما تمت دراسة الحقول المتجهة المركزية والمتقاربة في فضاءات ريمان ذي التركيب $(F)^3 = 0$ في أعمال [19] .

نتابع في هذا البحث دراسة الحقول المركزية والحقول المتقاربة في فضاء ريمان الخاص $K-$ فضاء .

هدف البحث:

- نثبت في هذا البحث، أن أي حقل متجهي مركزي في K− فضاء ، هو حقل متجهي متقارب.
- نوجد مركبات الحقل المتجهي المتقارب في K− فضاء المنسوب إلى نظام إحداثي مدبّر.
- يستخدم البحث في ميكانيك الكم والتطبيقات الفيزيائية المختلفة (الحقول الكهربائية والمغناطيسة وفي النظرية النسبية ، وغيرها)

الحقول المتجهة المتقاربة في فضاء ريمان الخاص
K– فضاء.

المناقشة والعمل:

نورد بداية بعض التعاريف الأساسية:

- **تعريف *(1)*:**

ليكن فضاء ريمان تنسوره المتري $\left(g_{ij}\right)$،نسمي A_n ،K– فضاء إذا وُجِد فيه تنسوراً $\left(F_i^h\right)$؛ من النوع $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ يحققان الشروط الآتية:

$$\begin{aligned}
&\textbf{a)}\quad F_\alpha^h F_i^\alpha = 0\\
&\textbf{b)}\quad F_i^\alpha g_{\alpha j} + F_j^\alpha g_{\alpha i} = 0\\
&\textbf{c)}\quad F_{i,j}^h + F_{j,i}^h = 0\\
&\textbf{d)}\quad \left\|F_i^h\right\| = m, m \in N, m \geq 2
\end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

حيث : $F_{i,j}^h = \partial_j F_i^h + F_i^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h - F_\alpha^h \Gamma_{ij}^\alpha$ (المشتق موافق التغير للتنسور F_i^h) ،

Γ_{ij}^h مركبات كريستوفل من النوع الثاني ل K– فضاء :

- **تعريف *(2)*:**

نسمي $\left(x^n\right) = \left(x', ..., x^n\right)$ نظاماً إحداثياً مدبراً في الفضاء A_n ، إذا كان التركيب $\left(F_i^h\right)$ يأخذ في هذا النظام الشكل الآتي:

$$F_i^h = \begin{pmatrix} O & \vdots & O \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ E_m & \vdots & O \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

حيث: E_m مصفوفة الواحدة من المرتبة m.

تعريف (3):

نسمي فضاء ريمان V_n، فضاءً متساوي القياس إذا وجد فيه حقل متجهي مركزي ξ^h يحقق الشروط:

$$\xi^h_{,i} = \rho\delta^h_i \qquad (3)$$

حيث ρ، صامد ما، وإذا كان $\rho \neq 0$ فإن V_n يسمى فضاء متساوي القياس من النوع الأساسي. [1] ، وإذا كان $\rho = const$، فإن الحقل ξ^h يدعى حقلاً متجهاً متقارباً [2].

مبرهنة (1):

إن أي حقل متجهي مركزي في K− فضاء المنسوب إلى النظام الإحداثي المعرف بالعلاقة (2) هو حقل متجهي متقارب.

البرهان:

بأخذ المشتق الاتجاهي للعلاقة (3) بالنسبة لـ x^j نجد:

$$\xi^h_{,ij} = \rho_{,j}\delta^h_i \qquad (4)$$

وبالتالي:

$$\xi^h_{,ij} - \xi^h_{,ji} = \rho_{,j}\delta^h_i - \rho_{,i}\delta^h_j \qquad (5)$$

واستناداً إلى مطابقة ريتشي نجد:

$$-\xi^\alpha R^h_{\alpha ij} = \rho_{,j}\delta^h_i - \rho_{,i}\delta^h_j \qquad (6)$$

بأخذ المرافق للدليل i ($\bar{i}$) والمرافق على الدليل j ($\bar{j}$) في (6) وطرح العلاقتين الناتجتين ، واستناداً إلى خواص تنسور ريمان R^h_{ijk} في الفضاء A_n، نجد:

$$\rho_{,\bar{i}}\delta^h_j - \rho_j\delta^h_{\bar{i}} + \rho_{,i}\delta^h_j - \rho_{,j}\delta^h_i = 0$$

بتقليص الدليلين i, h في العلاقة الأخيرة (بفرض $h = i$) وباعتبار أن $\delta^i_i = 0$ نجد أن:

توضيح كلمة تقليص

$$\rho_{,\bar{i}} = 0 \Rightarrow \rho_{,i}\delta^h_{\bar{j}} - \rho_{,j}\delta^h_{\bar{i}} = 0$$

وهذا يعني إما أن يكون:

$$\left\|\delta_{\bar{i}}^{h}\right\| = \left\|\boldsymbol{F_i}^{h}\right\| \le 1$$

وهذا غير ممكن استناداً إلى ***(1,d)***، أو أن يكون: $\rho_{,i} = 0$ ، أي أن $\rho = \boldsymbol{const}$ ، وهذا يعني أن K− فضاء هو فضاء متقارب. وهو المطلوب.

<u>نتيجة</u> *(1)*:

إن أي حقل متجهي متقارب في فضاء ريمان (K− فضاء) يحقق الشرط:

$$\xi_{,\alpha}^{h}\boldsymbol{F_i}^{\alpha} = \xi_{,i}^{\alpha}\boldsymbol{F}_{\alpha}^{h} \qquad \textbf{(7)}$$

هذا ينتج ببساطة من العلاقة ***(3)*** ومنه يكون:

$$\delta_{\bar{i}}^{h} = \delta_{i}^{\bar{h}} = \boldsymbol{F_i}^{h}$$

<u>تعريف</u> *(3)*: يسمى الحقل المتجهي في الفضاء $\boldsymbol{A_n}$ الذي يحقق الشرط ***(7)*** حقلاً متجهاً تحليلياً [***5-4-3***].

ملاحظة:

يمكن كتابة الشرط ***(7)*** على النحو:

$$\boldsymbol{L}_{\xi}\boldsymbol{F_i}^{h} = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

حيث $\boldsymbol{L}_{\xi}\boldsymbol{F_i}^{h}$ مشتق لي للتنسور $\boldsymbol{F_i}^{h}$ وفق منحى المتجه ξ^{h} ويعرف بالعلاقة:

$$\boldsymbol{L}_{\xi}\boldsymbol{F_i}^{h} = \xi^{\alpha}\boldsymbol{F}_{i,\alpha}^{h} + \xi_{,i}^{\alpha}\boldsymbol{F}_{\alpha}^{h} - \xi_{,\alpha}^{h}\boldsymbol{F_i}^{\alpha}$$

واستناداً إلى ***(1,c)*** وإلى ***(7)*** ينتج صحة العلاقة ***(8)***.

سنحاول فيما يلي إيجاد مركبات الحقل التنسوري التحليلي في (K− فضاء) المنسوب إلى نظام إحداثي تدبيري (مفترض).

تكتب العلاقة ***(7)*** استناداً إلى ***(1,c)*** على النحو:

$$\partial\xi^{h}\boldsymbol{F_i}^{\alpha} = \partial_{i}\xi^{\alpha}\boldsymbol{F}_{\alpha}^{h} \qquad \textbf{(9)}$$

بالتعويض في ***(9)***:

$i=a\ ,h=b$

$i=a\ ,h=b+m$

$i=a+m,h=m$

$i=a+m,h=b+m$

حيث $\boldsymbol{a,b}=1,2,....,\boldsymbol{m}$.

نحصل على العلاقات :

$$\partial_{\boldsymbol{a+m}}\xi^{\boldsymbol{b}}=0 \qquad \textbf{(10)}$$

$$\partial_{\boldsymbol{a+m}}\xi^{\boldsymbol{b+m}}=\partial_{\boldsymbol{a}}\xi^{\boldsymbol{b}} \qquad \textbf{(11)}$$

من **(10)** نجد أن:

$$\xi^{\boldsymbol{b}}=\tilde{\xi}^{\boldsymbol{b}}\left(\boldsymbol{x}',...,\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}\right)$$

من **(11)** نجد أن :

$$\xi^{\boldsymbol{b+m}}=\tilde{\xi}^{\boldsymbol{b+m}}\left(\boldsymbol{x}',...,\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}\right)+\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a+m}}\partial_{\boldsymbol{a}}\tilde{\xi}^{\boldsymbol{b}}$$

مما سبق نجد أن مركبات الحقل التنسوري المقارب في نظام إحداثي مفترض يأخذ الشكل

إعادة التنسيق

الآتي:

$$\begin{aligned} &a)\zeta^{a}=\tilde{\zeta}^{a}(x^{1},...,x^{m})\\ &b)\zeta^{a+m}=\tilde{\zeta}^{a+m}(x^{1},...,x^{m})+x^{b+m}\partial_{b}\tilde{\zeta}^{a} \end{aligned} \qquad (12)$$

<u>مبرهنة</u> *(2)*:

بفرض $\xi^{\boldsymbol{h}}$ حقلاً تنسورياً تحليلياً في K− فضاء ، عندئذٍ يوجد نظام إحداثي تدبيري ما بحيث

تأخذ مركبات الحقل المتجهي ξ^h أحد الأشكال الآتية:

$$a)\ \zeta^h = \delta_1^h$$
$$b)\ \zeta^h = \delta_{1+m}^h \qquad (13)$$

البرهان:

ليكن ξ^h حقلاً متجهاً تحليلياً غير معدوم في الفضاء A_n ، يحقق العلاقة (13) التي تكافئ العلاقات (12) في نظام إحداثي تدبيري(مفروض) (2).

يمكن التأكد من أن التحويل الإحداثي الآتي (الذي ندعوه تحويل تحليلي):

$$x'^a = \tilde{x}(x^1,...,x^m)$$
$$x'^{a+m}(x^1,...,x^m) + x^{b+m}\partial_b \tilde{x}^a \qquad (14)$$

يحافظ على الشكل الأساسي (2) للتركيب $\left(F_i^h\right)$.

حيث $\tilde{x}^h, \tilde{x}^{h+m}$ دوال ما بالمتغيرات الموضحة بالعلاقات (14)، بشرط أن يكون:

$\det \left\| \partial_a \tilde{x}^b \right\| \neq 0$.

الآن يترتب علينا إيجاد تحويل تحليلي من الشكل (14)، بحيث تأخذ مركبات الحقل المتجهي ξ^h الشكل الخاص (13) بدلاً من الشكل العام (12).

إن مركبات المتجه ξ^h في النظام الإحداثي (14) تكتب بدلالة النظام الإحداثي (x) على النحو:

$$\xi'^h\left(x'\right) = \xi^\alpha\left(x\right)\partial_\alpha x'^h \qquad (15)$$

وذلك بشرط أن يكون كلا النظامين $\left(x'\right),\left(x\right)$ تحليلي.

وبصورة مشابهة للعلاقات (12) فإن مركبات المتجه $\xi'^h\left(x'\right)$ في النظام الإحداثي $\left(x'\right)$ تأخذ الشكل:

$$\zeta'^{a} = \tilde{\zeta}'^{a}(x'^{1},...,x'^{n})$$
$$\zeta'^{a+m} = \tilde{\zeta}'^{a+m}(x'^{1},...,x'^{m}) + x'^{b+m}\partial_{b}x'^{a} \qquad (16)$$

حيث $\tilde{\xi}'^{i}$ دوال بالمتغيرات الموضحة في (16) $\partial'_{b} = \dfrac{\partial}{\partial x'^{b}}$.

بفرض $h = a$ ، فإن العلاقة (15) تأخذ الشكل:

$$\tilde{\xi}'^{a} = \xi^{b}\partial_{b}\tilde{x}'^{a} \qquad (17)$$

وعندما $\xi'^{a} = e_{1}\delta_{1}^{a}$ ، حيث $e_{1} = 0,1$، فإن المعادلات (17) تملك حلاً بالنسبة للدوال غير المعروفة $\tilde{x}^{a}\left(x',....,x^{m}\right)$ بشرط أن يكون $\det\left\|\tilde{x}^{a}\right\| \neq 0$ ، عندئذٍ يصبح التحويل الآتي:

$$x'^{a} = \tilde{x}^{a}$$
$$x'^{a+m} = x^{b+m}\partial_{b}x^{a} \qquad (18)$$

تحويلاً تحليلياً، وفي هذه الحالة يمكن اعتبار أن النظام الإحداثي التدبيري مأخوذ بحيث يكون: $\xi^{a} = e_{1}\delta_{1}^{a}$.

عندئذٍ تأخذ العلاقات (12) الشكل المبسط الآتي:

$$a)\ \zeta^{a} = e_{1}\delta_{1}^{a}$$
$$b)\ \zeta^{a+m} = \tilde{\zeta}^{a+m}(x^{1},...,x^{m}) \qquad (19)$$

العلاقات (15) استناداً إلى (14) و (19) تأخذ الشكل:

$$a)\ \zeta'^{a} = e_{1}\partial_{1}\tilde{x}^{a}$$
$$b)\ \zeta'^{a+m} = e_{1}\partial_{1}\tilde{x}^{a+m} + \tilde{\zeta}^{b+m}\partial_{b}\tilde{x}^{a} \qquad (20)$$

عندما $e_{1} = 0$، فإن العلاقات (20) تصبح على النحو:

$$\zeta'^{a+m} = \tilde{\zeta}^{b+m}\partial_{b}\tilde{x}^{a} \qquad (21)$$

في هذه الحالة يمكننا إيجاد حلاً من الشكل:

$$\tilde{x}^{a} = \tilde{x}^{a}\left(x^{1},...,x^{m}\right)$$

يحقق (**20-b**) ، (**20-a**) وذلك بشرط:

$$\zeta'^{a+m} = \delta_{1+m}^{a+m}$$

بحيث $\det\left\|\partial_{b} x^{a}\right\| \neq 0$. وهذه الدوال تحقق الشروط (**18**) التي تجعل مركبات المتجه ξ^{h} تأخذ الشكل (**19-a,b**).

بقيت لدينا الحالة عندما $e_1 = 1$.

بالتعويض في (**20**) عن $e_1 = 1$، فإنها تأخذ الشكل:

$$\zeta'^{a} = \partial_1 \tilde{x}^{a+m} + \tilde{\zeta}^{b+m}\partial_b \tilde{x}^{a} \qquad (22)$$

وبالتالي فإن التحويل:

$$\tilde{x}^{a} = x^{a}$$
$$\tilde{x}^{a+m} = -\int \tilde{\zeta}^{a+m} dx^{1}$$

هو تحويل تحليلي غير معدوم، ينقل استناداً إلى (**20**) مركبات المتجه ξ^{h} إلى الشكل (**13-a**). تم إثبات المبرهنة.

التوصيات:

نوصي بدراسة الحول المتجهة المتقاربة في فضاءآت ريمان الخاصة ، وغيرها من الفضاءآت .

REFERENCES

1- Широков П. А- Избракные Работы по Геомегрии.- казань:изд-во казанск. Ун-та, 1966.

2- Бекелемишев Д.В. Дифферен цианьна Геометрия пространетвс почти комплексной Структурой// Геометрия.1963. итоти Науки.

3- Микешй, Осасакиеьюхи эквидистантнњх келеровых простра нствах // Докг. АНСССР.-1986.-291, Nō 1. С. 33-36.

4- Микешй, -, старко Г.А О Гипербогеск и саса киевых // укр. Геометр. Сб. 1989.

5- Раад Джамел Кадем, курбатовсеи . Н. Геометрические объекты, инвариантлые относитеыно 2-планарны отображения Аффинно связныыхи Римановых пространств , сруктурой /одес. Ун-т.- ОДЕССА, 1990.

6- M. Prvanovic, a note in holomorphically projective transformations of the Kahler spaces , Tensor New Ser .35 (1981) 99-104.

7- PETROV,A,Z.: New methods in general relativity theory. Moscow: Nauka, 495., 1966.

8- Н. С. Сиников М:Геодезические отображения Римановыхп ространств . наука 1979.

9- Mikes,J. Geodesic mappings of Semisy metric Rimannian Spaces (Russian) Odessa. Univ. Moscow, Archives at VINITI 11. 11.76 No. 3924-76, 16p. (1976).

10-Kurbatova,I,N, On some questions geodesic mappings almost Hermation Spaces. Odessa 1990-145. Named. Dok in Ukranuuite, 20.08.91 No. 1217-yk 91.

11-Shiha,M: On the theory of holomorphically projective

mappings parabolically – kahlerian spaces . Diff. Geometry and its App. Conf. Opava ,157-160 ,1993.

12-Shiha,M.,the holomorphicaly projective mappings of parabolically-Kahlerrian spaces(Russian) . Moscow 1994.

13-Shiha,M.,Mikes .J. : on holomorphically projective flat parabolically – Kahlerian spaces, Grant No 201/05/2707 CZEch Science Foundation and Council of Czech Government MSN No 6198959214 (2005)

14-Mikes,J.;Holomorphically projective mappings and their generalizations ,J. Math. Sci., New York.89,3 (1998) 1334-1353

15-Mikes,J.Geodesic mappings of Einstein spaces . Math. Nothes ,28,922-923 ,1981; translation from Math . Zametki.28,935-938,1980.

16-Раад Кадем Джамел, 2-F планарны отображения Аффинно связныыхи Римановыхп ространств , РНД, ОДЕССА, 1992.

17-SHiha,M.:Geodesic and Holomorphically-projective mappings of parabalically-Kahlerian spaces .(Russian) PHD . Moscow ,1994.

المراجع العربية

18- د. محسن شيحة و د. عصام ديبان، فضاء ريمان ذو التركيب $(F)^3 = 0$ ، مجلة جامعة البعث ، المجلد 35 لعام 2013.

19-د. محسن شيحة ، الحقول المتجهة المتقاربة في فضاء ريمان A_n ذو التركيب $(F)^3 = 0$. مجلة جامعة البعث ، المجلد 35 لعام 2013.