شروط تحققها أعداد غاوص الصحيحة الأولية فيما بينها والتطبيق على الثلاثيات والرباعيات الفيثاغورثية الأولية

اعداد : د. الاء ابو العينين

ملخص

نقدم في هذا البحث دراسة حول أعداد غاوص الأولية فيما بينها في حقل الاعداد العقدية، ووضع شروط لازمة وغير كافية ليكون عددان عقديان أوليان فيما بينهما، وذلك من خلال وضع شروط للمركبات الحقيقية والتتخيلية للعدد العقدي، حيث تُعتبر هذه الشروط اسهل من الطرق المعتمدة في المراجع، وتم تطبيق البحث على الثلاثيات الفيثاغورثية والرباعيات الفيثاغورثية في حقل الاعداد العقدية. ووضع شروط بسيطة لازمة وغير كافية لتكون الثلاثية والرباعية أولية.

الكلمات المفتاحية :

أعداد غاوص الصحيحة، ثلاثية فيثاغورث، رباعية فيثاغورثية، أعداد عقدية.

A conditions for on the relatively prime Gaussian integers and the application to the primary Pythagorean triples and quadruples

Abstract

In this research, we present a study on the relatively prime Gaussian integers, and setting necessary and non – sufficient conditions for two Gaussian integers to be relatively prime, by setting conditions for the real and imaginary components of the complex number, as these conditions are considered easier than the methods in the references, and we applied

the research on Pythagorean triples and Pythagorean quadruples in the field of complex numbers. And we set simple conditions that are necessary and not enough for the prime Pythagorean triples and prime Pythagorean.

Keywords:

Gaussian integers, Relatively prime, Pythagorean triple, Pythagorean Quadruple, Complex numbers

1_مقدمة:

اكتشف البابليون (2000 قبل الميلاد) العلاقة التي تربط بين اضلاع المثلث القائم. وبعد ذلك أوجد الرياضي اليوناني فيثاغورث حلول صحيحة للعلاقة، وسميت مجموعة الحلول بالثلاثيات الفيثاغورثية.

ثم تم تعميم العلاقة التي تربط بين اضلاع المثلث القائم، إلى علاقة تربط بين أبعاد متوازي المستطيلات a, b, c وقطره d (القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين لا يقعان في وجه واحد من وجوه متوازي المستطيلات). وهي :

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

وتُسمى الرباعية (a, b, c, d) برباعية فيثاغورث. وكان الاهتمام يدور حول ايجاد حلول صحيحة للمعادلة السابقة (معادلة ديوفانتس)، وحديثا توجد دراسات حول ايجاد ثلاثيات ورباعيات فيثاغورث في حقل الاعداد العقدية ذات المركبات الصحيحة والتي عُرفت باسم أعداد غاوص الصحيحة.

2_ تعاريف ومفاهيم أساسية

2_1_أعداد غاوص الصحيحة [1]

نقول عن العدد العقدي $Z = x + iy$ أنه عدد غاوص الصحيح إذا كانت الاعداد $x . y$ أعداد صحيحية، ويرمز لمجموعة كل أعداد غاوص الصحيحة بالرمز $□[i]$.

وتُشكل أعداد غاوص الصحيحة مع عمليتي جمع وضرب الأعداد العقدية المألوفة منطقة تكاملية.

2_2_التطابق بالمقاس w [2]

لتكن $z, y, w \in □[i]$، نقول أن z, y متطابقان بالمقاس w ونكتب:

$$z \equiv y \bmod w$$

اذا تحقق $w|(z-y)$.

حيث نقول أن $a|b$ حيث $a,b \in □[i]$ اذا وجد عدد $c \in □[i]$ بحيث يحقق $a = cb$

مثال (1)

لاختبار صحة العلاقة $(1+12i) \equiv (2-i) mod (3+i)$ نقوم بالتأكد من تحقق التعريف:

$$\frac{(1+12i)-(2-i)}{(3+i)} = \frac{-1+13i}{(3+i)} = 1+4i \in □[i]$$

وبالتالي فإن التطابق صحيح.

2_3_القسمة في $□[i]$ [3]

من أجل $a,b \in □[i]$ حيث $b \neq 0$، يوجد $c,d \in □[i]$ بحيث:

$$a = bc + d \quad , \qquad |d| < |c|$$

إن c هو ناتج القسمة و d هو الباقي. حيث |.| طويلة العدد العقدي.

مثال (2)

ليكن $a = 1+8i \ , \ b = 2-4i$، فإن:

$$\frac{a}{b} = \frac{1+8i}{2-4i} = \frac{(1+8i)(2+4i)}{4+16} = -\frac{3}{2} + i \quad \notin □[i]$$

إن $-\frac{3}{2}$ تقع بين -1 و -2 ، لذا سنختار $b = -1+i$ أو $b = -1+i$ ومنه :

$$a = b(-1+i) + (-1+2i)$$

$$a = b(-2+i) + (+1-2i)$$

بالرغم من عدم وحدانية ناتج القسمة والباقي، إلا أن ذلك لن يؤثر على أهمية القسمة في إيجاد القاسم المشترك الأكبر ، لأنه أيضاً لن يكون وحيداً.

2_4_القاسم المشترك الأكبر [3]

القاسم المشترك الأكبر لعددين $a, b \in$ □$[i]$ هو أخر باقي غير صفري في عملية القسمة الاقليدية للعددين a, b. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (3)

سنوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين $a = 32 + 9i \ , \ b = 4 + 11i$ كمايلي:

$$32 + 9i = (4 + 11i)(2 - 2i) + (2 - 5i)$$

$$4 + 11i = (2 - 5i)(-2 + i) + (3 - i)$$

$$2 - 5i = (3 - i)(1 - i) - i$$

$$3 - i = (-i)(1 + 3i) + 0$$

إن أخر باقي غير صفري هو $(-i)$ ، ومنه فإن $gcd = -i$. حيث gcd هو القاسم المشترك الاكبر.

ويُبرهن أنه إذا كان d قاسم مشترك أكبر لعددين من □$[i]$، فإن $-d, id, -id$ هي أيضاً قواسم مشتركة عظمى (لذلك لا نهتم بعدم وحدانية ناتج القسمة وباقي القسمة لأن أخر باقي غير معدوم سيكون أخد القواسم المشتركة العظمى.

2_5_الاعداد الأولية فيما بينها في □$[i]$ [3]

لتكن □$z, y \in$ $[i]$، نقول إنّ z, y أوليان فيما بينهما إذا كانت القواسم المشتركة العظمى هي الأعداد $S = \{1, -1, i, -i\}$. ويُبرهن أن ذلك يُكافي المساواة التالية:

$$1 = az + by \quad ; \quad a, b \in \square[i]$$

حيث أن إذا كان z, y أوليان فإن أي قاسم مشترك لهما سيقسم (1) ، وقواسم (1) هي فقط عناصر المجموعة S.

العددين الواردين في المثال (3) أوليين فيما بينهما، لأن $gcd = -i$.

2_6_ ثلاثية فيثاغورث العقدية [4]

نقول عن الثلاثية $(Z_1.Z_2.Z_3)$ أنّها فيثاغورثية أولية عقدية اذا حققت الشرطين التاليين:

الشرط الأول هو تحقق العلاقة التالية:

$$Z_1^2 + Z_2^2 = Z_3^2$$

حيث $Z_1,\ Z_2,\ Z_3 \in \mathbb{Z}[i]$.

والشرط الثاني أن تكون الأعداد $Z_1,\ Z_2,\ Z_3$ أولية فيما بينها مثنى مثنى.

3_ هدف البحث

يهدف هذا البحث إلى وضع شروطٍ لازمة وغير كافية لكون عددين غاوصيين أوليين نسبيًا فيما بينهما، حيث تُقدّم هذه الشروط منهجيةً مبسطةً مقارنةً بالطرق التقليدية المعتمدة في الدراسات السابقة.

4_ نتائج البحث

مبرهنة (1)

بفرض $Z_1\ ,Z_2 \in \square[i]$ أوليان فيما بينهما حيث:

$$Z_1 = x_1 + iy_1 \ \ ,\ \ Z_2 = x_2 + iy_2$$

فإن $d\ = gcd(x_1, y_1, x_2, y_2) = 1$.

البرهان:

لنفرض جدلاً أن $d = t \neq 1$ عندئذ ومن التعريف السابق يوجد $a, b \in \square[i]$ بحيث

$$1 = aZ_1 + bZ_2$$

ولنفرض أن $a = a_1 + ia_2 \ \ ,\ \ b = b_1 + ib_2$. أي:

$$1 = (a_1 + ia_2)(x_1 + iy_1) + (b_1 + ib_2)(x_2 + iy_2)$$

$$1 = (a_1x_1 - a_2y_1) + i(a_2x_1 + a_1y_1) + (b_1x_2 - b_2y_2) + i(b_1y_2 + b_2x_2)$$

بأخذ القسم الحقيقي للتركيب الجبري السابق نجد:

$$1 = (a_1x_1 - a_2y_1) + (b_1x_2 - b_2y_2)$$

وحسب الفرض الجدلي فان t تقسم الطرف الايمن وبالتالي يجب أن تقسم الطرف الايسر (1) وهذا غير ممكن. ومنه الفرض الجدلي خاطئ . أي إذن:

$$d\ = gcd(x_1, y_1, x_2, y_2) = 1$$

ملاحظة (1):

إن المبرهنة (1) تُعطي شرط لازم ولكن غير كافي ليكون عددين من $\square[i]$ أوليين فيما بينهما. ولكن تأتي أهمية المبرهنة أنّه معيار سهل جداً للحكم على عددين أنهما غير أوليين فيما بينهما قبل البدء بعملية القسمة المطولة.

أي إذا كان $gcd(x_1, y_1, x_2, y_2) \neq 1$ فإنّ:

$$Z_1 = x_1 + iy_1 \quad , \quad Z_2 = x_2 + iy_2$$

غير أوليين فيما بينهما.

المثال التالي هو مثال لعددين يحققان شروط المبرهنة (1) ولكنهما غير أوليين فيما بينهما.

مثال (4)

ليكن $a = 11 + 3i \ , \ b = 1 + 8i$، من الواضح أن العددين السابقين يحققان شروط المبرهنة (1) ، لأن $gcd(11,3,1,8) = 1$. ولكن a, b غير أوليين فيما بينهما لأن:

$$11 + 3i = (1 + 8i)(1 - i) + 2 - 4i$$

$$1 + 8i = (2 - 4i)(-1 + i) - 1 + 2i$$

$$2 - 4i = (-1 + 2i)(-2) + 0$$

إن أخر باقي غير معدوم هو $-1 + 2i$ ومنه $gcd = -1 + 2i$ وليس أحد عناصر المجموعة S، أي العددان a, b ليسا أوليان فيما بينهما.

مثال (5)

وجدنا من المثال (3) أن العددين $a = 32 + 9i \ , \ b = 4 + 11i$ أوليان فيما بينهما، ونلاحظ أن

$$gcd(32,9,4,11) = 1$$

نتيجة (1):

بفرض الأعداد $Z_1, \ Z_2, \ Z_3$ أولية فيما بينها مثنى مثنى، وحسب المبرهنة 1 فإن:

$$gcd(x_1 \ , y_1 \ , x_2 \ , y_2 \ ) = 1$$

$$gcd(x_1 \ , y_1 \ , x_3 \ , y_3) = 1$$

$$gcd(x_2 \ , y_2 \ , x_3 \ , y_3) = 1$$

حيث:

$$Z_1 = x_1 + iy_1 \ \ , \ \ Z_2 = x_2 + iy_2 \ \ , \ \ Z_3 = x_3 + iy_3$$

ومنه نجد أنه إذا كانت (Z_1, Z_2, Z_3) ثلاثية فيثاغورثية عقدية أولية فإن أحد الاعداد على الاقل x_1, y_1, x_2, y_2 فردية. لأنها لو كانت جميعها زوجية فإن $gcd(x_1 \ , y_1 \ , x_2 \ , y_2 \ ) =$ 2 على الأقل وهذا مخالف للنتيجة (1).

ملاحظة (2) [1]

من مبرهنة فيثاغورث في الأعداد الطبيعية: $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$

فإن: $x_1 = r^2 - s^2 \ \ , \ \ x_2 = 2rs \ \ , \ \ x_3 = r^2 + s^2$ حيث $r, s \in \mathbb{N}$.

وتكون الثلاثية (x_1, x_2, x_3) أولية إذا كان r, s أحدهما زوجي والاخر فردي و $r > s$.

وان طريقة التوليد السابقة تبقى صحيحة في $\mathbb{Z}[i]$ باعتبار $r, s \in \mathbb{Z}[i]$.

مبرهنة (2)

بفرض $Z_1, \ Z_2, \ Z_3 \in \mathbb{Z}[i]$. و:

$$Z_1 = r^2 - s^2 \ \ , \ \ Z_2 = 2rs \ \ , \ \ Z_3 = r^2 + s^2$$

حيث $r, s \in \mathbb{Z}[i]$ و $r = r_1 + ir_2 \ , \ s = s_1 + is_2$

الشرط اللازم لتكون الثلاثية الفيثاغورثية العقدية (Z_1, Z_2, Z_3) أولية هو أن يكون أحد الاعداد $r_1, r_2 \, , s_1, s_2$ فردي والبقية زوجية. أو أحد الاعداد $r_1, r_2 \, , s_1, s_2$ زوجي والبقية فردية.

الاثبات :

بفرض $Z_1 = x_1 + iy_1 \quad , \quad Z_2 = x_2 + iy_2$

علاقات التوليد في المبرهنة تفرض x_2, y_2 زوجيان، لأن:

$$Z_2 = 2rs = 2(r_1 + ir_2)(s_1 + is_2)$$
$$Z_2 = 2(r_1s_1 - r_2s_2) + 2i(r_1s_2 + r_2s_1)$$
$$x_2 = Re(2rs) = 2(r_1s_1 - r_2s_2)$$
$$y_2 = Im(2rs) = 2(r_1s_2 + r_2s_1)$$

ومن النتيجة (1) نجد اما x_1 فردي أو y_1 فردي.

$$Z_1 = r^2 - s^2 = (r_1 + ir_2\ )^2 - (s_1 + is_2)^2$$
$$Z_1 = {r_1}^2 - {r_2}^2 + 2ir_1r_2 - {s_1}^2 + {s_2}^2 - 2is_1s_2$$
$$Z_1 = {r_1}^2 - {r_2}^2 - {s_1}^2 + {s_2}^2 + 2i(r_1r_2 - s_1s_2)$$

إن y_1 عدد زوجي وضوحاً ومنه يجب أن يكون x_1 فردي أي يجب أن يكون ${r_1}^2 - {r_2}^2 - {s_1}^2 + {s_2}^2$ فردي. لان

$$x_1 = Re(r^2 - s^2) = {r_1}^2 - {r_2}^2 - {s_1}^2 + {s_2}^2$$
$$y_1 = Im(r^2 - s^2) = 2(r_1r_2 - s_1s_2)$$

وليكون x_1 فردي يجب أن يكون أحد ${r_1}^2, {r_2}^2, {s_1}^2, {s_2}^2$ فردي والبقية زوجي أو أحدهم زوجي والبقية فردي. أي أحد القيم $r_1, r_2\ , s_1, s_2$ فردي والبقية زوجي أو أحدهم زوجي والبقية فردي.

نتيجة (2):

إن المبرهنة (2) تُعد معيار سهل وبسيط للحكم على ثلاثية فيثاغورثية أنها غير أولية.

مثال (6)

لنأخذ $r = 2 + 4i \ , \ s = 4 + 6i$. من الواضح أن $r \ , \ s$ لا يحققان شروط المبرهنة (2).

$$Z_1 = r^2 - s^2 = 8 - 32i$$

$$Z_2 = 2rs = -32 + 56i$$

$$Z_3 = r^2 + s^2 = -32 + 64i$$

ونلاحظ

$$gcd(8, -32, -32, 56) = 8$$

$$gcd(-32, 56, -32, 64) = 8$$

$$gcd(8, -32, -32, 64) = 8$$

أي الثلاثية الفيثاغورثية غير أولية، لأن الثلاثية غير أولية فيما بينها مثنى مثنى.

الرباعية الفيثاغورثية العقدية [4]

نقول عن الرباعية (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) إنّها فيثاغورثية اذا حققت المعادلة التالية .

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = Z_4^2$$

حيث $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 \in \mathbb{Z}[i]$.

ملاحظة (3): [4]

يمكن تعميم طريقة توليد رباعيات فيثاغورثية صحيحة إلى $\mathbb{Z}[i]$ كما يلي:

بفرض لدينا:

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = Z_4^2$$

فإن علاقات التوليد هي

$$Z_1 = r^2 - s^2 - t^2 \;\;,\;\; Z_2 = 2rs \;\;, Z_3 = 2rt \;\;,$$
$$Z_4 = r^2 + s^2 + t^2$$

حيث $r, s, t \in \square[i]$.

الرباعية الفيثاغورثية الأولية

سنقوم بتعريف الرباعية الفيثاغورثية الأولية بطريقة معممة لتعريف الثلاثية الفيثاغورثية الأولية كما يلي:

نقول عن الرباعية الفيثاغورثية $Z_1, \; Z_2, \; Z_3, Z_4$ أنها أولية اذا حققت الشروط الأربعة التالية :

$$gcd(Z_1, \; Z_2, \; Z_3) = gcd(gcd(Z_1, \; Z_2), \; Z_3) = S$$

$$gcd(Z_1, \; Z_2, \; Z_4) = gcd(gcd(Z_1, \; Z_2), Z_4) = S$$

$$gcd(Z_1, \; Z_3, Z_4) = gcd(gcd(Z_1, \; Z_3), Z_4) = S$$

$$gcd(\, Z_2, \; Z_3, Z_4) = gcd(gcd\,(Z_2, \; Z_3), Z_4) = S$$

حيث $S = \{1, -1, i, -i\}$.

نتيجة (3)

إن الشروط الأربعة الواردة في التعريف السابق تقتضي أن:

$$gcd(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = 1$$

$$gcd(x_1, y_1, x_2, y_2, x_4, y_4) = 1$$

$$gcd(x_1, y_1, x_3, y_3, x_4, y_4) = 1$$

$$gcd(x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) = 1$$

البرهان:

لنأخذ الشرط الأول

$$gcd(Z_1,\ Z_2,\ Z_3) = gcd(gcd(Z_1,\ Z_2),\ Z_3) = S$$

وبفرض $gc\,d(Z_1,\ Z_2) = t$ فإن:

$$t = aZ_1 + bZ_2 \quad ; \quad a, b \in \square[i]$$

ومنه

$$gcd(Z_1,\ Z_2,\ Z_3) = c(aZ_1 + bZ_2\ \ ) + dZ_3 \quad ; c, d \in \square[i]$$

وبفرض

$$a = a_1 + ia_2\ , b = b_1 + ib_2,\ c = c_1 + ic_2\ , d = d_1 + id_2$$

بالإصلاح نجد أن:

$$Re\big(gcd(Z_1,\ Z_2,\ Z_3)\big) = c_1a_1x_1 + c_1b_1x_2 + d_1x_3 - (c_1a_2y_1 + c_1b_2y_2 + d_2y_3)$$

ومنه فإن الحد الأيمن سيقسم الواحد فقط، أي:

$$gcd(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = 1$$

وبنفس الطريقة نُثبت باقي الاقتضاءات.

مبرهنة (3)

بفرض لدينا:

$$Z_1 = r^2 - s^2 - t^2 \quad , \quad Z_2 = 2rs \quad , Z_3 = 2rt \quad , \quad Z_4 = r^2 + s^2 + t^2$$

حيث $r, s, t \in \square[i]$ و

$r = r_1 + ir_2\ ,\ s = s_1 + is_2\ ,\ t = t_1 + it_2$.

الشرط اللازم لتكون الرباعية الفيثاغورثية (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) أولية هو أن تكون أحد الاعداد $r_1, r_2, s_1, s_2, t_1, t_2$ زوجي والبقية فردية، أو أحدهم فردي والبقية زوجي، أو 3 منهم فردي و 3 منهم زوجي.

الاثبات

إن علاقات التوليد في المبرهنة (3) تفرض x_2, y_2, x_3, y_3 أعداد زوجية. ومن المبرهنة (1) نجد اما x_1 فردي أو y_1 فردي.

$$r^2 - s^2 - t^2 = (r_1 + ir_2)^2 - (s_1 + is_2)^2 - (t_1 + it_2)^2$$
$$= {r_1}^2 - {r_2}^2 + 2ir_1r_2 - {s_1}^2 + {s_2}^2 - 2is_1s_2 - {t_1}^2 + {t_2}^2 - 2it_1t_2$$
$$= {r_1}^2 - {r_2}^2 - {t_1}^2 - {s_1}^2 + {s_2}^2 + {t_2}^2 + 2i(r_1r_2 - s_1s_2 - t_1t_2)$$

ومنه:

$$x_1 = Re(r^2 - s^2 - t^2) = {r_1}^2 - {r_2}^2 - {t_1}^2 - {s_1}^2 + {s_2}^2 + {t_2}^2$$
$$y_1 = Im(r^2 - s^2 - t^2) = 2(r_1r_2 - s_1s_2 - t_1t_2)$$

إن y_1 عدد زوجي وضوحاً ومنه يجب أن يكون x_1 فردي، أي يجب أن يكون ${r_1}^2 - {r_2}^2 - {t_1}^2 - {s_1}^2 + {s_2}^2 + {t_2}^2$ فردي، وليكون المقدار السابق فردي يجب أن يكون أحد ${r_1}^2, {r_2}^2, {t_1}^2, {s_1}^2, {s_2}^2, {t_2}^2$ فردي والبقية زوجي أو أحدهم زوجي والبقية فردي أو 3 منهم فردي و3 زوجي. ومنه حتى يكون المقدار السابق فردي يجب أن يكون أحد $r_1, r_2, s_1, s_2, t_1, t_2$ فردي والبقية زوجي أو أحدهم زوجي والبقية فردي أو 3 منهم فردي و3 زوجي. 1

مثال (6):

سنختار r, s, t لا تحقق شروط المبرهنة (2).

$$r = 2 + i \quad , \quad s = 3 + 2i \quad , \quad t = 2 + 4i$$

ومنه:

$$Z_1 = (2 + i\ \ )^2 - (3 + 2i)^2 - (2 + 4i)^2 = 10 - 24i$$

$$Z_2 = 2(2 + i)(3 + 2i) = 8 + 14i$$

$$Z_3 = 2(2 + i)(2 + 4i) = 20i$$

$$Z_4 = (2 + i\ \ )^2 + (3 + 2i)^2 + (2 + 4i)^2 = -4 + 32i$$

ومنه نجد:

$$gcd(10, -24,8,14, -4,32) = 2$$

وهذا يؤدي أن :

$$gcd(Z_1, Z_2, Z_4) \neq S$$

أي أن الرباعية الفيثاغورثية غير أولية.

الاستنتاجات:

قدمنا في هذا البحث 3 مبرهنات أساسية، ووضعنا شروط لازمة وغير كافية تفيد في :

1_ الحكم على عددين أنهما غير أولين من خلال تطبيق شرط سهل ودون الحاجة إلى القسمة الإقليدية المطولة.

2_ الحكم على ثلاثية فيثاغورثية أنها غير أولية من خلال عدم تحقق شروط بسيطة، ودون الحاجة إلى دراسة أولية الأعداد مثنى مثنى.

3_ الحكم على رباعية فيثاغورثية أنها غير أولية من خلال عدم تحقق شروط بسيطة، ودون الحاجة إلى دراسة أولية الأعداد مثنى مثنى.

المراجع العلمية

1_ History of The Theory of Numbers: Diophantine Analysis, I,. E. Dickson. 2Eds. London: Dover Publication, (2005).

2_ Pythagorean Theorem. E. Maor, The: A 4000-Year History, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, (2007).

3_Generating Pythagorean triples: the methods of Pythagoras and of Plato via Gnomons. J.H. Barnett, Number Theory, 7 (2017).

4_The Pythagorean theorem, John C.Sparks, p99-101,USA (2008).