جامعة حمص

كلية العلوم

قسم الرياضيات

حل المعادلات التفاضلية الخطية الضبابية ذات الأمثال الثابتة من المرتبة الثانية والتي لا تحتوي على المشتق من الرتبة الأولى باستخدام تحويل لابلاس الضبابي

اعدادالطالب:

ثائر الشربعي

اشراف الدكتور:
د.أحمد الجاعور

المشرف المشارك:
د.صفاء شيخ السوق

ملخّص البحث:

عرضنا في هذا البحث بعض المفاهيم الأساسية في المنطق الضبابي وتم تسليط الضوء على العمليات الجبرية للأعداد الضبابية التي تم استخدامها في هذا البحث.

بالإضافة إلى تعريف تحويل لابلاس الضبابي وخصائصه ومن ثم آلية استخدام تحويل لابلاس الضبابي في إيجاد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الخطية الضبابية ذات الأمثال الثابتة من المرتبة الثانية والتي لا تحتوي على المشتق من الرتبة الأولى.

الكلمات المفتاحية: المنطق الضبابي، المعادلة التفاضلية الضبابية ذات الأمثال الثابتة، تحويل لابلاس الضبابي.

Solution of Solving Second-Order Linear Fuzzy Differential Equations with Constant Coefficients (Without First-Order Derivative) Using Fuzzy Laplace Transform

University of Homs - Faculty of Science – Mathematics Department

Abstract

In this research, we will present some fundamental concepts in fuzzy logic and highlight the algebraic operations of fuzzy numbers that have been utilized in this study.
Additionally, the fuzzy Laplace transform and its properties will be defined, followed by the methodology of using the fuzzy Laplace transform to find the particular solution of second-order fuzzy linear differential equations with constant coefficients without first

Derivative .

Key Words: Fuzzy logic, Fuzzy differential equation with constant coefficients, fuzzy Laplace transform.

1. المقدَمة :

تُعد المعادلات التفاضلية الضبابية موضوعًا مهمًا في العديد من المجالات. على سبيل المثال، نماذج السكان، والهندسة المدنية، ونموذج ديناميكيات السكان، ونموذج النمو.

يُعدّ تحويل لابلاس الضبابي مفيدًا لحل المعادلات التفاضلية الضبابية. في البداية، قدّم اللهفيرانلو وأحمدي تحويل لابلاس الضبابي [1]. ولحل المشكلات في العديد من مجالات المعادلات التفاضلية الضبابية، استُخدم تحويل لابلاس الضبابي في العديد من الأوراق البحثية

في هذه الورقة البحثية، قمنا بدراسة حلول مسألة ضبابية ذات قيم ابتدائية لعدد ضبابي مثلثي باستخدام تحويل لابلاس الضبابي. وتم استخدام التفاضل المعمم والحساب الضبابي. تهدف هذه الدراسة إلى دراسة الحلول باستخدام تحويل لابلاس الضبابي للمسألة المدروسة.

2. هدف البحث:

أثارت المعادلات التفاضلية الضبابية انتباه العديد من العلماء والباحثين في السنوات الأخيرة لمدى أهميتها في المجالات الاقتصادية والفيزيائية والهندسية، وكان من الصعب حلها ببعض الطرق التحليلية لذلك يهدف البحث الى تسليط الضوء على التحويلات التكاملية في المنطق الضبابي والتي تقوم بالحل الأسرع والأسهل للمعادلات التفاضلية الضبابية مقارنة بالطرق التحليلية.

3. مواد البحث:

(1-3) المفاهيم الأساسية:

تعريف (1-1-3): [1]

لتكن $\mathbf{X}$ مجموعة غير خالية، ولنفرض أنّ $\mathbf{A}$ مجموعة جزيئة من $\mathbf{X}$ ، ولنعرف الدالة $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}$ بالشكل:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}:\mathbf{X}\longrightarrow[0,1]$$
$$\mathbf{x}\longrightarrow\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$$

عندئذٍ ندعو المجموعة $\mathbf{A}$ المزودة بالدالة $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}$ مجموعة جزئية ضبابية من $\mathbf{X}$، حيث تدعى الدالة $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}$ بدالة العضوية، ولأجل كل $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ تدعى القيمة $\mu_A(x)$بدرجة انتماء العنصر $\mathbf{x}$ إلى المجموعة $\mathbf{A}$وكلما كانت درجة العضوية أكبر كان العنصر أكثر انتماء للمجموعة A .

ملاحظة:

•يقال عن عنصر $x\in X$ إنه يتمتع بعضوية كاملة في المجموعة A إذا كانت $\mu_A(x)=1$

•يقال عن عنصر $x \in X$ إنه ليس عنصر في المجموعة A إذا كانت $\mu_A(x) = 0$

مثال: لتكن $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

إن المجموعة المعرفة بالشكل:

$A = \{(1,0),(2,0.25),(3,0.5),(4,0.7),(5,0.8),(6,0.9),(7,1)\}$ تسمى مجموعة ضبابية في X. حيث أن المسقط الثاني هو درجة انتماء العنصر.

تعريف(2-1-3): [1]

لتكن Xمجموعة غير خالية ولنفرض أن Aمجموعة جزئية ضبابية من Xنقول عن المجموعة الجزئية الضبابية A إنها مستمرة إذا كانت دالة العضوية μ_Aمستمرة

مثال:

لتكن A مجموعة جزئية ضبابية من $\mathbb{R}$معرف عليها دالة العضوية $\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.1x & ; \ 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0.1(10-x) & ; \ 5 < x \leqslant 10 \\ 0 & ; \ x \notin [0,10] \end{cases}$$

تعريف(3-1-3): [1]

لتكن X مجموعة غير خالية، ولنفرض أن A مجموعة جزئية ضبابية من Xنقول عن المجموعة الجزئية الضبابية Aإنها متقطعة إذا كانت دالة العضوية μ_Aمتقطعة.

مثال:

لتكن لدينا $X = \{a, b, c\}$ ولنفرض أن Aمجموعة جزئية ضبابية من X معرف عليها دالة العضوية μ_A بحيث أن:

$$\mu_A(a) = 0,3 \ , \ \mu_A(b) = 0,5, \ \mu_A(c) = 0,3$$

عندئذٍ تكون المجموعة $A = \{(a,0.3),(b,0.5),(c,0.3)\}$متقطعة.

تعريف (4-1-3) : [1]

لتكن $\mathbf{X}$ مجموعة غير خالية، ولنفرض أنّ $\mathbf{A}$ مجموعة جزيئة ضبابية من $\mathbf{X}$، يعرف دعامة المجموعة الجزئية الضبابية $\mathbf{A}$ والذي يرمز له بالرمز $\mathbf{supp(A)}$بانه المجموعة:

$$\mathbf{supp(A)} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X}\ , \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}} > 0\}$$

تعريف(5-1-3): [2]

الطبولوجيا الضبابية T هي عائلة من المجموعات الضبابية في X والتي تحقق الشروط التالية:

1) $\Phi\ ,\ X\ \in\ T$

2) إذا كان $A,B\ \in T$ عندئذٍ $A\cap B\in T$

3) إذا كان $A_i\in T\ ;\ i\in I$ عندئذٍ $\cup A_i\in T$

يسمى T طبولوجيا ضبابية على X ويسمى الزوج (X,T) فضاء طبولوجيا ضبابي.

تعريف (6-1-3): [3]

ليكن $\mathbf{X}$ فضاءً طبولوجياً، ولنفرض أن $\mathbf{A}$ مجموعة جزئية ضبابية من $\mathbf{X}$ ، تعرف مجموعة القطع من المستوي $0\leqslant \mathbf{r}\leqslant 1$ للمجموعة الجزئية الضبابية $\mathbf{A}$ والتي يرمز لها بالرمز $\mathbf{A(r)}$ بأنها المجموعة:

$$A(r) = \begin{cases} x \in X\,;\mu_A(x) \geq r & ;\ r > 0 \\ \mathrm{cl(supp(A))} & ;\ r = 0 \end{cases}$$

حيث $\mathbf{cl(supp(A))}$ هي لُصاقة المجموعة الجزئية الضبابية $\mathbf{A}$

تعريف (7-1-3): [3]

العدد الضبابي هو تطبيق $u{:}R \longrightarrow [0\,,1]$

يحقق الخواص التالية:

(1) u علوي شبه مستمر

(2) u محدب ضبابي، أي

$$u(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq \min\{u(x),u(y)\} \quad ; \quad x,y\in\mathbb{R},\lambda\in[0,1]$$

(3) u طبيعي $\exists x_0\in\mathbb{R}\ ,\ u(x_0)=1$

(4) u لصاقة المجموعة $cl(suppu)$ حيث u هو حامل التابع $suppu=\{x\in R,u(x)>0\}$

لتكن E مجموعة كل الأعداد الضبابية على R و α هي جميع المستويات للعدد الضبابي u ويرمز عادة لمستويات العدد الضبابي u بالرمز $[u]^{\alpha}$ بالشكل:

$$[u]^{\alpha}=\left\{\begin{vmatrix}\{x\in R\ ,\ u(x)\geqslant\alpha\ ;\ 0<\alpha\leqslant 1 & \}\\ cl(suppu) \quad ; \quad \alpha=0 & \end{vmatrix}\right\}$$

ويرمز لها بـ $\left[\underline{u}(\alpha),\ \overline{u}(\alpha)\right]$ إن مجموعة المستويات α للعدد الضبابي هي فترة مغلقة ومحدودة

حيث أن كل y يمكن اعتباره عدداً ضبابياً بالشكل:

$$y(t)=\left\{\begin{matrix}1\ ,\ t=y\\ 0\ ,\ t\neq y\end{matrix}\right\}$$

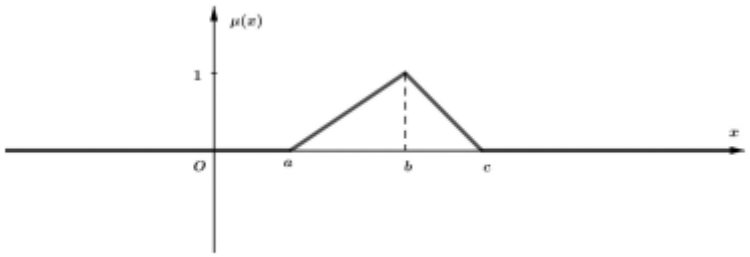
ملاحظة:

إذا كان $\mathbf{A}$ عدداً حقيقياً ضبابياً فإن $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ لها الشكل $[\mathbf{a}_1(\mathbf{r}),\mathbf{a}_2(\mathbf{r})]$ ، ونرمز لمجموعة جميع الاعداد الضبابية المعرفة على $\mathbf{R}$ بالرمز $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}$

تجدر الإشارة إلى أنه يوجد نوعان أساسيان من الأعداد الحقيقية الضبابية وهما الأعداد الضبابية المثلثية والأعداد الضبابية الرباعية وسنقتصر في دراستنا على الأعداد الضبابية المثلية.

تعريف (8-1-3): [1]

ليكن $\mathbf{A}$ عددا حقيقياً ضبابياً عندئذٍ نقول عن العدد الحقيقي الضبابي $\mathbf{A}$ إنه مثلثي إذا كان التمثيل البياني لدالة العضوية $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}$ له من الشكل



الشكل 1: التمثيل البياني لدالة العضوية للعدد الضبابي المثلثي

ونلاحظ أنَ دالة العضوية للعدد الضبابي المثلثي تعطى بالشكل:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{if } a < x \le b \\ \dfrac{x-c}{b-c} & \text{if } b < x \le c \\ 0 & \text{if } x \ge c \end{cases}$$

$\mathbf{A} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ نعبر عن العدد الضبابي المثلثي بالشكل $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}(\mathbf{b}) = 1$، $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}) = 0$، $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{A}}(\mathbf{C}) = 0$ كما أنَ $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b} \leqslant \mathbf{c}$ حيث إنَ

بالشكل: $\mathbf{A} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ للعدد الضبابي المثلثي $\mathbf{r}$ وتعطى صيغة مجموعة القطع من المستوي

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = [\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})\mathbf{r}, \mathbf{c} + (\mathbf{b} - \mathbf{c})\mathbf{r}] \qquad (1.1)$$

العميات الجبرية الضبابية على الأعداد الحقيقية الضبابية.

نعرض في هذه الفقرة أهم العمليات الجبرية الضبابية على الأعداد الحقيقية الضبابية، وتجدر الإشارة إلى أنّ العمليات الجبرية الضبابية على الأعداد الحقيقة الضبابية تعرف باستخدام دوال العضوية للأعداد الحقيقية الضبابية وكذلك باستخدام مجموعات القطع.

تعريف (9-1-3): [1]

ليكن $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{F}_{\mathbf{R}}$ ولنفرض أنّ $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}$ عندئذٍ فإن:

إن مجموع العددين الحقيقين الضبابين $\mathbf{A},\mathbf{B}$ هو عدد حقيقي ضبابي $\mathbf{A}\oplus\mathbf{B}$ تعطى دالة العضوية له $\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{A}\oplus\mathbf{B})}$ وفق قاعدة الربط:

$$\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{A}\oplus\mathbf{B})}(\mathbf{Z})=\sup_{\boldsymbol{\phi}(\mathbf{z})}\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$$

حيث إنّ $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{z})=\{(\mathbf{x},\mathbf{y});\quad \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{z}\}$

إنّ ضرب العدد الحقيقي الضبابي $\mathbf{A}$ بالقيمة السلمية $\boldsymbol{\lambda}$ هو عدد حقيقي ضبابي $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{A}$ تعطى دالة العضوية له $\boldsymbol{\mu}_{\lambda\mathbf{A}}$وفق قاعدة الربط

$$\mu_{\lambda A}(z)=\begin{cases}\sup\limits_{\{x:\lambda x=z\}}\{\mu_A(x)\} & \text{if } \lambda\neq 0\\ \chi_{\{0\}}(z) & \text{if } \lambda=0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\mu_A(\lambda^{-1}z) & \text{if } \lambda\neq 0\\ \chi_{\{0\}}(z) & \text{if } \lambda=0\end{cases}$$

حيث أنّ $\boldsymbol{\chi}_{\{0\}}$ هي الدالة المميزة للمجموعة $\{0\}$

إن فرق العددين الحقيقين الضبابين $\mathbf{A},\mathbf{B}$هو عدد حقيقي ضبابي $\mathbf{A}\ominus\mathbf{B}$ تعطى دالة العضوية له $\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{A}\ominus\mathbf{B})}$ وفق قاعدة الربط

$$\mu_{(A\ominus B)}(z)=\sup_{\phi(z)}\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$$

حيث إنّ $\phi(\mathbf{z}) = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;\; ; \; \mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{z}\}$

إنّ جداء العددين الحقيقين الضبابين $\mathbf{A},\mathbf{B}$ هو عدد حقيقي ضبابي $\mathbf{A}\odot\mathbf{B}$ تعطى دالة العضوية له $\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{A}\odot\mathbf{B})}$وفق قاعدة الربط:

$$\mu_{(A\odot B)}(z) = \sup_{\phi(z)} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

حيث أنّ $\phi(\mathbf{z}) = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;\; ; \; \mathbf{x}.\mathbf{y}=\mathbf{z}\}$

إنّ ناتج قسمة العدد الحقيقي الضبابي $\mathbf{A}$ على العدد الحقيقي الضبابي $\mathbf{B}$هو عدد حقيقي ضبابي $\mathbf{A}/\mathbf{B}$تعطى دالة العضوية له $\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{A}/\mathbf{B})}$ وفق قاعدة الربط:

$$\mu_{(A/B)}(z) = \sup_{\phi(z)} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

حيث أنّ $\left\{ \mathbf{z} = \mathbf{x}/\mathbf{y} \;\; ; \;\; (\mathbf{x},\mathbf{y}) \right\}$ وإنّ $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{z}) = \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;\; ; \; \mathbf{x}/\mathbf{y} = \mathbf{z}\right\}$ $\mathbf{supp}(\mathbf{B}) \neq 0$

مبرهنة (1-1-3): [3]

ليكن $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{F}_{\mathbf{R}}$ ولنفرض أنّ $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ ولنفرض أنّ $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = [\mathbf{a}_1(\mathbf{r}), \mathbf{a}_2(\mathbf{r})]$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = [\mathbf{b}_1(\mathbf{r}), \mathbf{b}_2(\mathbf{r})]$ هما مجموعة القطع من المستوي لكل منهما على الترتيب عندئذٍ فإنّ:

$$(A \oplus B)(r) = A(r) \oplus B(r) = [a_1(r) + b_1(r), a_2(r) + b_2(r)]$$
$$(A \ominus B)(r) = A(r) \ominus B(r) = [a_1(r) - b_2(r), a_2(r) - b_1(r)]$$
$$(\lambda \odot A)(r) = \lambda \odot (A(r)) = \begin{cases} [\lambda a_1(r), \lambda a_2(r)] & \text{if } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2(r), \lambda a_1(r)] & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$$
$$(A \odot B)(r) = A(r) \odot B(r) = [minP(r), maxP(r)]$$

حيثُ $P(r) = \{a_1(r)b_1(r), a_1(r)b_2(r), a_2(r)b_1(r), a_2(r)b_2(r)\}$

$$(A/B)(r) = [minD(r), maxD(r)]; \qquad 0 \notin \text{supp}(B)$$

$$D(r) = \left\{\frac{a_1(r)}{b_1(r)}, \frac{a_2(r)}{b_1(r)}, \frac{a_1(r)}{b_2(r)}, \frac{a_2(r)}{b_2(r)}, \right\} .$$

مثال:

لنفرض أنّ $\mathbf{A} = (1,2,3)$, $\mathbf{B}(3,4,5)$عددان حقيقيان ضبابين مثلثين عندئذٍ حسب الصيغة (1.1) فإنّ

$$A(r) = [1 + r, 3 - r], B(r) = [3 + r, 5 - r]$$

وبالتالي حسب المبرهنة السابقة نجد أن

$$(A \oplus B)(r) = A(r) \oplus B(r) = [4 + 2r, 8 - 2r]$$

وبالتالي فإنّ $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = (4, 6, 8)$

$$(A \ominus B)(r) = A(r) \ominus B(r) = [-4 + 2r, -2r]$$

وبالتالي فإنّ $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) = (-4, -2, 0)$

$$(4 \odot A)(r) = 4 \odot (A(r)) = [4 + 4r, 12 - 4r]$$

وبالتالي فإنّ $(4\mathbf{A}) = (4, 8, 12)$

$$\begin{aligned}(A \odot B)(r) &= A(r) \odot B(r) = [(1 + r)(3 + r), (3 - r)(5 - r)] \\ (A/B)(r) &= \frac{A(r)}{B(r)} = [(1 + r)/(5 - r), (3 - r)/(3 + r)]\end{aligned}$$

نلاحظ أنّ $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$, $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ ليسا عددين حقيقين ضبابيين مثلثين، وذلك لأن مستوى القطع لهما لا يملك الصيغة (1.1).

مبرهنة (2-1-3): [3]

ليكن $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}_{\mathbf{R}}$ ولنفرض أنّ $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ و $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = [\mathbf{a}_1(\mathbf{r}), \mathbf{a}_2(\mathbf{r})]$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = [\mathbf{b}_1(\mathbf{r}), \mathbf{b}_2(\mathbf{r})]$ هما مجموعة القطع من المستوي لكل منهما على الترتيب، عندئذٍ فإنّ:

$$(A \oplus B) \oplus B \neq A \;\&\; A \oplus A = A \oplus (-1).A \neq \{0\}$$

تعريف (10-1-3):[4]

لتكن $f: (a, b) \to E$ دالة ذات قيمة ضبابية حيث $x_0 \in (a, b)$ نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق ضبابياً عند $\mathbf{x}_0$ إذا كان هناك $f'(x_0) \in E$ أي:

(a) $\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)\ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0)\ominus f(x_0-h)}{h}$
$= f'(x_0)$

(b) $\lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)\ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0)\ominus f(x_0-h)}{h}$
$= f'(x_0)$

مبرهنة (1-1-3): [4]

لتكن $f:(a,b)\to E$ دالة ذات قيمة ضبابية ولنرمز $\mathbf{f(t)} = \left[\underline{\mathbf{f}}\,(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha}), \overline{\mathbf{f}}\,(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})\right]$ حيث $0 \leqslant \boldsymbol{\alpha} \leqslant 1$

لناقش الحالات الاتية

1- إذا كانت f قابلة للاشتقاق كما في الحالة (a) للتعريف $(3-1-10)$ عندئذٍ تكون $\underline{f}\,(t,\alpha)$, $\overline{f}\,(t,\alpha)$ قابلة للاشتقاق ويكون

$$f'(t) = \left[\underline{f}\,'(t,\alpha),\ \overline{f}\,'(t,\alpha)\right]$$

2- إذا كانت f قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b) للتعريف $(3-1-10)$ عندئذٍ تكون $\overline{f}\,(t,\alpha)$, $\underline{f}\,(t,\alpha)$ قابلة للاشتقاق ويكون

$$f'(t) = \left[\overline{f}\,'(t,\alpha),\ \underline{f}\,'(t,\alpha)\right]$$

مبرهنة (2-1-3): [4]

لتكن $f:(a,b)\to E$ دالة ذات قيمة ضبابية ولنرمز $\mathbf{f(t)} = \left[\underline{\mathbf{f}}\,(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha}), \overline{\mathbf{f}}\,(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})\right]$ حيث

$0 \leqslant \boldsymbol{\alpha} \leqslant 1$ لناقش الحالات الاتية:

1-إذا كانت $\mathbf{f}$, $\acute{\mathbf{f}}$ قابلة لاشتقاق كما في الحالة $(\mathbf{a})$أو إذا كانت $\mathbf{f}$, $\acute{\mathbf{f}}$ قابلة لاشتقاق كما في الحالة $(\mathbf{b})$ للتعريف **(3-1-10)** عندئذٍ يكون $\underline{\acute{\mathbf{f}}}(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})$ $\overline{\acute{\mathbf{f}}}(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})$ قابلة لاشتقاق ويكون:

$$\mathbf{f}''(\mathbf{t}) = \left[\underline{\mathbf{f}}''(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha}), \overline{\mathbf{f}}''(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})\right]$$

2- إذا كان $\mathbf{f}$ قابلة لاشتقاق كما في الحالة $(\mathbf{a})$ والدالة $\mathbf{f}'$ كما في الحالة $(\mathbf{b})$ أو $\mathbf{f}$ قابلة لاشتقاق كما في الحالة $(\mathbf{b})$ أو $\mathbf{f}'$ قابلة لاشتقاق كما في الحالة $(\mathbf{a})$ للتعريف **(3-1-10)** عندئذٍ يكون $\underline{\acute{\mathbf{f}}}(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})$ $\overline{\acute{\mathbf{f}}}(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})$ قابلة لاشتقاق ويكون:

$$\mathbf{f}''(\mathbf{t}) = \left[\overline{\mathbf{f}}''(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha}), \underline{\mathbf{f}}''(\mathbf{t},\boldsymbol{\alpha})\right]$$

تعريف (3-1-11): [3]

لتكن $u \in \mathbb{R}_F,\ [u]^{\alpha} = \left[\underline{u}_{\alpha}, \overline{u}_{\alpha}\right] = \{x \in R\ , u(x) \geqslant \alpha\}\ ;\ 0 < \alpha \leqslant 1$

$$[u]^0 = cl\{suppu\} = cl\{x \in R,\ , u(x) > 0\}$$

$\underline{u}_{\alpha}$ $(0,1]$ مستمرة من اليسار متزايدة على

$\overline{u}_{\alpha}$ $(0,1]$ مستمرة من اليسار متناقصة على

حيث $\underline{u}_{\alpha}$, $\overline{u}_{\alpha}$ مستمرة من اليمين عندما $\alpha = 0$

$$\underline{u}_{\alpha} \leqslant \overline{u}_{\alpha}\ ,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

(3-2) تحويل لابلاس الضبابي

سنقوم في هذا البحث بدراسة تعاريف اساسية لتحويل لابلاس الضبابي والإلتفاف الضبابي ثم نقوم بحل معادلات تفاضلية خطية ضبابية ذات أمثال ثابتة من المرتبة الثانية والتي لا تحتوي على المشتق من الرتبة الأولى.

تعريف (1-2-3): [5]

لتكن f دالة ذات قيمة ضبابية إذا كانت $\lim_{t\to t_0^-} f(t)$, $\lim_{t\to t_0^+} f(t)$ موجودة، و $f(t_0^+) \neq f(t_0^-)$ عندئذٍ f لديها قفزة متقطعة عن t_0

تعريف (2-2-3):[5]

نقول عن الدالة fإنها ذات قيمة ضبابية مستمرة على $]0,\infty[$ إذا كان:

$\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$ موجودة

تكون منقطعة عندها $t_1, t_2, ..., t_n$ عدا عدد محدد من النقاط $[0,b]$مستمرة على كل المجال

تعريف (3-2-3)[5]:

لتكن f دالة ذات قيمة ضبابية و M عدداً حقيقياً نقول إنها محدودة إذا كان

$$|f(t)| \leqslant M \; ; \; t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1} \; , \; i = 1, ..., n$$

نظرية (1-2-3): [4]

لتكن f دالة ضبابية ذات قيمية حقيقية على المجال $[\mathbf{a},\infty)$ ولها التمثيل $\left[\underline{\mathbf{f}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha}), \overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})\right]$ لكل ثابت $\mathbf{r} \in [0,1]$ ولنفرض أن $\underline{\mathbf{f}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})$, $\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})$ قابلة للمكاملة حسب ريمان على المجال $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ لكل $\mathbf{b} \geqslant \mathbf{a}$ ولنفرض وجود دالتين موجبتين $\underline{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\alpha})$, $\overline{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\alpha})$ بحيث

$$\int_a^b |\underline{f}(x,\alpha)| dx \leq \underline{M}(\alpha) \text{ و } \int_a^b |\bar{f}(x,\alpha)| dx \leq \bar{M}(\alpha) \quad ; \quad \mathbf{b} \geqslant \mathbf{a}$$

عندئذٍ تكون الدالة $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ قابلة للمكاملة حسب تكامل ريمان الضبابي على المجال $[\mathbf{a},\infty)$ بالشكل :

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \left(\int_a^{\infty} \underline{f}(x,\alpha)dx, \int_a^{\infty} \bar{f}(x,\alpha)dx\right)$$

ملاحظة: لتكن $\mathbf{f(x)}$ و $\mathbf{g(x)}$ دالتين ضبابيتين ذات قيمة حقيقية قابلتان للتكامل وفق ريمان على المجال $\mathbf{I=[a,\infty)}$ عندئذٍ يكون:

$$\int_I [f(x) \oplus g(x)]dx = \int_I f(x)dx \oplus \int_I g(x)dx$$

تعريف (4-2-3):[5]

لتكن f دالة ضبابية وليكن لدينا الثوابت $p, M > 0$

إذا كان $|f(t)| \leqslant Me^{pt}.\overline{1}\ ,\ t \geqslant t_0\ , t_0 \geqslant 0$

عندئذٍ نقول إن f لديها ترتيب p أسي.

تعريف (5-2-3): [4]

معامل حقيقي عندئذٍ تحويل لابلاس الضبابي يعرف بالشكل: s دالة ضبابية و $\mathbf{f(t)}$لتكن لدينا

$$F(s) = l\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \odot f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} \odot f(t)dt$$

حيث

$$F(s,\alpha) = l\{f(t,\alpha)\} = [l\{\underline{f}(t,\alpha)\}, l\{\bar{f}(t,\alpha)\}]$$

أي

$$l\{\underline{f}(t,\alpha)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \odot \underline{f}(t,\alpha)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} \odot \underline{f}(t,\alpha)dt$$
$$,0 \leq \alpha \leq 1$$

$$l\{\bar{f}(t,\alpha)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \odot \bar{f}(t,\alpha)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} \odot \bar{f}(t,\alpha)dt$$
$$,0 \leq \alpha \leq 1$$

تعريف (1-2-6): [6]

إذا كان تحويل لابلاس الضبابي للدالة $f(t)$ يعطى بالعلاقة

$$F(s) = l\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \odot f(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-st} \odot f(t)dt$$

حيث

$$f(t) = \left[\overline{f}(t,\alpha), \underline{f}(t,\alpha) \right] \quad ; \ r \in [0,1]$$

عندئذٍ تحويل لابلاس العكسي

$$l^{-1}\{F(s)\} = f(t) \ , \ t \geqslant 0$$

مبرهنة (2-2-3):[5]

لتكن f, g دالتين ذات قيمة ضبابية مستمرتان ولتكن $c_1 \ , c_2$ ثوابت عندئذٍ:

$$l(c_1 \odot f(t) \oplus c_2 \odot g(t)) = (c_1 \odot l(f(t))) \oplus (c_2 \odot l(g(t))).$$

البرهان:

$$\begin{aligned} l[(c_1 \odot f(t)) \oplus (c_2 \odot g(t))] &= \int_0^{\infty} \left((c_1 \odot f(t)) \oplus (c_2 \odot g(t))\right) \odot e^{-st}dt \\ &= \int_0^{\infty} (c_1 \odot f(t)) \odot e^{-st}dt \oplus \int_0^{\infty} (c_2 \odot g(t)) \odot e^{-st}dt \\ &= c_1 \odot \int_0^{\infty} f(t) \odot e^{-st}dt \oplus c_2 \odot \int_0^{\infty} g(t) \odot e^{-st}dt \\ &= (c_1 \odot l[f(t)]) \oplus (c_2 \odot l[g(t)]) \end{aligned}$$

توطئة:

إذا: $\lambda \in \mathbb{R}$ ،و $[0,\infty[$ دالة ذات قيمة ضبابية على $f(t)$لتكن

$$l[\lambda f(t)] = \lambda l[f(t)]$$

نظرية (2-2-3):[5]

لتكن $f(t)$ دالة مستمرة وذات قيمة ضبابية عندئذٍ:

$$l[e^{at} \odot f(t)] = F(s-a)$$

نظرية (4-2-3):[5]

إذا كانت الدالة fذات القيمة الضبابية ومستمرة على المجال $[0,\infty[$ ولديها ترتيب p أسي

$$F(s)=l[f(t)]\longrightarrow 0\ ,\ s\longrightarrow\infty$$

تعريف (7-2-3): [5]

إنها دالة ضبابية مثلثية إذا كتبت بالشكل: fنقول عن الدالة

$$\int_a^b f(t)dt=\left(\int_a^b f_1(t)dt,\int_a^b f_2(t)dt,\int_a^b f_3(t)dt\right)$$

ملاحظة:

بالاعتماد على التعريف $f(t)=\{f_1(t),f_2(t),f_3(t)\}$لتكن لدينا الدالة ذات القيمة الضبابية المعرفة بالشكل **(6-2-3)** يعرف تحويل لابلاس الضبابي بالشكل:

$$l[f(t)]=(L[f_1(t)],L[f_2(t)],L[f_3(t)])$$

هو تحويل لابلاس الكلاسيكي. Lحيث

تعريف الالتفاف الضبابي (8-2-3): [7]

ليكن لدينا الدالتين $\mathbf{f}\ ,\mathbf{g}$ المعرفتين عندما $\mathbf{t}>0$

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)\odot g(t-\tau)d\tau,$$

لنفرض $\mathbf{u}=\mathbf{t}-\boldsymbol{\tau}$ عندئذٍ:

$$(\boldsymbol{f}*\boldsymbol{g})(\boldsymbol{t})=\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\tau})\odot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{u})\boldsymbol{du}=(\boldsymbol{g}*\boldsymbol{f})(\boldsymbol{t})$$

وأهم العلاقات التي يحققها الالتفاف الضبابي :

(i) $c(f*g)=cf*g=f*cg,\ c$ **ثابت**

(ii) $f*(g*h)=(f*g)*h$

إثبات (ii):

$$\begin{aligned}
&[f*(g*h)](t)\\
=&\int_0^t f(\tau)\odot(g*h)(t-\tau)d\tau\\
=&\int_0^t f(\tau)\odot\left(\int_0^{t-\tau} g(x)\odot h(t-\tau-x)dx\right)d\tau\\
=&\int_0^t\left(\int_0^{t-\tau} f(\tau)\odot g(u-\tau)\odot h(t-\tau)dx\right)d\tau\\
=&[(f*g)*h](t),
\end{aligned}$$

نظرية الالتفاف الضبابي (5-2-3): [7]

لتكن f,g دالتين ذات قيمة غامضة مستمرة على $[0,\infty)$ بمرتبة أسية p

$$l\{(f*g)(t)\}=l[f]\odot l[g]$$

الاثبات:

$$\begin{aligned}
&l\{(f(t)\}\odot l\{(g(t)\}\\
=&\left(\int_0^\infty e^{-s\tau}\odot f(\tau)d\tau\right)\odot\left(\int_0^\infty e^{-su}\odot g(u)du\right)\\
=&\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+u)}f(\tau)\odot g(u)du\right)d\tau,
\end{aligned}$$

نفرض $t=\tau+u$ حيث τ ثابت , $dt=du$ عندئذٍ

$$=\int_0^\infty\left(\int_\tau^\infty e^{-st}\odot f(\tau)\odot g(t-\tau)dt\right)d\tau.$$

وبالتالي : $t<\tau$ حيث $g(t-\tau)=\hat{0}$ فإن $t<0$ حيث $g(t)=\hat{0}$ ولنعرف

$$\begin{aligned}
&l\{(f(t)\}\odot l\{(g(t)\}\\
=&\int_0^\infty\left(\int_\tau^\infty e^{-st}\odot f(\tau)\odot g(t-\tau)dt\right)d\tau
\end{aligned}$$

تتقارب مطلقاً f,g إن تكاملات لابلاس الضبابية للدالتين

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left|e^{-st)} \odot f(\tau) \odot g(t-\tau)\right| d\tau$$

وبعكس ترتيب التكامل نحصل على:

$$\begin{aligned} & l\{(f(t)\} \odot l\{(g(t)\} \\ = & \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} \odot f(\tau) \odot g(t-\tau) d\tau dt \\ = & \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-st} \odot f(\tau) \odot g(t-\tau) d\tau \right) dt \\ - & \int_0^\infty e^{-st} \odot \left(\int_0^t f(\tau) \odot g(t-\tau) d\tau \right) dt \\ = & l\{(f*g)(t)\}. \end{aligned}$$

نظرية (7−2−3) [8]: لتكن f دالة ذات قيمة ضبابية مستمرة على المجال $[0,\infty)$ ذات ترتيب أسي α وأن f' دالة ذات قيمة ضبابية مستمرة جزئياً على المجال $[0,\infty)$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق كما في الحالة (a)عندئذٍ:

$$l(f'(t)) = sl(f(t)) \ominus f(0)$$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b)عندئذٍ:

$$l(f'(t)) = (-f(0)) \ominus (-sl(f(t)))$$

إذا كانت f , f' قابلة للاشتقاق كما في الحالة (a)عندئذٍ:

$$l(f''(t)) = s^2 l(f(t)) \ominus sf(0) \ominus f'(0)$$

إذا كانت fقابلة للاشتقاق كما في الحالة (a) وكانت f' قابلة للاشتقاق كما في الحلة (b) عندئذٍ:

$$l(f''(t)) = -f'(0) \ominus (-s^2) l(f(t)) \ominus sf(0)$$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b) وكانت f' قابلة للاشتقاق كما في الحالة (a) عندئذٍ:

$$l(f''(t)) = -sf(0) \ominus (-s^2) l(f(t)) \ominus f'(0)$$

إذا كانت f , f' قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b)عندئذٍ:

$$l(f''(t)) = s^2 l(f(t)) \ominus sf(0) \ominus f'(0)$$

تطبيق على تحويل لابلاس الضبابي

حل نوع خاص من المعادلات التفاضلية الضبابية الخطية من المرتبة الثانية ذات الأمثال الثابتة والتي لا تحتوي على المشتق من الرتبة الأولى.

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$u''(t) \oplus u(t) = [A]^\alpha, t > 0$$
$$u(0) = [B]^\alpha, u'(0) = [C]^\alpha$$

عبارة عن أعداد مثلثية ضبابية تعرف A, B, C بأخذ تحويل لابلاس الضبابي للطرفين مع الخاصة الخطية حيث بالشكل:

$$[A]^\alpha = \left[\underline{A}_\alpha, \bar{A}_\alpha\right] = \left[\underline{a} + \left(\frac{\bar{a} - \underline{a}}{2}\right)\alpha, \bar{a} - \left(\frac{\bar{a} - \underline{a}}{2}\right)\alpha\right],$$
$$[B]^\alpha = \left[\underline{B_\alpha}, \bar{B}_\alpha\right] = \left[\underline{b} + \left(\frac{\bar{b} - \underline{b}}{2}\right)\alpha, \bar{b} - \left(\frac{\bar{b} - \underline{b}}{2}\right)\alpha\right],$$
$$[C]^\alpha = \left[\underline{C}_\alpha, \bar{C}_\alpha\right] = \left[\underline{c} + \left(\frac{\bar{c} - \underline{c}}{2}\right)\alpha, \bar{c} - \left(\frac{\bar{c} - \underline{c}}{2}\right)\alpha\right].$$

بأخذ تحويل لابلاس الضبابي للمعادلة أعلاه مع الخاصة الخطية والنظرية **(2-1-3) ولنناقش الحالات :**

الحالة الأولى: إذا كانت u , u' قابلة للاشتقاق كما في الحالة **(α):**

$$s^2 l(u_\alpha(t)) \ominus su_\alpha(0) \ominus u'_\alpha(0) + l(u_\alpha(t)) = l([A]^\alpha)$$

ومنه وبأخذ تحويل لابلاس الضبابي نحصل على:

$$s^2 l\left(\underline{u}_\alpha(t)\right) - s\underline{u}_\alpha(0) - \underline{u}'_\alpha(0) + l\left(\underline{u}_\alpha(t)\right) = l\left(\underline{A}_\alpha\right),$$
$$s^2 l(\bar{u}_\alpha(t)) - s\bar{u}_\alpha(0) - \bar{u}'_\alpha(0) + l(\bar{u}_\alpha(t)) = l(\bar{A}_\alpha).$$

وبالحل المشترك نحصل على

$$l\left(\underline{u}_\alpha(t)\right) = \frac{\underline{A}_\alpha}{s(s^2+1)} + \frac{s\underline{B}_\alpha}{s^2+1} + \frac{\underline{C}_\alpha}{s^2+1},$$
$$l(\bar{u}_\alpha(t)) = \frac{\bar{A}_\alpha}{s(s^2+1)} + \frac{s\bar{B}_\alpha}{s^2+1} + \frac{\bar{C}_\alpha}{s^2+1}.$$

وبأخذ تحويل لابلاس الضبابي العكسي نحصل على:

$$\underline{u}_\alpha(t) = \underline{A}_\alpha(1-\cos(t)) + \underline{B}_\alpha\cos(t) + \underline{C}_\alpha\sin(t),$$

$$\bar{u}_\alpha(t) = \bar{A}_\alpha(1-\cos(t)) + \bar{B}_\alpha\cos(t) + \bar{C}_\alpha\sin(t)$$

الحالة الثانية: إذا كانت u قابلة للاشتقاق كما في الحالة (a) وكانت u' قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b):

$$-u'_\alpha(0) \ominus (-s^2)l(u_\alpha(t)) - su_\alpha(0) + l(u_\alpha(t)) = l([A]^\alpha)$$

ومنه:

$$-\bar{u}'_\alpha(0) - \left(-s^2 l(\bar{u}_\alpha(t))\right) - s\bar{u}_\alpha(0) + l\left(\underline{u}_\alpha(t)\right) = l\left(\underline{A}_\alpha\right),$$
$$-\underline{u}'_\alpha(0) - \left(-s^2 l\left(\underline{u}_\alpha(t)\right)\right) - s\underline{u}_\alpha(0) + l(\bar{u}_\alpha(t)) = l(\bar{A}_\alpha)$$

وبالحل المشترك نحصل على:

$$l\left(\underline{u}_\alpha(t)\right) = \frac{\underline{A}_\alpha}{s(1-s^4)} + \frac{\bar{C}_\alpha}{1-s^4} + \frac{s(\bar{B}_\alpha - \bar{A}_\alpha)}{1-s^4} - \frac{s^2\underline{C}_\alpha}{1-s^4} - \frac{s^3\underline{B}_\alpha}{1-s^4}$$

وبأخذ تحويل لابلاس الضبابي العكسي نحصل على:

$$\begin{aligned}\underline{u}_\alpha(t) = \quad & \underline{A}_\alpha\left(1-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right) + \bar{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin(t)\right)\\ & +(\bar{B}_\alpha-\bar{A}_\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right) - \underline{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin(t)\right)\\ & -\underline{B}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right).\end{aligned}$$

بشكل مشابه

$$\begin{aligned}\bar{u}_\alpha(t) = \quad & \bar{A}_\alpha\left(1-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right) + \underline{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin(t)\right)\\ & +(\underline{B}_\alpha-\underline{A}_\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right) - \bar{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin(t)\right)\\ & -\bar{B}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right)\end{aligned}$$

الحالة الثالثة: إذا كانت u قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b) وكانت u' قابلة للاشتقاق كما في الحالة (a):

$$-su_\alpha(0) \ominus (-s^2)l\big(u_\alpha(t)\big) \ominus u'_\alpha(0) + l\big(u_\alpha(t)\big) = l(A]^\alpha)$$

ومنه:

$$-s\bar{u}_\alpha(0) - \big(-s^2 l(\bar{u}_\alpha(t))\big) - \bar{u}'_\alpha(0) + l\big(\underline{u}_\alpha(t)\big) = l\big(\underline{A}_\alpha\big),$$
$$-s\underline{u}_\alpha(0) - \Big(-s^2 l\big(\underline{u}_\alpha(t)\big)\Big) - \underline{u}_\alpha(0) + l(\bar{u}_\alpha(t)) = l(\bar{A}_\alpha),$$

وبالحل المشترك نحصل على:

$$l\big(\underline{u}_\alpha(t)\big) = \frac{\underline{A}_\alpha}{s(1-s^4)} + \frac{\underline{C}_\alpha}{1-s^4} + \frac{s(\bar{B}_\alpha - \bar{A}_\alpha)}{1-s^4} - \frac{s^2\bar{C}_\alpha}{1-s^4} - \frac{s^3\underline{B}_\alpha}{1-s^4}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي نحصل على:

$$\begin{aligned}\underline{u}_\alpha(t) = \; & A_\alpha\left(1 - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t)\right) + \underline{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin(t)\right) \\ & + (\bar{B}_\alpha - \bar{A}_\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(t)\right) - \bar{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin(t)\right) \\ & - \underline{B}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t)\right).\end{aligned}$$

وبشكل مشابه

$$\begin{aligned}\bar{u}_\alpha(t) = \; & \bar{A}_\alpha\left(1 - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t)\right) + \bar{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin(t)\right) \\ & + \left(\underline{B}_\alpha - \underline{A}_\alpha\right)\left(-\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(t)\right) - \underline{C}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin(t)\right) \\ & - \bar{B}_\alpha\left(-\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t)\right).\end{aligned}$$

الحالة الرابعة: إذا كانت $u\ ,\ u'$ قابلة للاشتقاق كما في الحالة (b):

$$s^2 l(u_\alpha(t)) \ominus su_\alpha(0) - u'_\alpha(0) + l(u_\alpha(t)) = l([A]^\alpha)$$

نحصل على معادلتين

$$s^2 l\big(\underline{u}_\alpha(t)\big) - s\underline{u}_\alpha(0) - \underline{u}'_\alpha(0) + l\big(\underline{u}_\alpha(t)\big) = l\big(\underline{A}_\alpha\big),$$
$$s^2 l(\bar{u}_\alpha(t)) - s\bar{u}_\alpha(0) - \bar{u}'_\alpha(0) + l(\bar{u}_\alpha(t)) = l(\bar{A}_\alpha),$$

منه

$$l(\underline{u}_\alpha(t))\frac{\underline{A}_\alpha}{s(s^2+1)}+\frac{s\underline{B}_\alpha}{s^2+1}+\frac{\bar{C}_\alpha}{s^2+1},$$
$$l(\bar{u}_\alpha(t))=\frac{\bar{A}_\alpha}{s(s^2+1)}+\frac{s\bar{B}_\alpha}{s^2+1}+\frac{\underline{C}_\alpha}{s^2+1}.$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسي نحصل على

$$\underline{u}_\alpha(t)=\underline{A}_\alpha(1-\cos(t))+\underline{B}_\alpha\cos(t)+\bar{C}_\alpha\sin(t),$$
$$\bar{u}_\alpha(t)=\bar{A}_\alpha(1-\cos(t))+\bar{B}_\alpha\cos(t)+\underline{C}_\alpha\sin(t).$$

مثال:

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية الاتية

$$u''(t)\oplus u(t)=[0]^\alpha, y(0)=[1]^\alpha, y'(0)=[2]^\alpha$$

$$[0]^\alpha=[-1+\alpha,1-\alpha],[1]^\alpha=[\alpha,2-\alpha],[2]^\alpha=[1+\alpha,3-\alpha].$$

الحل:

الحالة الأولى:

$$\underline{u}_\alpha(t)=(-1+\alpha)(1-\cos(t))+\alpha\cos(t)+(1+\alpha)\sin(t),$$
$$\bar{u}_\alpha(t)=(1-\alpha)(1-\cos(t))+(2-\alpha)\cos(t)+(3-\alpha)\sin(t),$$
$$[u(t)]^\alpha=[u_\alpha(t),\bar{u}_\alpha(t)],$$

الحالة الثانية:

$$\underline{u}_\alpha(t) = (-1+\alpha)\left(1-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right)+(3-\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right)-(1+\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$-\alpha\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right)$$
$$\bar{u}_\alpha(t) = (1-\alpha)\left(1-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right)+(1+\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right)-(3-\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$-(2-\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right),$$
$$[u(t)]^\alpha = \left[\underline{u}_\alpha(t), \bar{u}_\alpha(t)\right].$$

الحالة الثالثة:

$$\underline{u}_\alpha(t) = (-1+\alpha)\left(1-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right)+(1+\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right)-(3-\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$-\alpha\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right),$$
$$\bar{u}_\alpha(t) = (1-\alpha)\left(1-\frac{1}{4}e^{2}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right)+(3-\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right)-(1+\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\sin(t)\right)$$
$$-(2-\alpha)\left(-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos(t)\right),$$
$$[u(t)]^\alpha = \left[\underline{u}_\alpha(t), \bar{u}_\alpha(t)\right],$$

الحالة الرابعة:

$$\underline{u}_\alpha(t) = (-1+\alpha)(1-\cos(t)) + \alpha\cos(t) + (3-\alpha)\sin(t),$$
$$\bar{u}_\alpha(t) = (1-\alpha)(1-\cos(t)) + (2-\alpha)\cos(t) + (1+\alpha)\sin(t),$$

المراجع:

[1] De Barros. L., Bassanezi. R., Lodwick. W., "A first course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics", (2017).

[2] Chang, C. L, "Fuzzy Topological Spaces.", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 24, no. 1, 1968.

[3] S. Salahshour • T. Allahviranloo, "Applications of fuzzy Laplace transforms", Soft Comput, (2013) .

[4] Manmohan Das, Dhanjit Talukdar, "Method For Solving Fuzzy Integro-Differential Equation By Using Fuzzy Laplace Transformation ", INTERNATIONAL JOURNAL OF SCIENTIFIC & TECHNOLOGY RESEARCH, (4) (2014).

[5] نصيرة بومناد،"حول حلول المعادلات التكاملية الضبابية"، جامعة قاصدي مرباح ورقلة، (2020).

[6] Allahviranloo T, Barkhordari Ahmadi M, "Fuzzy Laplace transforms", Soft Computing, (14) (2010).

[7] Abdulrahman A. Sharif, Maha M. Hamood, Amol D. Khandagale, "Usage of the Fuzzy Laplace Transform Method for Solving One-Dimensional Fuzzy Integral Equations", https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.en_US,(2)(2022).

[8]Hülya Gültekin Çitil , "Investigation of A Fuzzy Problem by the Fuzzy Laplace Transform", Applied Mathematics and Nonlinear Sciences, 4(2) (2019).