التوليد الضعيف في الزمر التبديلية منتهية التوليد

هيفاء صويص[1] د. إيمان الخوجة[2] د. عدنان الطيباني[3]

الملخص

يعد مفهومي التوليد الضعيف والاستقلال الخطي الضعيف في الفضاءات المتجهية من المفاهيم التي أعادت توصيف الفضاء المتجهي فوق حقل، ونتج عن هذين المفهومين مفهوم القاعدة الضعيفة والقاعدة الضعيفة المستقلة لفضاء متجهي جزئي والتي تتميز بكونها غير محتواه في الفضاء الجزئي الذي تولده بضعف، في هذه الورقة قمنا بنقل مفهوم التوليد الضعيف إلى الزمر التبديلية منتهية التوليد، وبينا أنَّ كل زمرة مولدة بضعف بمجموعة ما X هي زمرة جزئية من الزمرة $\langle X \rangle$ في الحالة العامة، فضلاً عن دراسة العلاقة بين كلٍ من الزمرة المولدة بضعف بالمجموعة X والمجموعة X، فضلاً عن تعريف مفهوم المجموعة S–المستقلة بضعف وذلك لدراسة المجموعات المولدة بضعف الصغرى للزمر التبديلية منتهية التوليد.

الكلمات المفتاحية. مجموعة مولدة بضعف، مجموعة مستقلة بضعف، مجموعة مستقلة خطياً بضعف، مجموعة S–مستقلة بضعف، الأساس الضعيف، الأساس الحر الضعيف.

[1] طالبة دراسات عليا في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة حمص.
[2] أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة حمص.
[3] مدرس في قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – جامعة حمص.

weekly Generated in Finitely Generated Abelian Group

Haifaa Swies [1] Dr. Eaman Al-Khouja [2] Dr. Adnan Al-Taybani [3]

Abstract

In this paper, we introduced the concept of a weak generation of an Abelian group, and showed that every a weakly generated subgroup by a set X is indeed a generated subgroup by X, in addition to introducing the notions of a weakly independent sets and weakly linearly independent sets as a generalization of linear independent and independent set in Abelian group, respectively, in addition to, we defined the concept of a weakly $S-$ independent set to study minimal weak generating set for certain Abelian group, we proved that a minimal weakly generating set for an Abelian group is weak generating set for this group that does not contain a proper subset which weakly generates the group, while the convers does not necessarily true, several further results concerning minimal weak generating sets of Abelian group were also established.

Key Words: weekly generating set, weekly Independent set, weekly linearly Independent set, week Basis, week Free Basis, weakly $S-$ independent set, minimal weak generating sets.

[1] Graduate Student , Department of Mathematics Homs University
[2] Assistant Professor, Department of Mathematics Homs University.
[3] .Department of Basic Sciences, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering Homs University.

مقدمـــة.

تعد المفاهيم الرياضية الأساسية، مثل التوليد والاستقلال الخطي في الفضاءات المتجهية، حجر الأساس في بناء الجبر الخطي وتطبيقاته. ومع ذلك، فإن النماذج التقليدية لهذه المفاهيم تفترض خصائص معينة قد لا تنطبق في جميع السياقات الرياضية. من هنا برزت الحاجة إلى تطوير مفاهيم أكثر دقة، مثل مفهومي التوليد الضعيف والاستقلال الخطي الضعيف في الفضاءات المتجهية.

لقد أسهمت هذه المفاهيم الجديدة في إعادة توصيف الفضاء المتجهي فوق حقل ونتج عن هذين المفهومين مفهوم القاعدة الضعيفة والقاعدة الضعيفة المستقلة لفضاء متجهي جزئي والتي تتميز بكونها غير محتواه في الفضاء الجزئي الذي تولده بضعف، هذا التباين مع المفاهيم التقليدية يفتح أفاقاً جديدة لفهم الهياكل الجبرية.

قمنا في هذه المقالة بنقل وتطبيق مفهوم التوليد الضعيف إلى الزمر التبديلية منتهية التوليد. ونهدف من ذلك إلى استكشاف كيف تتغير هذه المفاهيم في سياق الزمر مقارنة مع الفضاءات المتجهية. حيث قمنا بدراسة العلاقة بين الزمرة الجزئية المولدة بضعف بمجموعة ما X والمجموعة X ، بالإضافة إلى تعريف مفهوم المجموعة الـ $S-$مستقلة بضعف ومفهوم الأساس الضعيف والأساس الحر الضعيف والمجموعة المولدة بضعف الصغرى لزمرة تبديلية حيث بينا أنَّ الأساسات الحرة الضعيفة لزمرة تبديلية حرة منتهية التوليد لها القدرة ذاتها، وأنَّ كل أساس حر ضعيف لزمرة تبديلية هو مجموعة مستقلة بضعف عظمى، وبينا أن المجموعة المولدة بضعف الصغرى لزمرة تبديلية هي مجموعة مولدة بضعف للزمرة ولا تحوي مجموعة جزئية فعلية مولدة بضعف لهذه الزمرة، فضلاً عن العديد من النتائج المرتبطة بالمجموعات المولدة بضعف الصغرى لزمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس n.

1- تعاريف ومبرهنات أساسية.

نعرض في هذه الفقرة بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالزمر والمجموعات المولدة لزمرة، والبداية مع التعريف الآتي:

تعريف. [6].

لتكن $(G,+)$ زمرة ولنفرض أنَّ S مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ نقول عن المجموعة S إنها مولدة للزمرة G إذا كانت أصغر زمرة جزئية من G تحوي S هي G نفسها. إذا كانت المجموعة S مولدة للزمرة G فإننا نعبر ذلك بالشكل $G=\langle S\rangle$.

تعريف. [6].

لتكن $(G,+)$ زمرة، عندئذ نقول عن الزمرة G إنها منتهية التوليد إذا وجدت في G مجموعة جزئية غير خالية منتهية مولدة لها، وإلّا فإن الزمرة G غير منتهية التوليد.

مبرهنة.1.1. [6].

لتكن $(G,+)$ زمرة ولنفرض أنَّ S مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ فإنَّ $G=\langle S\rangle$ إذا وفقط إذا كان كل عنصر $x\in G$ يكتب بدلالة عناصر مجموعة جزئية منتهية من عناصر المجموعة S.

مبرهنة.1.2. [6].

لتكن $(\mathbb{Z},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة ولنفرض أنَّ $n_1,n_2,...,n_k$ أعداداً صحيحة موجبة وأنَّ $\gcd(n_1,n_2,...,n_k)=d$ عندئذ فإنَّ $\langle n_1,n_2,...,n_k\rangle=\langle d\rangle$

تعريف. [6,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن $X=\{x_i\}_{i=1}^n$ مجموعة جزئية من الزمرة G عناصرها مغايرة للصفر، عندئذ نقول عن المجموعة X إنها **مستقلة** إذا كان لأجل أي مجموعة جزئية $\{\alpha_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{Z}$ وتحقق $\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i=0$ ينتج أن $\alpha_i x_i=0$ لأجل كل $1\le i\le n$. ونقول عن المجموعة X إنها **مرتبطة** إذا لم تكن مستقلة.

تعريف. [6,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبـديليـة، لنفرض أن X مجموعـة جزئيـة غير خـاليـة من الزمرة G عناصـــرها مغايرة للصـــفر، عندئذ نقول عن المجموعة X إنها مســـتقلة إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية منها مستقلة. ونقول عن المجموعة X إنها مرتبطة إذا لم تكن مستقلة.

تعريف. [6].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبـديليـة، لنفرض أن X مجموعـة جزئيـة غير خـاليـة ومنتهيـة من G عناصـــرها مغايرة للصـــفر، عندئذ نقول إنَّ X أســـاســـاً للزمرة G إذا كان $G=\langle X\rangle$ وكانت المجموعة X مستقلة.

تعريف.[6].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن $X=\{x_i\}_{i=1}^{n}$ مجموعة جزئية من الزمرة G عندئذ نقول إنَّ المجموعة X مســتقلة خطياً إذا كان لأجل أي مجموعة جزئية $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}\subset$ وتحقق $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0$ ينتج أن $\alpha_i=0$ لأجل كل $1\le i\le n$. ونقول عن المجموعـة X إنهـا مرتبطة خطياً إذا لم تكن مستقلة خطياً.

تعريف.[6].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ نقول عن المجموعة X إنها مســـتقلة خطياً إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية منها مستقلة خطياً. ونقول عن المجموعة X إنها مرتبطة خطياً إذا لم تكن مستقلة خطياً.

مبرهنة.1.3.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ القضـايا الآتية صحيحة:

1- إذا كان $0\in X$ فإنَّ المجموعة X تكون مرتبطة خطياً.

2- إذا كانت X مستقلة خطياً فإنها تكون مستقلة.

3- تكون X مرتبطة إذا وفقط إذا حوت مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية مرتبطة.

4- تكون X مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا حوت مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية مرتبطة خطياً.

5- إذا كانت X مرتبطة فإنها تكون مرتبطة خطياً.

تعريف. [6,9,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، عندئذ نقول عن الزمرة G إنها حرة إذا وجد في G مجموعة جزئية غير خالية X مستقلة خطياً ومولدة لها، وندعو المجموعة X في هذه الحالة أساساً حراً للزمرة G.

مبرهنة.1.4. [6,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أن X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ تشكل المجموعة X أساساً حراً للزمرة G إذا وفقط إذا كان كل عنصر $x \in G$ يكتب بدلالة عناصر مجموعة جزئية منتهية من عناصر المجموعة X وبطريقة وحيدة.

مبرهنة.1.5. [6,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، عندئذ تكون الزمرة G حرة إذا وفقط إذا كانت مجموعاً مباشراً لزمرٍ جزئية دوارة غير منتهية منها.

مبرهنة.1.6. [6,9,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة، ولنفرض أنَّ X, Y أساسين حرين مختلفين لها، عندئذ فإنَّ $card(X) = card(Y)$.

مبرهنة. 1.7. [6,11].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة منتهية التوليد ولنفرض أنَّ $X = \{x_1, x_2, .., x_r\}$ أساساً حراً لها، عندئذٍ أياً كان $n \in \mathbf{Z}$ فإنَّ المجموعة:

$$T = \{x_1, x_2, .., x_{j-1}, x_j + nx_i, x_{j+1}, .., x_r\}$$

هي أساس للزمرة G وذلك لكل $i \neq j$.

ملاحظة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أنَّ X,Y أســـاســـين مختلفين لها، عندئذ ليس بالضرورة أن يكون $card(X)=card(Y)$، فضلاً عن ذلك إذا كان X أساساً للزمرة G، عندئذ أياً كان $x\in G$ فإنَّ x يكتب بدلالة عناصـــر مجموعة جزئية منتهية من عناصـــر المجموعة X لكن ليس بالضرورة أن تكون هذه الكتابة وحيدة.

تعريف. [9].

ليكن $(G,+)$ زمرة تبديلية لنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ مجموعة جزئية من G، نقول عن المجموعة X إنها مستقلة عظمى(مستقلة خطياً عظمى) إذا حققت:

1 – المجموعة X مستقلة(مستقلة خطياً).

2 – لأجل كل عنصر $v\in G$ بحيث $v\notin X$ فإنَّ المجموعة $X\bigcup\{v\}$ مرتبطة(مرتبطة خطياً).

مبرهنة. 1.8. [9].

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية مستقلة في G، عندئذ لأجل أي زمرة جزئية $\{0\}\neq A\subseteq G$ يكون الشرطان الآتيان متكافئان:

1– المجموعة X مستقلة عظمى.

2– $\langle X\rangle\bigcap A\neq\{0\}$.

2- التوليد الضعيف.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية من G، عندئذ نسمي كل تركيب لعناصر المجموعة X من الشكل $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ حيث إنَّ $\alpha_i\in\mathbb{Z}$ لأجل كل $1\le i\le n$ وتحقق $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$ تركيباً ضعيفاً لعناصر المجموعة X، ونقول عن العنصر $v\in G$ إنه يكتب على شكل تركيب ضعيف لعناصر المجموعة X إذا وجدت عناصر $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}$ تحقق أنَّ $\sum_{i=1}^{n}a_i=0$ وأنَّ $v=\sum_{i=1}^{n}a_i v_i$.

مبرهنة.2.1.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية و $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية من G. ولنفرض أنَّ:

$$\langle X\rangle_W=\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i:\alpha_i\in\mathbb{Z},\forall 1\le i\le n\ \wedge\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0\}$$

مجموعة التراكيب الضعيفة لعناصر المجموعة X، عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1- إنَّ التركيب الضعيف لحيادي الزمرة G بدلالة عناصر المجموعة X موجود دوماً.

2- المجموعة $\langle X\rangle_W$ تشكل زمرة جزئية في G.

البرهان. واضح.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية و $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية من G. عندئذ نسمي الزمرة الجزئية:

$$\langle X\rangle_W=\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i:\alpha_i\in\mathbb{Z},\forall 1\le i\le n\ \wedge\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0\}$$

الزمرة الجزئية المولدة بضعف بالمجموعة X.

مبرهنة .2.2.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ e هو حيادي هذه الزمرة، عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 – لأجل أي عنصر $v\in G$ فإن $\langle\{v\}\rangle_W=\{e\}$.

2 – لأجل أي مجموعة جزئية منتهية X من G، إذا كان $\langle X\rangle_W\neq\{e\}$ فإن $Card\ X\geq 2$.

3– لأجل أي مجموعتين جزئيتين منتهيتين $X\subseteq Y$ من الزمرة G فإنَّ $\langle X\rangle_w\subseteq\langle Y\rangle_w$.

البرهان.

1 – ينتج مباشرة من التعريف.

2 – ينتج مباشرة من (1).

3– واضح.

العلاقة بين $\langle X\rangle_W$ الزمرة الجزئية المولدة بضعف بمجموعة منتهية X والزمرة الجزئية $\langle X\rangle$ المولد بالمجموعة X نوردها من خلال التمهيدية الآتية:

مبرهنة.2.3.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية منتهية في G. عندئذ فإنَّ $\langle X\rangle_W\subseteq\langle X\rangle$.

البرهان. واضح.

مبرهنة.2.4.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية منتهية في G، عندئذٍ الشرطان الآتيان متكافئان:

1– $X\subseteq\langle X\rangle_W$.

$\langle X \rangle = \langle X \rangle_w$ - 2.

البرهان.

(1)$\Leftarrow$(2). لنفرض أن $X \subseteq \langle X \rangle_w$ ، عندئذ حسب تعريف $\langle X \rangle$ فإن $\langle X \rangle$ هي أصغر زمرة جزئية في G تحوي X ومنه فإنَّ $\langle X \rangle \subseteq \langle X \rangle_w$. من جهة أخرى، وحسب المبرهنة 2.3 نجد أنَّ $\langle X \rangle_w \subseteq \langle X \rangle$ وهكذا فإنَّ $\langle X \rangle = \langle X \rangle_w$.

(2)$\Leftarrow$(1). لنفرض أنَّ $\langle X \rangle = \langle X \rangle_w$، عندئذ لما كان $X \subseteq \langle X \rangle$ نجد أنَّ $X \subseteq \langle X \rangle_w$.

اعتماداً على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

لتكن G زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G. إذا كان $G = \langle X \rangle_w$ ، عندئذ فإنَّ $G = \langle X \rangle$.

ملاحظة.

إنَّ المبرهنة 2.4 تبين لنا أنه في الزمرة التبديلية $(G,+)$ توجد زمر جزئية مولدة بضعف بمجموعات جزئية منتهية من غير محتواه فيها.

ننتقل الآن إلى دراسة الزمر الجزئية المولدة بضعف بمجموعة ما X، والبداية مع المبرهنة الآتية:

مبرهنة 2.5

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة ولنفرض أنَّ $X = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ مجموعة جزئية من G إذا كانت المجموعة X مستقلة خطياً، عندئذ $X \subset \langle X \rangle_w$ وأن $\langle X \rangle \neq \langle X \rangle_w$.

البرهان.

لنفرض أن المجموعة X مستقلة خطياً ولنفرض أن $X \subseteq \langle X \rangle_W$ ، عندئذ لأجل كل عنصر $v_i \in X$ حيث $1 \le i \le n$ توجد عناصر $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ بحيث إن:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \text{ وأن } \sum_{j=1}^{n} a_j = 0$$

ومنه فإن:

$$\sum_{j=1\, j\neq i}^{n} a_j v_j + (a_i - 1)v_i = 0$$

ولما كانت المجموعة X مستقلة خطياً نجد أن $a_i = 1$ وأن $a_j = 0$ لأجل كل $j \neq i$ وهذا يبين أن $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$ وهذا غير ممكن، ومنه فإنَّ $X \not\subset \langle X \rangle_W$ وبالتالي حسب المبرهنة 2.4 نجد أنَّ $\langle X \rangle \neq \langle X \rangle_W$.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، نعلم أنه إذا كانت المجموعة X مستقلة خطياً فهي $S-$مستقلة، لكن العكس غير صحيح بالضرورة، وهنا يطرح التساؤل الآتي، إذا كانت المجموعة X هي $S-$مستقلة وليست مستقلة خطياً فهل يكون $X \subseteq \langle X \rangle_W$؟.

الإجابة عن هذا السؤال نبينها في المثال الآتي:

مثال. 1.

لتكن $(\mathbb{Z},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة، ولتكن $X = \{2,3\}, Y = \{3,5\}$ مجموعتان جزئيتان من $\mathbb{Z}$، نعلم أنَّ $(\mathbb{Z},+)$ زمرة تبديلية حرة، ونلاحظ أنَّ المجموعة X ليست مستقلة خطياً لكنها $S-$مستقلة، ونلاحظ أنَّ:

$$X \subset \langle X \rangle = \langle X \rangle_W = \mathbb{Z}$$

كما نلاحظ أنَّ المجموعة Y ليست مستقلة خطياً لكنها $S-$مستقلة، ونلاحظ أنَّ:

$$Y \not\subset \langle Y \rangle_W = 2\mathbb{Z}$$

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1- إذا كانت المجموعة X هي $S-$مستقلة وليست مستقلة خطياً، عندئذ ليس بالضرورة أنَّ يكون $X \subseteq \langle X \rangle_W$.

2- إذا كانت $X \subseteq \langle X \rangle_W$ فإنَّ المجموعة X مرتبطة خطياً.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، نعلم أنه إذا كانت المجموعة X مستقلة فهي $S-$مستقلة، لكن العكس غير صحيح بالضرورة، وهنا يطرح التساؤل الآتي، إذا كانت المجموعة X مستقلة أو $S-$مستقلة فهل يكون $X \subseteq \langle X \rangle_W$؟.

الإجابة عن هذا السؤال نبينها في الأمثلة الآتي:

مثال. 2.

لتكن $(\mathbb{Z}_{10},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس 10 ولنفرض أنَّ $X = \{5,2\}$ مجموعة جزئية في $\mathbb{Z}_{10}$، نلاحظ أنَّ المجموعة $X = \{5,2\}$ مستقلة، وأنَّ:

$$X \subseteq \langle X \rangle_W = \mathbb{Z}_{10}$$

مثال. 3.

لتكن $(\mathbb{Z}_{30},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس 30 ولنفرض أنَّ $X = \{6,10\}$ مجموعة جزئية في $\mathbb{Z}_{30}$، نلاحظ أنَّ المجموعة $X = \{6,10\}$ مستقلة، بالإضافة لذلك نلاحظ أنَّ:

$$X \not\subset \langle X \rangle_W = 4\mathbb{Z}_{30}$$

مثال. 4.

لتكن $(\mathbb{Z}_{12},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس 12 ولنفرض أنَّ $X = \{2,3\}$ مجموعة جزئية في $\mathbb{Z}_{12}$، نلاحظ أنَّ المجموعة X ليست مستقلة لكنها $S-$مستقلة، بالإضافة لذلك نلاحظ أنَّ:

$$X \subseteq \langle X \rangle_W = \mathbb{Z}_{12}$$

بناءً على الأمثلة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1- إذا كانت المجموعة X مستقلة، عندئذ ليس بالضرورة أن يكون $X \subseteq \langle X \rangle_W$.

2- إذا كانت المجموعة X هي S-مستقلة، عندئذ ليس بالضرورة أنَّ يكون $X \subseteq \langle X \rangle_W$.

مبرهنة. 2.6.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية و $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعة جزئية من G، ولنفرض أنَّ $0 \notin X$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1- $G = \langle X \rangle$.

2- $G = \langle X \cup \{0\} \rangle_W$.

البرهان.

(1) $\Leftarrow$ (2). لنفرض أنَّ المجموعة X تولد الزمرة G، عندئذ لأجل كل $v \in G$ توجد عناصر $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ بحيث $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. لنضع:

$$a_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} a_i \in \mathbf{Z} \text{ و } v_{n+1} = 0 \in G$$

عندئذ يكون $v = \sum_{i=1}^{n+1} a_i v_i$ وأن $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0$ وهذا يبين أن المجموعة $X \cup \{0\}$ تولد بضعف الزمرة G، أي إن $G = \langle X \cup \{0\} \rangle_W$.

(2) $\Leftarrow$ (1). لنفرض أن المجموعة $X \cup \{0\}$ تولد بضعف الزمرة G، عندئذ لأجل كل $v \in G$ توجد عناصر $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ بحيث $v = \sum_{i=0}^{n} a_i v_i$ وأن $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$ حيث إنَّ $v_0 = 0$، ومنه فإن $v = \sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ وهذا يبين أن المجموعة X تولد الزمرة G.

مبرهنة. 2.7.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أنَّ $v_1, v_2, \ldots, v_n \in G$، عندئذ أياً كان $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ فإنّ:

$$\langle\{v_1,v_2,...,v_n\}\rangle_w = \left\langle\{v_i - v_j\}_{i=1,i\neq j}^{n}\right\rangle$$

البرهان.

دون الإخلال بعمومية المسألة نفرض أنَّ $j=1$. إذا كان $x \in \langle\{v_1,v_2,...,v_n\}\rangle_w$ ، فهذا يكافئ أنه توجد مجموعة من العناصر $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subseteq$ تحقق:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i = x \text{ , } \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$$

والذي يكافئ أنَّ: $(-\sum_{i=2}^{n}\alpha_i)v_1 + \sum_{i=2}^{n}\alpha_i v_i = x$ حيث إنَّ $-\sum_{i=2}^{n}\alpha_i = \alpha_1$ ، وهذا يكافئ أنَّ:

$$\sum_{i=2}^{n}\alpha_i (v_i - v_1) = x$$

والذي بدوره يكافئ أنَّ $x \in \left\langle\{v_i - v_1\}_{i=2}^{n}\right\rangle$. مما سبق نجد أنَّ:

$$\langle v_1,v_2,...,v_n\rangle_w = \left\langle\{v_i - v_1\}_{i=2}^{n}\right\rangle$$

3 – الاستقلال الضعيف والاستقلال الخطي الضعيف.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية في G، نقول عن المجموعة X إنها مستقلة بضعف إذا كان لأجل أي مجموعة منتهية من العناصر $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\subset \mathbf{Z}$ التي لأجلها:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \ \wedge \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

ينتج أنَّ $a_1v_1=a_2v_2=\ldots=a_nv_n=0$.

أما إذا وجدت عناصر $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbf{Z}$ بحيث إنَّ $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ وأنَّ $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ ولم يتحقق أنَّ $a_1v_1=a_2v_2=\cdots=a_nv_n=0$ فإننا نقول في هذه الحالة إنَّ المجموعة X مرتبطة ارتباطاً تاماً.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعة جزئية منتهية في G، نقول عن المجموعة X إنها مستقلة خطياً بضعف إذا كان لأجل أي مجموعة منتهية من العناصر $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\subset \mathbf{Z}$ التي لأجلها:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \ \wedge \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

ينتج أن $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$.

أما إذا وجدت عناصر $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbf{Z}$ بحيث إنَّ $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ وأنَّ $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ ولم يتحقق أنَّ $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$ فإننا نقول في هذه الحالة إنَّ المجموعة X مرتبطة ارتباطاً خطياً تاماً.

مثال. 5.

لتكن $(U(10),.)$ زمرة أولر من الرتبة 10، ولنفرض أنَّ $X=\{3,9\}\subseteq U(10)$، نلاحظ أنَّ المجموعة X مستقلة بضعف وليست مستقلة.

مثال. 6.

لتكن $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ $X=\{(1,0),(-1,0)\}$ مجموعة جزئية من الزمرة $(+,\mathbb{Z}^2)$، نلاحظ أنَّ المجموعة X مستقلة خطياً بضعف و ليست مستقلة خطياً.

مبرهنة. 3.1.

لأجل أي زمرة تبديلية $(G,+)$، تكون القضايا الآتية صحيحة:

1- كل مجموعة وحيدة العنصر تكون مستقلة (مستقلة خطياً) بضعف.

2- إذا كانت الزمرة G' زمرة جزئية من G وعديمة الفتل فإنَّ كل مجموعة جزئية من G' مؤلفة من عنصرين تكون مستقلة خطياً بضعف.

3- كل مجموعة جزئية منتهية من G ومستقلة تكون مستقلة بضعف.

4- كل مجموعة جزئية منتهية من G ومستقلة خطياً تكون مستقلة خطياً بضعف.

البرهان.

1- واضح.

2- لتكن $\{v_1, v_2\}$ مجموعة جزئية من G' وليكن $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ يحققان:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \quad \wedge \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

عندئذ نجد أن $\alpha_2 = -\alpha_1$ ومنه يكون $\alpha_1 v_1 - \alpha_1 v_2 = 0$ وهذا يبين أن $\alpha_1(v_1 - v_2) = 0$

.

ومنه:

- إما أنَّ يكون $v_1 - v_2 = 0$ ومنه $v_1 = v_2$ وهذا غير ممكن.

- أو أنَّ يكون $\alpha_1 = 0$، وبالتالي $\alpha_2 = 0$ وهذا يبين أنَّ المجموعة $\{v_1, v_2\}$ مستقلة خطياً بضعف.

3- لتكن $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعة جزئية من G ومستقلة عندئذ أياً كانت العناصر $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ والتي تحقق أنَّ $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ ينتج أنَّ $a_1 v_1 = a_2 v_2 = \ldots = a_n v_n = 0$ ومنه نجد أنَّه أياً كانت العناصر $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{Z}$

والتي تحقق أنَّ $\sum_{i=1}^{n} b_i v_i = 0$ وأنَّ $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$ ينتج أنَّ $b_1 v_1 = b_2 v_2 = \ldots = b_n v_n = 0$ ومنه نجد أنَّ المجموعة X مستقلة بضعف.

4- ينتج من 3 ومن كون كل مجموعة مستقلة خطياً هي مستقلة.

مبرهنة. 3.2.

لتكن $(G,+)$زمرة تبديلية ولتكن $X = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ مجموعة جزئية في G بحيث $0 \notin X$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - المجموعة X مستقلة (مستقلة خطياً).

2 - المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف (مستقلة خطياً بضعف).

البرهان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أنَّ المجموعة X مستقلة ولنضع $v_0 = 0 \in G$، عندئذ فإنَّ:

$$X \cup \{0\} = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

لتكن $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbf{Z}$ تحقق $\sum_{i=0}^{n} \beta_i v_i = 0$ وأنَّ $\sum_{i=0}^{n} \beta_i = 0$، عندئذ يكون $\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = 0$. ولما كانت المجموعة X مستقلة ينتج أن $\beta_1 v_1 = \beta_2 v_2 = \ldots = \beta_n v_n = 0$ ولما كان $v_0 = 0$ نجد أنَّ $\beta_0 v_0 = 0$ ومنه فإنَّ المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف.

$(2) \Leftarrow (1)$. لنفرض أنَّ المجموعة $X \cup \{0\} = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ حيث $v_0 = 0$ مستقلة بضعف ولتكن $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbf{Z}$ تحقق $\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = 0$، عندئذ من أجل $\beta_0 = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i$ نجد أنَّ: $\sum_{i=0}^{n} \beta_i = 0$ وأن $\sum_{i=0}^{n} \beta_i v_i = 0$

وحسب الفرض نجد أن $\beta_0 v_0 = \beta_1 v_1 = \beta_2 v_2 = \ldots = \beta_n v_n = 0$، مما سبق نجد أنَّ $\beta_1 v_1 = \beta_2 v_2 = \ldots = \beta_n v_n = 0$ وهذا يبين أنَّ المجموعة X مستقلة.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية لنفرض أنَّ $X = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ مجموعة جزئية من G، نقول عن المجموعة X إنها مستقلة بضعف عظمى (مستقلة خطياً بضعف عظمى) إذا حققت الشرطين:

1 – المجموعة X مستقلة بضعف (مستقلة خطياً بضعف).
2 – أياً كان $v \in G$ بحيث $v \notin X$ فإنَّ المجموعة $X \cup \{v\}$ مرتبطة ارتباطاً تاماً (مرتبطة ارتباطاً خطياً تاماً).

مبرهنة. 3.3.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية و X مجموعة جزئية منتهية من G، و لنفرض أن $0 \notin X$، عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:
1 – المجموعة X مستقلة عظمى (مستقلة خطياً عظمى).
2 – المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف عظمى (مستقلة خطياً بضعف عظمى).

البرهان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أنَّ المجموعة X مستقلة عظمى، عندئذ فإنَّ المجموعة X مستقلة وبالتالي حسب المبرهنة 3.2 تكون المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف. ليكن $v_{n+1} \in G$ بحيث إنَّ $v_{n+1} \notin X \cup \{0\}$، ولما كانت المجموعة X مستقلة عظمى فإنَّ المجموعة $X \cup \{v_{n+1}\}$ مرتبطة، ومنه تكون المجموعة $X \cup \{0, v_{n+1}\}$ ليست مستقلة بضعف، وبالتالي المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف عظمى.

$(2) \Leftarrow (1)$. لنفرض أن المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف عظمى. عندئذ المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف وحسب المبرهنة 3.2. تكون المجموعة X مستقلة. ليكن $v_{n+1} \in G$ بحيث إن $v_{n+1} \notin X \cup \{0\}$، ولما كانت المجموعة $X \cup \{0\}$ مستقلة بضعف عظمى فإنَّ المجموعة $X \cup \{0, v_{n+1}\}$ ليست مستقلة بضعف، وبالتالي المجموعة $X \cup \{v_{n+1}\}$ ليست مستقلة، وهذا يبين أن المجموعة X مستقلة عظمى.

يتم البرهان بشكل مماثل في حال كانت المجموعة X مستقلة خطياً.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية وغير خالية من G، عندئذ نقول عن المجموعة X إنها $S-$ مستقلة بضعف إذا كان $x \notin \langle X \setminus \{x\} \rangle_w$ وذلك أياً كان $x \in X$.

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية وغير خالية من G، عندئذ إذا كان $0 \in X$ فإنَّ المجموعة X ليست $S-$مستقلة بضعف.

مثال. 7.

لتكن $(+,\mathbb{Z})$ زمرة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ $X = \{6,10,15\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$، نلاحظ أنَّ المجموعة X ليست مستقلة خطياً بضعف، فضلاً عن ذلك نلاحظ أنَّ المجموعة X هي مجموعة $S-$مستقلة بضعف.

مثال. 8.

لتكن $(+,\mathbb{Z})$ زمرة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ $X = \{6,0\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$ ، نلاحظ أنَّ المجموعة $X = \{6,0\}$ مستقلة خطياً بضعف عظمى، فضلاً عن ذلك نلاحظ أنَّ المجموعة X ليست $S-$مستقلة بضعف.

مثال. 9.

لتكن $(+,\mathbb{Z}_6)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس 15 ، ولنفرض أنَّ $X = \{2,3\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$، نلاحظ أنَّ المجموعة X مستقلة بضعف هي $S-$مستقلة بضعف.

مثال. 10.

لتكن $(+,\mathbb{Z}_{15})$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس 15، ولنفرض أنَّ $X = \{1,4,7\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}_{15}$، نلاحظ أنَّ المجموعة X ليست مستقلة بضعف وهي $S-$مستقلة بضعف.

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، لنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية وغير خالية من G، عندئذ إذا كانت المجموعة X مستقلة بضعف (مستقلة خطياً بضعف) فليس بالضرورة أن تكون $S-$ مستقلة بضعف.

مبرهنة. 3.4.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أنَّ $X=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ مجموعة جزئية من G، عندئذ أياً كان $j\in\{1,2,...,n\}$ تكون المجموعة X مستقلة خطياً بضعف(مستقلة بضعف) إذا وفقط إذا كانت المجموعة $Y=\left\{v_i-v_j\right\}_{i=1,i\neq j}^{n}$ مستقلة خطياً(مستقلة).

البرهان. دون الإخلال بعمومية المسألة نفرض أنَّ $j=1$.

$(\Leftarrow)$. لنفرض أنَّ المجموعة X مستقلة خطياً بضعف، ولنأخذ مجموعة العناصر $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}\subseteq\square$ والتي تحقق أنَّ:

$$\sum_{i=2}^{n}\alpha_i(v_i-v_1)=0$$

عندئذ نجد أنَّ:

$$(-\sum_{i=2}^{n}\alpha_i)v_1+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i v_i=0$$

وبما أنَّ:

$$-\sum_{i=2}^{n}\alpha_i+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i=0$$

وبما أنَّ المجموعة X مستقلة خطياً بضعف نجد إنَّ $\sum_{i=2}^{n}\alpha_i=\alpha_2=...=\alpha_n=0$، بالتالي فإنَّ المجموعة Y مستقلة خطياً.

$(\Rightarrow)$. لنفرض أنَّ المجموعة Y مستقلة خطياً، لنأخذ مجموعة العناصر $\{\beta_i\}_{i=1}^{n}\subseteq\square$ والتي تحقق أنَّ:

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i=0\wedge\sum_{i=1}^{n}\beta_i=0$$

عندئذ نجد أنَّ $\beta_1 = -\sum_{i=2}^{n} \beta_i$ وأنَّ:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \sum_{i=2}^{n} \beta_i v_i - (\sum_{i=2}^{n} \beta_i) v_1 = \sum_{i=2}^{n} \beta_i (v_i - v_1)$$

وبما أنَّ المجموعة Y مستقلة خطياً فإنَّ $\beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_n = 0$ وبالتالي $\beta_1 = 0$ ومنه فإنَّ المجموعة X مستقلة خطياً بضعف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، نعلم أنه إذا كانت المجموعة X مستقلة خطياً بضعف فإنَّ المجموعة $Y = \left\{ v_i - v_j \right\}_{i=1, i \neq j}^{n}$ مستقلة خطياً، وأنَّ العكس صحيح، وهنا يطرح التساؤل الآتي، إذا كانت المجموعة X مستقلة بضعف فهل تكون المجموعة $Y = \left\{ v_i - v_j \right\}_{i=1, i \neq j}^{n}$ مستقلة؟ وهل يكون العكس صحيحاً؟ الإجابة عن هذا السؤال نبينه في الأمثلة الآتية:

مثال. 11.

لتكن $(+, \mathbb{Z}_{10})$ زمرة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ $X = \{5,3\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$، نلاحظ أنَّ المجموعة X ليست مستقلة بضعف، بالمقابل نجد أنَّ المجموعة $Y = \{5-3=2\}$ مجموعة مستقلة.

مثال. 12.

لتكن $(U(105),.)$ زمرة أولر من الرتبة 105 ولنفرض أنَّ:

$$X = \{29, 22, 31\} \subseteq U(105)$$

نعلم أنَّ المجموعة X مستقلة بضعف، بالمقابل نجد أنَّ المجموعة:

$$Y = \left\{ 29 \times (22)^{-1}, 31 \times (22)^{-1} \right\} = \{29 \times 43, 31 \times 43\} = \{92, 73\}$$

مجموعة غير مستقلة.

4 – الأساس الحر الضعيف والمجموعات المولدة بضعف الصغرى.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية في G، عندئذٍ نقول إنَّ X مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة G إذا حققت الشرطين الآتيين:

1 – المجموعة X تولد بضعف الزمرة G، أي إنَّ $G = \langle X \rangle_w$.

2 – المجموعة X هي S–مستقلة بضعف.

مبرهنة. 4.1.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية غير خالية من G، عندئذ إذا كانت المجموعة X مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة G فإنَّ X لا تحوي مجموعة جزئية فعلية مولدة بضعف للزمرة G.

البرهان.

لتكن X مجموعة جزئية غير خالية من G، ولنفرض أنَّ X مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة G. لنفرض جدلاً أنه توجد مجموعة جزئية $X_1 \subset X$ تحقق أنَّ $\langle X_1 \rangle_w = G$ ، عندئذ يوجد عنصر $x \in X$ بحيث إنَّ $x \notin X_1$، عندئذ $x \in \langle X_1 \rangle_w \subseteq \langle X \setminus \{x\} \rangle_w$، أي إنَّ $x \in \langle X \setminus \{x\} \rangle_w$ وهذا يبين أنَّ المجموعة X ليست مولدة بضعف صغرى للزمرة G لأنها ليست S–مستقلة بضعف وهذا تناقض، وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ، أي إنَّ X_1 ليست مولدة بضعف للزمرة G، وبالتالي المجموعة X لا تحوي أي مجموعة جزئية فعلية مولدة بضعف للزمرة G.

إنَّ عكس المبرهنة السابقة غير صحيح أيّ إذا كانت المجموعة X مجموعة مولدة بضعف ولا تحوي مجموعة جزئية تولد بضعف الزمرة G فليس بالضرورة أن تكون المجموعة X مجموعة مولدة بضعف صغرى.

مثال. 13.

لتكن $(+, \square)$ زمرة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ $X = \{11,4,7\}$ مجموعة جزئية من $\square$. من الواضح أنَّ $Z = \langle X \rangle_W$، نلاحظ أنَّ المجموعة X مجموعة مولدة بضعف للزمرة $\square$ ولا تحوي مجموعات جزئية تولد بضعف الزمرة $\square$، وبما أنَّ $4 \in \langle \{7,11\} \rangle_w$ فإنَّ المجموعة X ليست $S-$مستقلة بضعف، وبالتالي المجموعة X ليست مجموعة مولدة بضعف صغرى، وهذا يبين أنَّ عكس المبرهنة السابقة غير صحيح.

تعريف.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة و X مجموعة جزئية منتهية في G، عندئذٍ نقول إنَّ X تشكل أساساً ضعيفاً (أساساً حراً ضعيفاً) للزمرة G إذا حققت الشرطين الآتيين:

1 – المجموعة X تولد بضعف الزمرة G، أي إنَّ $G = \langle X \rangle_W$.

2 – المجموعة X مستقلة بضعف (مستقلة خطياً بضعف).

مبرهنة. 4.2.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة منتهية التوليد، ولنفرض أنَّ $X = \{u_1,u_2,...,u_n\}$ مجموعة جزئية من الزمرة G، عندئذ القضيتان الآتيتان صحيحتان:

1- تكون المجموعة X أساساً حراً ضعيفاً للزمرة G، إذا وفقط إذا كانت المجموعة $Y = \{u_i - u_j\}_{i=1,i\neq j}^{n}$ أساس حر.

2- إذا كانت المجموعة X أساساً حراً ضعيفاً للزمرة G وكانت المجموعة Z أساس حر ضعيف أخر للزمرة G، عندئذٍ فإنَّ $Card\ Z = Card\ X$.

البرهان.

1- $(\Leftarrow)$. لنفرض أنَّ $X = \{u_1,u_2,...,u_n\}$ أساس حر ضعيف للزمرة G، عندئذ بحسب المبرهنة 3.4 والمبرهنة 2.7 تكون المجموعة $Y = \{u_i - u_j\}_{i=1,i\neq j}^{n}$ مجموعة مستقلة خطياً و تولد الزمرة G، ومنه فإنَّ المجموعة Y أساس حر.

$(\Rightarrow)$. لنفرض أنَّ $Y = \{u_i - u_j\}_{i=1,i\neq j}^{n}$ أساس حر للزمرة G، عندئذ بحسب المبرهنة 3.4 والمبرهنة 2.7 تكون المجموعة X مجموعة مستقلة خطياً بضعف و تولد بضعف الزمرة G، ومنه فإنَّ المجموعة X أساس حر ضعيف للزمرة G.

2 – لنفرض أنَّ المجموعة $Z = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ أساس حر ضعيف للزمرة G عندئذ بحسب البند الأول تكون المجموعتان $Y = \{u_i - u_j\}_{i=1,i\neq j}^{n}$, $Y_1 = \{v_i - v_j\}_{i=1,i\neq j}^{m}$ أساس حر للزمرة G، وبالاعتماد على المبرهنة 1.6 فإنَّ:

$$Card\ Y = Card\ Y_1$$

ومنه فإنَّ $Card\ X = Card\ Z$.

مبرهنة. 4.3.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة منتهية التوليد، ولنفرض أنَّ $X = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ أساساً حراً ضعيفاً للزمرة G، عندئذ فإنَّ المجموعة X هي مجموعة مستقلة خطياً بضعف عظمى.

البرهان.

لنفرض أنَّ X أساساً حراً ضعيفاً للزمرة G عندئذٍ فإنَّ المجموعة X مستقلة خطياً بضعف في الزمرة G، ولنفرض أنَّه يوجد $v_{n+1} \in G$ بحيث إنَّ $X \cup \{v_{n+1}\}$ مستقلة خطياً بضعف وبالاعتماد على البند 3 من المبرهنة 2.2 فإنَّنا نجد أنَّ المجموعة $Z = X \cup \{v_{n+1}\}$ تشكل أساساً حراً ضعيفاً ونلاحظ أنَّ:

$$Card(Z) = Card(X) + 1$$

وهذا غير ممكن وذلك حسب المبرهنة السابقة. بالتالي فإنَّ المجموعة X مستقلة بضعف خطياً عظمى.

إنَّ المبرهنة السابقة تطرح التساؤل الآتي، هل كل أساسا ضعيفاً في زمرة تبديلية منتهية التوليد يشكل مجموعة مستقلة بضعف عظمى في هذه الزمرة؟ وهل العكس صحيح؟. الإجابة عن هذا السؤال نبينه بالأمثلة الآتية:

مثال. 14.

لتكن $(\mathbf{Z}_6,+)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس 6، ولنفرض أنَّ $X=\{2,3\}$ مجموعة جزئية من الزمرة $\mathbf{Z}_6$. إنَّ المجموعة X تشكل أساساً ضعيفاً للزمرة $\mathbf{Z}_6$ فهي مستقلة بضعف ومولدة بضعف لهذه الزمرة فضلاً عن كونها مستقلة عظمى، لكنها ليست مجموعة مستقلة بضعف عظمى لأنَّ المجموعة $X_1=\{2,3,0\}$ مستقلة بضعف عظمى وذلك حسب المبرهنة **3.2.**

مثال. 15.

لتكن الزمرة $(+,\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6)$، ولنفرض أنَّ $X=\{(2,0),(3,0),(0,2),(0,0)\}$ مجموعة جزئية من الزمرة $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$، نلاحظ أنَّ X تشكل مجموعة مستقلة بضعف عظمى ولا تشكل مجموعة مولدة بضعف لهذه الزمرة.

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية منتهية التوليد، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، عندئذ إذا كانت المجموعة X أساساً ضعيفاً للزمرة G فليس بالضرورة أن تكون مستقلة بضعف عظمى في G، وإذا كانت المجموعة X مستقلة بضعف عظمى في G فليس من الضروري أن تكون أساساً ضعيفاً للزمرة G.

مبرهنة. 4.4

لتكن $(+,\mathbb{Z})$ زمرة الأعداد الصحيحة. ولتكن X مجموعة جزئية منتهية من $\mathbf{Z}$. عندئذ:

1- لأجل كل $a,b\in\mathbf{Z}$ عندئذ تكون المجموعة $X=\{a,b\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$ إذا وفقط إذا كان $a=b+1$.

2- لأجل كل $a,b,c\in\mathbf{Z}$. تكون المجموعة $X=\{a,b,c\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(b-a,c-a)=1$ وكانت الأعداد a,b,c لا تقبل القسمة على الأعداد $b-c,c-a,b-a$ على الترتيب.

البرهان.

1- $(\Leftarrow)$. لنفرض أنَّ المجموعة $X=\{a,b\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$، نعلم أنّ $\langle a,b\rangle_w=\langle b-a\rangle$ وذلك حسب المبرهنة 2.7. وبما أنَّ الزمرة $\mathbf{Z}$ دوارة ومولدة بالعنصر $1\in\mathbf{Z}$ نجد إنّه إما $b-a=1$ أو $b-a=-1$ وبذلك نجد أنّه إما $b=a+1$ أو $a=b+1$ وفي كلتا الحالتين نجد أن $X=\{a,a+1\}$.

$(\Rightarrow)$. لنفرض أنَّ $X=\{a,a+1\}$ وذلك أيا كانت $a\in\mathbf{Z}$ من الواضح أن هذه المجموعة $S-$ مستقلة بضعف، ليكن $x\in\mathbf{Z}$ ولنبحث عن $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$ التي تحقق:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha a+\beta(a+1)=x\end{cases}$$

إن المعادلتين تملك حلاً وحيداً وهو $\alpha=-x,\ \beta=x$ ومنه المجموعة $X=\{a,a+1\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$.

2- $(\Leftarrow)$. لنفرض أنَّ المجموعة $X=\{a,b,c\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$، عندئذ حسب المبرهنة 2.7 نجد أنَّ $\langle a,b,c\rangle_w=\langle b-a,c-a\rangle=\square$، ومنه نجد أنَّ:

$$\gcd(b-a,c-a)=1$$

لنفرض جدلاً $b-c$ يقسم a بالتالي يوجد $\alpha\in\mathbf{Z}$ بحيث إنَّ $a=\alpha(b-c)$ ومنه يكون $a\in\langle b,c\rangle_w=\langle b-c\rangle$ وهذا يناقض كون المجموعة $X=\{a,b,c\}$ هي $S-$مستقلة بضعف ومنه الفرض الجدلي خاطئ و $b-c$ لا يقسم a، وبالمثل نجد أنَّ الأعداد b,c لا تقبل القسمة على الأعداد $c-a,b-a$ على الترتيب.

$(\Rightarrow)$. لما كان $\gcd(b-a,c-a)=1$ فإنَّ المجموعة $\{b-a,c-a\}$ تولد الزمرة $\mathbf{Z}$، عندئذ حسب المبرهنة 2.7 نجد أنَّ $\langle a,b,c\rangle_w=\langle b-a,c-a\rangle=\square$، ولنفرض جدلاً أنَّ المجموعة $X=\{a,b,c\}$ ليست $S-$مستقلة بضعف ولنفرض أنَّ $a\in\langle b,c\rangle_w=\langle b-c\rangle$ ومنه يوجد $\alpha\in\mathbf{Z}$ بحيث إنَّ $a=\alpha(b-c)$ وهذا يناقض كون $b-c$ لا يقسم a ومنه الفرض الجدلي خاطئ والمجموعة $X=\{a,b,c\}$ هي $S-$مستقلة بضعف، مما سبق نجد أنَّ المجموعة $X=\{a,b,c\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$.

مبرهنة. 4.5.

لتكن $(+,\mathbb{Z})$ زمرة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من $\mathbf{Z}$، عندئذٍ تكون المجموعة X أساس حر ضعيف للزمرة $\mathbf{Z}$ إذا وفقط إذا كانت المجموعة X تملك الشكل $X=\{a,b\}$ وكان $b=a+1$.

البرهان.

$(\Leftarrow)$. بما أنَّ الزمرة $(+,\mathbb{Z})$ تبديلية حرة وقدرة أي أساس حر لها تساوي 1، عندئذٍ إذا كانت X أساس حر ضعيف للزمرة $\mathbf{Z}$ فإنه اعتماداً على المبرهنة 4.2 نجد أن $Card\ X=2$، نعلم أنّ $\langle a,b\rangle_w=\langle b-a\rangle$ وذلك حسب المبرهنة 2.7. وبما أنَّ الزمرة $\mathbf{Z}$ دوارة ومولدة بالعنصر $1\in\mathbf{Z}$ نجد إنّه إما $b-a=1$ أو $b-a=-1$ وبذلك نجد أنّه إما $b=a+1$ أو $a=b+1$ وفي كلتا الحالتين نجد أنَّ المجموعة X تملك الشكل $\{a,a+1\}$.

$(\Rightarrow)$. من المبرهنة 2.7 والمبرهنة 3.4.

مثال. 16.

لتكن $\mathbf{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة، ولنفرض أنَّ:

$X=\{2,3\}\ ,\ X_1=\{2,5,8\}, X_2=\{1,3,6\}, X_3=\{2,6,13\}, X_4=\{1,0\}$

مجموعات جزئية من الزمرة $(\mathbf{Z},+)$.

- المجموعة X تشكل أساساً حراً ضعيفاً ومولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}$.
- المجموعات X_2, X_3 هي مجموعات مولدة بضعف صغرى لكنها لا تشكل أساساً ضعيفاً للزمرة $\mathbf{Z}$.
- المجموعة X_1 فهي لا تشكل مجموعة مولدة بضعف صغرى ولا تشكل أساساً ضعيفاً للزمرة $\mathbf{Z}$.
- المجموعة X_4 تشكل أساساً حراً ضعيفاً للزمرة $\mathbb{Z}$، لكنها لا تشكل مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}$.

من المثال السابق يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية منتهية التوليد، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية منتهية من G، عندئذ إذا كانت المجموعة X أساساً حراً ضعيفاً للزمرة G فليس بالضرورة أن تكون مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة G، وإذا كانت المجموعة X مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة G فليس من الضروري أن تكون أساساً حراً ضعيفاً لها.

من المعلوم أنه إذا كانت $(F,+)$ زمرة تبديلية حرة منتهية التوليد، وكان X أساساً حراً لها عندئذٍ لا يمكن إيجاد مجموعات مولدة للزمرة F قدرتها أقل من $Card(X)$ وبالتالي لا يمكن إيجاد مجموعة مولدة بضعف قدرتها أقل من $Card(X)$، وهذا يطرح السؤال التالي هل يمكن إيجاد مجموعات مولدة بضعف قدرتها تساوي n؟

مبرهنـة. 4.6.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة، ولنفرض أنَّ $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ أساساً حراً للزمرة G ، عندئذ إذا كانت $Y=\{y_1,y_2,...,y_m\}$ مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة G فإنَّ $m>n$.

البرهان.

بما أنه من غير الممكن أنَّ يكون $m<n$ نفرض جدلاً أنَّ $m=n$ وليكن $x\in F$ ولنفرض أنَّ $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbf{Z}$ بحيث إنَّ:

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=0\\ \alpha_1y_1+\alpha_2y_2+...+\alpha_ny_n=x\end{cases}$$

إنَّ المعادلتين السابقتين تكافئان المعادلة :

$$\alpha_2(y_2-y_1)+...+\alpha_n(y_n-y_1)=x$$

ومنه فإنَّ:

$$x\in\langle y_2-y_1,...,y_n-y_1\rangle$$

وبالتالي تكون المجموعة $\{y_2 - y_1, ..., y_n - y_1\}$ مولدة للزمرة G قدرتها أقل من n ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي إنَّ $m > n$.

إنَّ المبرهنة السابقة تبين أنَّه في الزمرة التبديلية الحرة منتهية التوليد تكون قدرة أي مجموعة مولدة بضعف صغرى أكبر تماما من قدرة أي أساس حر لها، نبين في المبرهنة الآتية كيف يمكن اشتقاق مجموعة مولدة بضعف صغرى لزمرة تبديلية حرة منتهية التوليد من أساس حر لها.

مبرهنة. 4.7.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة، ولنفرض أنَّ $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ أساس حر للزمرة G وأنَّ $a \in \mathbf{Z}$، عندئذ تكون المجموعة:

$$Y = \{x_1, x_2, ..., (a+1)x_i, ax_i, ..., x_n\}$$

هي مجموعة مولدة بضعف صغرى.

البرهان.

لتكن $(G,+)$ زمرة تبديلية حرة، ولنفرض أنَّ $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ أساساً حراً لها وليكن $y \in G$ و $a \in \mathbf{Z}$ ولنبحث عن العناصر $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1} \in \mathbf{Z}$ التي تحقق:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{n+1} = 0 \quad (*) \\ \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_i (a+1)x_i + \alpha_{i+1} a x_i + .., + \alpha_{n+1} x_n = y \end{cases}$$

إنَّ المعادلات السابقة تكافئ المعادلة:

$$\alpha_1(x_1 - ax_i) + ... + \alpha_i x_i + \alpha_{i+2}(x_{i+1} - ax_i) ... + \alpha_{n+1}(x_n - ax_i) = y$$

وحتى يكون للمعادلة السابقة حلا يجب أن تكون المجموعة:

$$T = \{(x_1 - ax_i), (x_2 - ax_i), ..., x_i, (x_{i+1} - ax_i), ..., x_n - ax_i\}$$

مولدة للزمرة G، لكن بالاعتماد على المبرهنة 1.7 فإنَّ T تشكل أساساً حراً للزمرة G وبالتالي توجد العناصر $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, \alpha_{i+2} ..., \alpha_{n+1} \in \mathbf{Z}$ ومن (*) يكون $\alpha_{i+1} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i+1}}^{n+1} \alpha_j$

وهذا يعني أنَّ $G = \langle Y \rangle_W$.

لنفرض جدلاً أنَّ المجموعة Y ليست $S-$مستقلة بضعف عندئذ دون المساس بالعمومية يوجد عنصر ولنفرض أنه $x_1 \in Y$ يحقق أنَّ:

$$x_1 \in \langle Y \ / x_1 \rangle_w$$

وحسب المبرهنة 2.7 لأجل $x_2 \in Y$ يكون:

$$x_1 \in \langle Y \ / x_1 \rangle_w = \langle \{(x_3 - x_2),...,(a+1)x_i - x_2, ax_i - x_2,...,x_n - x_2\} \rangle$$

وبما أنه لا يمكن توليد الزمرة G بأقل من n عنصر فإنَّ الفرض الجدلي خاطئ والمجموعة Y هي $S-$مستقلة بضعف، مما سبق نجد أنَّ المجموعة Y مولدة بضعف صغرى للزمرة G.

مبرهنة. 4.8.

لتكن $(+, \mathbb{Z}_n)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس n، عندئذ:

1- أياً كان $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0, n-1\}$ فإنَّ المجموعة $X = \{a, a+1\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_n$ وتشكل أساساً ضعيفاً لها.

2- ليكن $a \in \mathbb{Z}_n$ بحيث إنَّ a أولي مع n عندئذ فإنَّ المجموعة $X = \{a, 0\}$ تشكل أساساً ضعيفاً للزمرة $\mathbb{Z}_n$.

3- لتكن $a, b \in \mathbb{Z}_n^*$ بحيث إنَّ $b - a$ أولي مع n عندئذ فإنَّ المجموعة $X = \{a, b\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_n$ وتشكل أساساً ضعيفاً لها.

4- لأجل كل $a, b, c \in \mathbb{Z}_n^*$ تكون المجموعة $X = \{a, b, c\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_n$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(b-a, c-a) = d$ أولياً مع n وكانت الأعداد a, b, c لا تقبل القسمة على الأعداد $b-c, c-a, b-a$ بالترتيب.

5- إذا كان $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_t^{\alpha_t}$ حيث إنَّ $p_1, p_2, ..., p_t$ أعداداً أولية عندئذ فإنَّ الزمرة $\mathbb{Z}_n$ تملك على الأقل مجموعة مستقلة بضعف عظمى قدرتها تساوي $t+1$.

البرهان.

1- لنفرض أنَّ $X = \{a, a+1\}$ وذلك أيا كانت $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0, n-1\}$ من الواضح أن هذه المجموعة $S-$ مستقلة بضعف، ليكن $x \in \mathbf{Z}_n$ ولنبحث عن $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ التي تحقق:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha a+\beta(a+1)=x\end{cases}$$

إنَّ أحد حلول جملة المعادلتين السابقتين هو $(-x,x)$ وهذا يبين أنَّ المجموعة X مولدة بضعف للزمرة $\mathbf{Z}_n$، وبالتالي تكون المجموعة $X=\{a,a+1\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbf{Z}_n$.

لنبرهن أنَّ المجموعة X مستقلة بضعف، لنفرض أنَّ العناصر $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$ تحقق أنَّ:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha a+\beta(a+1)=0\end{cases}$$

إنَّ جملة المعادلات السابقة تقبل حلولاً من الشكل $(-r\,n,r\,n)$ حيث إنَّ $r\in\mathbf{Z}$ ومن الواضح أنَّ:

$$\alpha a=(-r\,n)a=0,\beta(a+1)=(rn)(a+1)=0$$

ومنه فإنَّ المجموعة X مستقلة بضعف، وبالتالي فإنَّ المجموعة X تشكل أساساً ضعيفاً للزمرة $\mathbf{Z}_n$.

2- ليكن $a\in\mathbb{Z}_n$ بحيث إنَّ aأولي مع n ولنفرض أنَّ $X=\{a,0\}$، لنفرض أنَّ $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$ وتحقق أنَّ:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha a+\beta 0=0\end{cases}$$

إنَّ جملة المعادلات السابقة تقبل حلولاً من الشكل $(r\,n,-r\,n)$ حيث إنَّ $r\in\mathbf{Z}$ ومن الواضح أنَّ:

$$\alpha a=(r\,n)a=0,\beta 0=(-rn)(0)=0$$

ومنه فإنَّ المجموعة X مستقلة بضعف.

ليكن $x\in\mathbb{Z}_n$ ولنبحث عن $\alpha,\beta\in\mathbf{Z}$ والتي تحقق أنَّ:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha a+\beta 0=x\end{cases}$$

ومنه نجد أنَّ $\alpha a = x$، ولما كان $a \in \mathbb{Z}_n$ أوليا مع n فإنه يوجد عنصر $a^{-1} \in \mathbb{Z}_n$ لأجله $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ وبالتالي نجد أنَّ:

$$\beta = -x\ a^{-1},\ \ \alpha = x\ a^{-1}$$

أي إنَّ المجموعة X مولدة بضعف للزمرة $\mathbb{Z}_n$، مما سبق نجد أنَّ المجموعة X تشكل أساساً ضعيفاً للزمرة $\mathbb{Z}_n$.

3- لتكن $a,b \in \mathbb{Z}_n^*$ بحيث إنَّ $b-a$ أولي مع n عندئذ يمكن بسهولة إثبات أنَّ المجموعة $X = \{a,b\}$ هي S–مستقلة بضعف ومستقلة بضعف.

ليكن $x \in \mathbb{Z}_n$ ولنبحث عن $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$ التي تحقق المعادلتين:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha a + \beta b = x \end{cases}$$

إنَّ الجملة السابقة تكافئ المعادلة $\beta(b-a) = x$ ولما كان $b-a$ أولياً مع n نجد أن:

$$\alpha = -x\ (b-a)^{-1}\ ,\ \beta = x\ (b-a)^{-1}$$

وهذا يبين أنَّ المجموعة X مولدة بضعف للزمرة $\mathbb{Z}_n$، مما سبق نجد أنَّ المجموعة X تشكل أساساً ضعيفاً ومجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_n$.

4- $(\Leftarrow)$. لنفرض أنَّ المجموعة $X = \{a,b,c\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_n$، عندئذ حسب المبرهنة 2.7 نجد أنَّ $\langle a,b,c\rangle_w = \langle b-a,c-a\rangle$، ومنه نجد أنَّ $\mathbb{Z}_n = \langle a,b,c\rangle_w$، لنفرض جدلاً أنَّ $\gcd(b-a,c-a)$ أولي مع n، $b-c$ يقسم a بالتالي يوجد عنصر $\alpha \in \mathbf{Z}$ بحيث إنَّ $a = \alpha(b-c)$ ومنه يكون $a \in \langle b,c\rangle_w = \langle b-c\rangle$ وهذا يناقض كون المجموعة $X = \{a,b,c\}$ هي S–مستقلة بضعف ومنه الفرض الجدلي خاطئ و $b-c$ لا يقسم a، وبالمثل نجد أنَّ الأعداد b,c لا تقبل القسمة على الأعداد $c-a,b-a$ على الترتيب.

$(\Rightarrow)$. لما كان $\gcd(b-a,c-a)$ أوليا مع n ، فإنَّ المجموعة $\{b-a,c-a\}$ تولد الزمرة $\mathbb{Z}_n$، عندئذ حسب المبرهنة 2.7 نجد أنَّ:

$$\mathbb{Z}_n = \langle a,b,c \rangle_w = \langle b-a, c-a \rangle$$

لنفرض جدلاً أنَّ المجموعة $X = \{a,b,c\}$ ليست S–مستقلة بضعف ولنفرض أنَّ $a \in \langle b,c \rangle_w = \langle b-c \rangle$ ومنه يوجد $\alpha \in \mathbf{Z}$ بحيث إنَّ $a = \alpha(b-c)$ وهذا يناقض كون $b-c$ لا يقسم a ومنه الفرض الجدلي خاطئ والمجموعة $X = \{a,b,c\}$ هي S–مستقلة بضعف، مما سبق نجد أنَّ المجموعة $X = \{a,b,c\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_n$.

5- لنفرض أنَّ $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ عندئذٍ توجد مجموعة $Y \subseteq \mathbb{Z}_n$ مستقلة عظمى قدرتها تساوي tوبالتالي إنَّ المجموعة $Y \cup \{0\}$ مستقلة بضعف عظمى حسب المبرهنة 3.3 ونلاحظ أنَّ قدرتها تساوي $t+1$.

مبرهنة. 4.9.

لتكن $\left(\mathbb{Z}_p, +\right)$ زمرة الأعداد الصحيحة بالمقاس p ، ولنفرض أنَّ X مجموعة جزئية من الزمرة $\mathbb{Z}_p$ تحقق أنَّ $0 \notin X$ ، عندئذٍ إذا كان $Card X = 2$ فإنَّ المجموعة X مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_p$ وتشكل أساساً ضعيفاً لها، علاوة على ذلك لا يوجد مجموعات مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_p$ قدرتها أكبر تماماً من 2.

البرهان.

ليكن $a,b \in \mathbb{Z}_n^*$، لما كان $b-a$ أولياً مع p ، عندئذ وبالاعتماد على المبرهنة السابقة تكون المجموعة $X = \{a,b\}$ مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_p$ وتشكل أساساً ضعيفاً لها.
لتكن Y مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_p$ عندئذٍ $0 \notin Y$ ولنفرض جدلاً أنَّ $Card Y > 2$، عندئذٍ أياً كان $a,b \in Y$ فإنَّ $\langle a,b \rangle_w = \mathbb{Z}_p$ ومنه فإنَّ المجموعة Y تحوي مجموعة جزئية فعلية وتولد بضعف الزمرة $\mathbb{Z}_p$، وهذا يناقض كونها مجموعة مولدة بضعف صغرى للزمرة $\mathbb{Z}_p$، وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ أي إنَّ $Card Y = 2$.

المراجع العلمية:

[1] – Hamza, H., AL- Khouja, E., and AL -Taybani, A., " weak Linear Independence of vector Spaces ", journal of mathematics and statistical science,vol. 6, 157-181, (2020).

[2] – Michal, H. and Pavel, R., " Characterization of Abelian Group With Minimal generating Set " Quast. Math. J. 38(1), pp. 103 – 120, (2015).

[3] –Pavel, R., " Abelian Groups with a Minimal Generating Set " Quast. Math. J. 33(2), pp. 147 – 159, (2010).

[4] – Halbeisen, L., Hamilton, M. and Pavel, R., " Minimal Generating Sets of groups, rings and fields " Quast. Math. J. 30(3), pp. 355 – 363. (2007),

[5]- Anderson, D.D., and Robeson, J., "Bases For Modules," Expositiones Mathematicae vol. 22, pp. 283-296, 2004.

[6]- Rotman, J. J., An Introduction to the Theory of Groups, 4th ed., Springer- Verlag , New York, 1995.

[7]- Burris, S., and Sankappanavar, H. P., A Course in Universal Algebra, Graduate Texts in Mathematics, vol. 78, Springer-Verlag New York Inc, 1981.

[8]- Hungerford, T. W., Algebra , Springer-Verlag New York Inc., 1974.

[9]- Fuchs, L., Infinite Abelian Groups, Vol. I, Pure and Applied Mathematics, Vol. 36, Academic Press, New York, 1970.

[10] – Gratzer, G.," Universal Algebra " D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, (1968).

[11] – Kurosh, A.G.," The Theory of Group " AMS Chelsea Publishing, Providence, (1960).