من التحويل الثلاثي إلى الأحادي: استراتيجية مهجنة جديدة لحل بعض معادلات فريدهولم التفاضلية – التكاملية

(1) أ.د. خليل يحيى

(2) آلاء محمود حمادة

جامعة دمشق – كلية العلوم– قسم الرياضيات

الملخص

تهدف هذه الدراسة إلى تطوير إطار تحليلي–عددي مهجّن يجمع بين التحويل الثلاثي العام وطريقة تحليل أدوميان لمعالجة صنف واسع من معادلات فريدهولم التفاضلية–التكاملية الخطية غير الخطية. تعتمد المنهجية المقترحة على توظيف تقنية التوسيع الدالي التي تمكّن من إسقاط المسألة متعددة الأبعاد إلى صيغة أحادية المتغير، مما يسمح باختزال التحويل الثلاثي العام إلى تحويل أحادي أكثر بساطة وكفاءة حسابية. بعد ذلك، يتم تطبيق طريقة أدوميان لتحليل الجزء غير الخطي من المعادلة عبر تمثيل الحل على شكل متسلسلة لا نهائية من حدود قابلة للحساب بشكل تكراري.

تتميّز هذه المقاربة بقدرتها على التعامل مع غير الخطية دون الحاجة إلى خطيّة أو افتراضات تبسيطية، كما توفر تقارباً سريعاً نحو الحلول الدقيقة. وللتحقق من فعالية الطريقة، تم تطبيقها على عدة مسائل نموذجية من معادلات فريدهولم من النوع الثاني، حيث أظهرت النتائج توافقاً تاماً مع الحلول التحليلية المعروفة، مع كفاءة عالية في تقليل الجهد الحسابي.

تشير النتائج إلى أن المنهجية المقترحة تمثل أداة قوية ومرنة يمكن توظيفها في حل طيف واسع من المسائل الفيزيائية والهندسية التي تُصاغ على شكل معادلات تفاضلية–تكاملية خطية وغير خطية.

الكلمات المفتاحية: طريقة أدوميان، التحويل الثلاثي العام، التحويل الأحادي، معادلات فريدهولم التفاضلية–التكاملية.

From Triple to Single Integral Transform: An Advanced Hybrid Strategy for Solving Nonlinear Fredholm Integro-Differential Equations

Abstract

This paper presents a novel hybrid analytical–numerical framework that combines the General Triple Integral Transform with the Adomian Decomposition Method for solving a broad class of linear and nonlinear Fredholm integro-differential equations. The proposed approach is based on an extension technique that enables the transformation of multi-dimensional problems into an equivalent one-dimensional formulation, allowing the triple transform to be effectively reduced to a simpler single integral transform.

The nonlinear components are then systematically handled using the Adomian decomposition technique, where the solution is expressed as a rapidly convergent infinite series. One of the key advantages of the proposed method is its ability to treat nonlinear terms directly without requiring linearization or restrictive assumptions.

To demonstrate the efficiency and accuracy of the method, several test problems are considered. The obtained results show excellent agreement with the exact solutions, confirming the validity and robustness of the proposed approach. The method also exhibits fast convergence and reduced computational complexity compared to traditional techniques.

The findings suggest that the proposed hybrid technique provides a powerful and flexible tool for solving a wide range of linear and nonlinear integro-differential equations arising in applied mathematics, physics, and engineering.

Keywords: Adomian Decomposition Method ,General Triple Transform, Single Integral

Transform, Fredholm Integro-Differential Equations.

1-المقدمة:

تشكل المعادلات التفاضلية-التكاملية $(Integro-Differential\ Equations)$ ركيزة أساسية في العديد من المجالات العلمية مثل الفيزياء والهندسة، تظهر هذه المعادلات في مختلف المجالات المتنوعة مثل الاقتصاد، ديناميكيات المفاعلات، نمذجة البيئة، هندسة الطيران، الانظمة البيولوجية والكيميائية وغيرها [1]

نظراً لتعقيد هذه المعادلات، وخاصة غير الخطية منها، التي تزيد من صعوبة الحصول على الحلول الدقيقة، اتجه الباحثون الى تطوير العديد من الطرق التحليلية وشبه، مثل طريقة تحليل أدوميان (ADM)[2]، وطريقة أدوميان لابلاس $(LADM)$[3]، وطريقة الاضطراب الهوموتوبي (HPM)[4]، وطريقة التكرار المتحولي المعدلة $(MVIM)$[5].

تبرز طريقة أدوميان (ADM)[6] التي قدمها الباحث الأمريكي جورج أدوميان[6]، كتقنية حسابية واعدة لمعالجة غير الخطية المتأصلة في معادلات فريدهولم التفاضلية-التكاملية.

ظهر في السنوات الأخيرة، ظهر توجه بحثي جديد يهدف الى تعميم التحويلات التكاملية في اطار موحد، قدمت $Saadeh$[7] التحويل الثلاثي العام $\mathcal{T}_3$ الذي يحتوي على معظم التحويلات الأحادية والثنائية والثلاثية كحالات خاصة.

يتميز هذا التحويل بكفاءته وسهولة استخدامه، مما يجعله أداة واعدة لحل معادلات فريدهولم التفاضلية-التكاملية غير الخطية.

2- الهدف من البحث:

تطبيق خوارزمية $TGADM$ لحل صنف واسع من المعادلات التفاضلية–التكاملية الخطية وغير الخطية.

3- تعاريف أساسية:

3-1: تعطى مسألة القيم الابتدائية والممثلة بمعادلة فريدهولم التفاضلية–التكاملية غير الخطية من المرتبة n[1]:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, F\big(u(t)\big)dt \qquad (1)$$

والمزودة بالشروط الابتدائية الآتية:

$$u^{(k)}(0) = \alpha_k \quad , k = \overline{0, n-1}$$

حيث $f(x)$ دالي تحليلي معلوم، $k(x,t)$ نواة المعادلة، $F(u(t))$ دالي غير خطي.

3-2 تعريف التحويل الثلاثي العام:[7]

$$G_T(s,u,v) = \mathcal{T}_3[g(x,y,z)]$$

$$= p_1(s)p_2(u)p_3(v) \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty g(x,y,z)\, e^{-q_1(s)x - q_2(u)y - q_3(v)z} dxdydz \qquad (2)$$

حيث $g(x,y,z)$ دالي مستمر لكل من $z > 0$ و $y > 0$ و $x > 0$

4- بعض خواص التحويل الثلاثي العام :[7]

4-1- الخاصية الخطية:

$$\mathcal{T}_3[\alpha g(x,y,z)+\beta h(x,y,z)]=\alpha\mathcal{T}_3[g(x,y,z)]+\beta\mathcal{T}_3[h(x,y,z)]$$
$$=\alpha G_T(s,u,v)$$
$$+\beta H_T(s,u,v) \qquad (3)$$

4-2- خاصية الالتفاف:

$$g(x,y,z)\ ***\ h(x,y,z)=\int_0^x\int_0^y\int_0^z g(x-a,y-b,z-c)h(a,b,c)\,dadbdc$$

$$\mathcal{T}_3[g(x,y,z)\ ***\ h(x,y,z)]$$
$$=\frac{1}{p_1(s)p_2(u)p_3(v)}G_T(s,u,v)H_T(s,u,v) \qquad (4)$$

4-3- التحويل الثلاثي العام لمشتق التابع $g(x,y,z)$ من المرتبة n:

يعطى التحويل الثلاثي العام لمشتق التابع على الشكل الآتي:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}\right]$$
$$=q_1(s)G_T(s,u,v)$$
$$-p_1(s)G_D(0,u,v) \qquad (5)$$

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial^2 g(x,y,z)}{\partial x^2}\right]$$
$$=q_1^2(s)G_T(s,u,v)-q_1(s)p_1(s)G_D(0,u,v)$$
$$-\frac{p_1(s)\partial G_d(0,u,v)}{\partial x} \qquad (6)$$

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial^n g(x,y,z)}{\partial x^n}\right]$$
$$=q_1^n(s)G_T(s,u,v)$$
$$-\sum_{k=1}^{n}q_1^{n-k}(s)p_1(s)\frac{\partial^{k-1}G_D(0,u,v)}{\partial x^{k-1}} \qquad (7)$$

تجدر الإشارة الى أن التحويل الثلاثي العام يختزل الى التحويلين الأحادي والثنائي عند التعامل مع دوال ذات أبعاد اقل وفق العلاقتين الآتيتين:

$$G_T(s,0,0) = G_s(s), G_T(s,u,0) = G_D(s,u) \quad (8)$$

حيث أن G_s هو التحويل الأحادي العام، G_D هو التحويل الثنائي العام، وبناءً على ذلك عند تطبيق $\mathcal{T}_3$ على معادلة ذات متغير أحادي، يُختزل جبرياً الى التحويل الأحادي العام.

5- التحويل الثلاثي العام العكسي:[7]

$$\mathcal{T}_3^{-1}[G(s,u,v)] = \mathcal{T}_x^{-1}\mathcal{T}_y^{-1}\mathcal{T}_z^{-1}[G_T(s,u,v)] = g(x,y,z) \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p_1(s)} e^{q_1(s)x} q'_1(s)\, ds \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{1}{p_2(u)} e^{q_2(u)y} q'_2(u)\, du \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{p_3(v)} e^{q_3(v)z}$$

6- التحويل الأحادي العام:[7, 8]

$$G_s(s) = \mathcal{T}_1[g(x)] = p_1(s)\int_0^\infty g(x)e^{-q_1(s)x}\, dx \quad (10)$$

7- خواص التحويل الأحادي العام:[8]

7-1-الخاصة الخطية:

$$\mathcal{T}_1[\alpha g(x) + \beta h(x)] = \alpha\mathcal{T}_1[g(x)] + \beta\mathcal{T}_1[h(x)] \quad (11)$$

7-2- التحويل الأحادي العام لمشتق التابع $g(t)$ من المرتبة n:

ليكن $\mathcal{T}_1\{g(t)\} = G_s$ عندئذٍ:

$$\mathcal{T}_1[g'(t)] = q_1(s)G_s - p_1(s)g(0) \quad (12)$$

$$\mathcal{T}_1[g''(t)] = q_1^2(s)G_s - q_1(s)p_1(s)g(0) - p_1(s)g'^{(0)} \quad (13)$$

$$\mathcal{T}_1\left[g^{(n)}(t)\right] = q_1^n(s)G_s - \sum_{k=1}^{n} q_1^{n-k}(s)p_1(s)g^{(k-1)}(0) \quad (14)$$

$$\mathcal{T}_1[g(t-a)H(t-a)] = e^{-q_1(s)a}G_s(s) \quad (15)$$

7-3- خاصية الالتفاف:

إذا كان $G_s(s) = \mathcal{T}_1[g(t)]$ و $H_s(s) = \mathcal{T}_1[h(t)]$ فإن:

$$\mathcal{T}_1[(g*h)(t)] = \frac{1}{p_1(s)}G_s(s)H_s(s) \quad (16)$$

حيث أن $(g*h)(t) = \int_0^t g(t-x)h(x)dx$

7-4- التحويل الأحادي العام لتكامل تابع $G(t)$:

$$\mathcal{T}_1\left[\int_0^t g(t)\,dt\right] = \frac{1}{q_1(s)}G_s \quad (17)$$

8- التحويل الأحادي العام العكسي:[8]

ليكن G_s التحويل الأحادي العام للتابع $g(t)$، نسمي $g(t)$ بالتحويل الأحادي العام العكسي للتابع G_s، ونعبر عن ذلك رياضياتياً بالشكل الآتي:

$$g(t) = \mathcal{T}_1^{-1}[G_s] = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p_1(s)} e^{q_1(s)t} q'_1(s) G_s \, ds \qquad (18)$$

$$p_1(s) \neq 0 \, , s \in \mathbb{C}$$

9- يبين الجدول الآتي التحويلين (الأحادي والثلاثي) لبعض التوابع الشهيرة:

$g(t)$	$\mathcal{T}_1[g(t)] = G_s(s)$	$g(x,y,z)$	$\mathcal{T}_3[g(x,y,z)] = G_T(s,u,v)$
$a \in R$	$ap_1(s)/q_1(s)$	$a \in R$	$\frac{ap_1(s)}{\frac{q_1(s)p_2(u)}{q_2(u)p_3(v)}}/q_3(v)$
t	$p_1(s)/q_1^2(s)$	xyz	$\frac{p_1(s)}{\frac{q_1^2(s)p_2(u)}{q_2^2(u)p_3(v)}}/q_3^2(v)$
e^{at}	$\frac{p_1(s)}{q_1(s)} - a$	$e^{ax+by+cz}$	$\frac{p_1(s)}{q_1(s)} - \frac{ap_2(u)}{q_2(u)} - \frac{bp_3(v)}{q_3(v)} - c, q_1(s) > a, q_2(u) > b, q_3(v) > c$
$\cos at$	$\frac{p_1(s)q_1(s)}{q_1^2(s)} + a^2$	$\cos ax \cos by \cos c$	$\frac{p_1(s)q_1(s)}{q_1^2(s)} + \frac{a^2p_2(u)q_2(u)}{q_2^2(u)} + \frac{b^2p_3(v)q_3(v)}{q_3^2(v)} + c^2$
$\sin at$	$\frac{ap_1(s)}{q_1^2(s)} + a^2$	$\sin ax \sin by \sin cz$	$\frac{ap_1(s)}{q_1^2(s)} + \frac{a^2bp_2(u)}{q_2^2(u)} + \frac{b^2cp_3(v)}{q_3^2(v)} + c^2$

t^{α}	$p_1(s)\Gamma(\alpha+1)/q_1^{\alpha+1}(s)$	$x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$	$\frac{p_1(s)p_2(u)p_3(v)\Gamma(\alpha+1)}{\frac{q_1^{\alpha+1}(s)\Gamma(\beta+1)}{\frac{q_2^{\beta+1}(u)\Gamma(\gamma+1)}{q_3^{\gamma+1}(v)}}}, \forall \alpha, \beta > -1$
$g'(t)$	$q_1(s)G_s(s) - p_1(s)g(0)$	$f(x)$	$\frac{F_s(s)p_2(u)}{q_2(u)p_3(v)}/q_3(v)$

10- تقنية التهجين المقترحة لطريقة تحليل أدوميان باستخدام التحويل الثلاثي العام:

لتكن معادلة فريدهولم التفاضلية–التكاملية غير الخطية الآتية:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, F\big(u(t)\big)dt, \quad a \le x \le b \qquad (19)$$

بغية التمكن من تطبيق التحويل الثلاثي العام $\mathcal{T}_3$ على معادلة أحادية المتغير، يستخدم الدالي الموسع في الفضاء الثلاثي الأبعاد والذي يختزل رياضياتياً إلى التحويل الأحادي العام بالشكل الآتي:

$$u(x,y,z) = u(x) \quad , \quad \forall y,z > 0$$

بتطبيق التحويل الثلاثي العام على طرفي المعادلة (19) واستبدال $u(x)$ بالتابع $U(x,y,z)$، نجد أن:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial^n U}{\partial x^n}\right] = \mathcal{T}_3[f(x)] + \lambda \mathcal{T}_3\left[\int_a^b k(x,t)F(U(t,y,z))dt\right]$$

يعبر عن التحويل المشتق من المرتبة n

$$\mathcal{T}_3\left(\frac{\partial^n U}{\partial x^n}\right) = q_1^n(s)G_{\mathcal{T}}(s,u,v) - \sum_{k=1}^{n} q_1^{n-k}(s)p_1(s)\frac{\partial^{k-1}G_D(0,u,v)}{\partial x^{k-1}}$$

حيث أن $G_T(s,u,v) = \mathcal{T}_3[U(x,y,z)]$

$$G_D(0,u,v) = \mathcal{T}_2[U(0,y,z)]$$

$$\left[\frac{\partial^{k-1}U(0,y,z)}{\partial x^{k-1}}\right]\mathcal{T}_2 = \frac{\partial^{k-1}G_D(0,u,v)}{\partial x^{k-1}}$$

إن العلاقة الأخيرة تمثل التحويل الثنائي العام للمشتق من المرتبة $k-1$ عند $x=0$

وباستخدام خاصية المشتق من المرتبة n للتحويل الثلاثي العام وقسمة طرفي المعادلة على $\frac{p_2(u)p_3(v)}{q_2(u)q_3(v)}$ ، نحصل على معادلة جبرية في فضاء التحويل الأحادي العام بالشكل الآتي:

$$q_1^n(s)\mathcal{T}_1[u(x)] - \sum_{k=1}^{n} q_1^{n-k}(s)\, p_1(s)\, \alpha_{k-1}$$

$$= \mathcal{T}_1[f(x)] + \lambda\mathcal{T}_1 \int_a^b k(x,t)\,\{F(u(t)\}dt$$

بتطبيق التحويل الأحادي العام العكسي $\mathcal{T}_1^{-1}$ ، نحصل على:

$$u(x) = g(x) + \lambda\mathcal{T}_1^{-1}\left[\frac{p_1(s)}{q_1^n(s)}\int_a^b \mathcal{T}_1 k(x,t)\,\mathcal{T}_1\{F(u)\}dt\right]$$

حيث أن $g(x)$ يمثل الحدود الناتجة عن الشروط الابتدائية والحد غير المتجانس $f(x)$.

ووفقاً لطريقة أدوميان يتم تمثيل الحل $u(x)$ على شكل متسلسلة غير منتهية من الحدود بالشكل الآتي:

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x)$$

بكتابة الدال غير الخطي $F(u)$ على شكل متسلسلة غير منتهية من كثيرات حدود ادوميان بالشكل الآتي:

$$F(u) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(x)$$

$$A_m = \frac{1}{m!}\frac{d^m}{d\lambda^m}\left[F\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} \quad , m \in \mathbb{N}$$

بتعويض والاصلاح نحصل على العلاقات التكرارية الآتية:

$$u_0(x) = g(x)$$

$$u_{m+1}(x) = \lambda \mathcal{T}_1^{-1}\left[\frac{p_1(s)}{q_1^n(s)}\int_a^b \mathcal{T}_1[k(x,t)]\, A_m(t)dt\right] \quad , m \geq 0$$

وبالتالي حسب طريقة أدوميان، تعطى صيغة الحل النهائي بالشكل الآتي:

$$u(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N-1} u_m(x)$$

تم برهان التقارب في المرجع[**10**]

11- تقنية الطريقة المقترحة:

بغية توضيح كفاءة ودقة التقنية المقترحة عرضنا عدة تطبيقات:

تطبيق (1):[9]

لتكن مسألة القيم الابتدائية الممثلة بمعادلة فريدهولم التفاضلية–التكاملية الخطية من النوع الثاني الآتية:

$$u'''(x) = \sin x - x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu'(t)\,dt \qquad (20)$$

والمزودة بالشروط الابتدائية الآتية:

$$u(0) = 1, u'(0) = 0, u''(0) = -1$$

تجدر الإشارة إلى أن صيغة الحل الدقيق لهذه المسألة تعطى على الشكل $u(x) = \cos x$

بحسب صيغة التحويل الثلاثي العام لدينا: $U(x, y, z) = u(x), \forall y, z > 0$

بتطبيق هذا التحويل على طرفي المعادلة (20)، نجد:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right] = \mathcal{T}_3[\sin x] - \mathcal{T}_3[x] - \mathcal{T}_3\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} xtU_t(t, y, z)\,dt\right]$$

وباستخدام خاصية المشتق من المرتبة الثالثة، نجد:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right] = q_1^3 G_T - q_1^2 p_1 G_D(0) - q_1 p_1 \frac{\partial G_D(0)}{\partial x} - p_1 \frac{\partial^2 G_D(0)}{\partial x^2}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية المعطاة في العلاقة الأخيرة، نجد:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right] = q_1^3 G_T - q_1^2 p_1 \frac{p_2 p_3}{q_2 q_2} + p_1 \frac{p_2 p_3}{q_2 q_3}$$

وباستخدام جدول التحويلات الثلاثية العامة والتعويض والاختزال نحصل على معادلة في فضاء التحويل الأحادي العام على الشكل الآتي:

$$\mathcal{T}_1[u] = \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_1}{q_1^3} + \frac{p_1}{q_1^3(q_1^2+1)} - \frac{p_1}{q_1^5}\left(1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} tu'(t)\,dt\right)$$

ومن ثم بتطبيق التحويل الأحادي العام العكسي على طرفي المعادلة الأخيرة، نجد:

$$u(x) = \cos x - \frac{x^4}{24}\left(1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} tu'(t)dt\right)$$

بكتابة الجزء غير الخطي: $C = \sum_{m=0}^{\infty} C_m$ ، $u = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x)$

$$C_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t' u_m(t)dt$$

ومنه تنتج العلاقات التكرارية الآتية:

$$u_0(x) = \cos x - \frac{x^4}{24}$$

$$u_{m+1}(x) = -\frac{x^4}{24}C_m\,, m \geq 0$$

$$u_1(x) = 0.05495x^4\,, u_2(x) = -0.01752x^4$$

$$u_3(x) = 0.00559x^4\,\,, u_4(x) = -0.00178x^4$$

$$u_5(x) = 0.00057x^4\,, u_6(x) = -0.00018x^4$$

$$u(x) = \cos x - \frac{x^4}{24}(1 - 1.3188 + 0.4204 - 0.1341 + 0.0428 - 0.0136$$
$$+ 0.00436 - 0.00139 + \cdots) = \cos x - \frac{x^4}{24}(1-1)$$

$$u(x) = \cos x$$

وهو الحل الدقيق للمسألة.

تطبيق (2): [3]

لتكن مسألة القيم الابتدائية الممثلة بمعادلة فريدهولم التفاضلية–التكاملية الخطية من النوع الثاني الآتية:

$$u''(x) = e^x - x + \int_0^1 xtu(t)\,dt \qquad (21)$$

والمزودة بالشروط الابتدائية الآتية:

$$u(0) = 1, u'(0) = 1$$

تجدر الإشارة إلى أن صيغة الحل الدقيق لهذه المسألة تعطى على الشكل: $u(x) = e^x$

بحسب صيغة التحويل الثلاثي العام لدينا:

$$U(x,y,z) = u(x), \quad \forall y,z > 0$$

بتطبيق التحويل الثلاثي العام على طرفي المعادلة (21)، نحصل على:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] = \mathcal{T}_3[e^x] - \mathcal{T}_3[x] - \mathcal{T}_3\left[\int_0^1 xtU(t,y,z)\,dt\right]$$

باستخدام خاصية تحويل المشتق على طرفي المعادلة الأخيرة:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] = q_1^2(s)G_T(s,u,v) - q_1(s)p_1(s)G_D(0,u,v) - p_1(s)\frac{\partial G_D(0,u,v)}{\partial x}$$

بحساب $G_D(0,u,v)$ و $\frac{\partial G_D(0,u,v)}{\partial x}$ من الشروط الابتدائية والتعويض في العلاقة الأخيرة، نجد:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] = q_1^2(s)G_T(s,u,v) - q_1(s)p_1(s)\frac{p_2(u)p_3(v)}{q_2(u)q_3(v)} - p_1(s)\frac{p_2(u)p_3(v)}{q_2(u)q_3(v)}$$

وباستخدام جدول التحويلات الثلاثية العامة والتعويض والاختزال نحصل على معادلة في فضاء التحويل الأحادي العام بالشكل الآتي:

$$\mathcal{T}_1[u(x)] = \frac{p_1(s)}{q_1(s)} + \frac{p_1(s)}{q_1^2(s)} + \frac{p_1(s)}{q_1^2(s)(q_1(s)-1)} - \frac{p_1(s)}{q_1^4(s)} + \int_0^1 tu(t)dt\,\frac{p_1(s)}{q_1^4(s)}$$

وبتطبيق التحويل الأحادي العام العكسي على طرفي المعادلة الأخيرة، نجد:

$$u(x) = 1 + x + (e^x - 1 - x) - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\int_0^1 tu(t)dt$$

بوضع:

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x)$$

وبما أن $F(u) = u$ خطية فإن حدوديات ادوميان $u_m = A_m$

وبتعويض العلاقات والإصلاح نحصل على العلاقات التكرارية الآتية:

$$u_0(x) = e^x - \frac{x^3}{6}$$

$$u_{m+1}(x) = \frac{x^3}{6}C_m \ , m \geq 0$$

$$C = \int_0^1 tu(t)\,dt$$

$$u_0(x) = e^x - \frac{x^3}{6}, u_1(x) = \frac{x^3}{6}C_0$$

$$C_0 = \int_0^1 t(e^t - \frac{t^3}{6})\, dt = \frac{29}{30}$$

$$u_1(x) = \frac{29}{180}x^3, u_2(x) = \frac{29}{5400}x^3$$

$$u_3(x) = \frac{29}{162000}x^3$$

نلاحظ أن $u_m(x)$ من الشكل:

$$u_m(x) = \frac{x^3}{6} \cdot \frac{29}{30^m}$$

بجمع حدود المتسلسلة:

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) = e^x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{29}{30^m}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{29}{30^m} = \frac{\frac{29}{30}}{1 - \frac{1}{30}} = 1$$

ومنه نجد الحل الدقيق للمسألة المعطاة:

$$u(x) = e^x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} \cdot 1 = e^x$$

تطبيق (3):[11]

لتكن مسألة القيم الابتدائية الممثلة بمعادلة فريدهولم التفاضلية–التكاملية غير الخطية من النوع الثاني الآتية:

$$u'(x) = \cos x - \frac{\pi x}{48} + \frac{1}{24}\int_0^{\pi} xu^2(t)\,dt \qquad (22)$$

والمزودة بالشروط الابتدائية الآتية:

$$u(0) = 0$$

تجدر الإشارة إلى أن صيغة الحل الدقيق لهذه المسألة تعطى على الشكل:

$$u(x) = \sin x$$

بحسب صيغة التحويل الثلاثي العام لدينا:

$$U(x, y, z) = u(x), \qquad \forall y, z > 0$$

بتطبيق التحويل الثلاثي العام $\mathcal{T}_3$ على طرفي المعادلة المعطاة (22)، نجد:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial U}{dx}\right] = \mathcal{T}_3[\cos x] - \frac{\pi}{48}\mathcal{T}_3[x] + \frac{1}{24}\mathcal{T}_3\left[\int_0^{\pi} xU^2(t, y, z)dt\right]$$

باستخدام خاصية تحويل المشتق، نجد:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = q_1(s)G_T(s, u, v) - p_1(s)G_D(0, u, v)$$

باستخدام الشرط الابتدائي، نجد:

$$U(0, y, z) = u(0) = 0 \Rightarrow G_D(o, u, v) = 0$$

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = q_1(s)G_T(s, u, v)$$

باستخدام جدول التحويلات الثلاثية العامة والتعويض والاختزال نحصل على معادلة في فضاء التحويل الأحادي العام:

$$\mathcal{T}_1[u(x)] = \frac{p_1(s)}{q_1^2(s)+1} - \frac{\pi}{48}\cdot\frac{p_1(s)}{q_1^3(s)} + \frac{\int_0^\pi u^2(t)dt}{24}\cdot\frac{p_1(s)}{q_1^3(s)}$$

بتطبيق التحويل الأحادي العام العكسي على طرفي المعادلة الأخيرة، نجد:

$$u(x) = \sin x - \frac{\pi}{96}x^2 + \frac{x^2}{48}\int_0^\pi u^2(t)\,dt$$

بكتابة الدالي:$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x)$ ، ونشر الجزء غير الخطي $u^2(t)$ الى حدوديات ادوميان

$$u^2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t)$$

$$A_0 = u_0^2, \qquad A_1 = 2u_0u_1, \qquad A_2 = 2u_0u_1 + u_1^2, \cdots$$

بالتعويض والاصلاح نحصل على العلاقات التكرارية الآتية:

$$u_0(x) = \sin x - \frac{\pi}{96}x^2$$

$$u_{m+1}(x) = \frac{x^2}{48}C_m\,, m \geq 0$$

بحساب $A_0(t)$ و C_0 نحصل على التكرار الأول

$$u_1(x) = \frac{x^2}{48}\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi^7}{46080}\right) = 0.00448x^2$$

$$u_2(x) = \frac{x^3}{48}\cdot\frac{1}{24}\left(\pi^2 - 4 - \frac{\pi^6}{480}\right)\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi^7}{46080}\right) = -0.00067x^2$$

$$u_3(x) = 2 \times x^2 10^{-6}$$

نلاحظ أن: $-\frac{\pi}{96}+\frac{1}{48}(0.215-0.032+0.0001+\cdots\cdots)=0$

بجمع حدود المتسلسلة :

$$u(x)=\sin x+x^2\left(-\frac{\pi}{96}+\frac{1}{48}\sum_{m=0}^{\infty}C_m\right)$$

$$u(x)=\sin x$$

وهو الحل الدقيق للمسألة المعطاة.

تطبيق (4):[12]

لتكن مسألة القيم الابتدائية الممثلة بمعادلة فريدهولم التفاضلية–التكاملية غير الخطية من النوع الثاني الآتية:

$$u''(x)=\sinh x+x-\int_0^1 x\left(\cos h^2 t-u^2(t)\right)dt \qquad (23)$$

والمزودة بالشروط الابتدائية الآتية:

$$u(0)=0,u'(0)=1$$

تجدر الإشارة إلى أن صيغة الحل الدقيق لهذه المسألة تعطى على الشكل:

$$u(x)=\sinh x$$

بحسب صيغة التحويل الثلاثي العام لدينا:

$$U(x,y,z)=u(x)\,,\forall y,z>0$$

بتطبيق التحويل الثلاثي العام $\mathcal{T}_3$ على طرفي المعادلة المعطاة (23)، نجد:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] = \mathcal{T}_3[\sinh x] + \mathcal{T}_3[x] - \mathcal{T}_3\left[x\int_0^1 \cos h^2\, t\, dt\right] + \mathcal{T}_3\left[x\int_0^1 U^2\,(t)dt\right]$$

باستخدام خاصية تحويل المشتق على طرفي المعادلة الأخيرة، نجد:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] = q_1^2 G_T - q_1 p_1 G_D(0) - p_1 \frac{\partial G_D(0)}{\partial x}$$

باستخدام الشروط الابتدائية، نجد:

$$U(0,y,z) = u(0) = 0 \Longrightarrow G_D(0) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0,y,z) = u'(0) = 1 \Longrightarrow \frac{\partial G_D(0)}{\partial x} = \frac{p_2 p_3}{q_2 q_3}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{T}_3\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] = q_1^2 G_T - p_1 \frac{p_2 p_3}{q_2 q_3}$$

باستخدام جدول التحويلات الثلاثية العامة والتعويض و الاختزال نحصل على معادلة في فضاء التحويل الأحادي العام:

$$\mathcal{T}_1[u] = \frac{p_1}{q_1^2} + \frac{p_1}{q_1^2(q_1^2-1)} + \frac{p_1}{q_1^4}\left(1 - \int_0^1 \cos h^2\,(t)dt + \int_0^1 u^2(t)\,dt\right)$$

بتطبيق التحويل الأحادي العام العكسي، نجد:

$$u(x) = \sinh x - 0.06778x^3 + \frac{x^3}{6}\int_0^1 u^2(t)\,dt$$

بكتابة الدالي المجهول $u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x)$

$$C = \sum_{m=0}^{\infty} C_m$$

حيث: $C_m = \int_0^1 A_m(t)\,dt$

وبالتعويض نحصل على العلاقات التكرارية الآتية:

$$u_0(x) = \sinh x - 0.06778x^3$$

$$u_{m+1}(x) = \frac{x^3}{6} C_m\,, m \geq 0$$

$$u_1(x) = 0.06305x^3\ \ , u_2(x) = 0.00432x^3$$

$$u_3(x) = 0.000388x^3\,, u_4(x) = 0.000027x^3$$

نلاحظ ان: $(-0.06778 + 0.06305 + 0.00432 + \cdots) = 0$

$$u(x) = \sinh x$$

وهو الحل الدقيق للمسألة المعطاة.

تطبيق(5): [13]

لتكن مسألة القيم الابتدائية الممثلة بمعادلة فريدهولم التفاضلية–التكاملية من نوع البانتوغراف:

$$u'(x) = 1 + x\int_0^1 (6t-4)\,u\left(\frac{t}{2}\right) dt \qquad (24)$$

والمزودة بالشرط الإبتدائي الآتي:

$$u(0) = 0$$

تجدر الإشارة إلى أن صيغة الحل الدقيق لهذه المسألة تعطى على الشكل:

$$u(x) = x$$

بحسب صيغة التحويل الثلاثي العام لدينا:

$$U(x,y,z) = u(x)\ , \forall y,z > 0$$

بتطبيق التحويل الثلاثي العام $\mathcal{T}_3$ على طرفي المعادلة المعطاة (24)، نجد:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \mathcal{T}_3[1] + \mathcal{T}_3\left[x\int_0^1 (6t-4)\,U\left(\frac{t}{2},y,z\right)dt\right]$$

باستخدام خاصية تحويل المشتق على طرفي المعادلة الأخيرة، نجد:

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = q_1(s)G_T(s,u,v) - p_1(s)G_D(0,u,v)$$

باستخدام الشروط الابتدائية، نجد:

$$U(0,y,z) = u(0) = 0 \Longrightarrow G_D(0,u,v) = 0$$

$$\mathcal{T}_3\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = q_1(s)G_T(s,u,v)$$

باستخدام جدول التحويلات الثلاثية العامة والتعويض و الاختزال نحصل على معادلة في فضاء التحويل الأحادي العام:

$$\mathcal{T}_1[u] = \frac{p_1(s)}{q_1^2(s)} + \frac{p_1(s)}{q_1^3(s)}\int_0^1 (6t-4)u(\frac{t}{2})dt$$

بتطبيق التحويل الأحادي العام العكسي، نجد:

$$u(x) = x + \frac{x^2}{2}\int_0^1 (6t-4)u(\frac{t}{2})dt$$

وفقاً لطريقة أدوميان نكتب الحل على شكل متسلسلة بالعلاقة الآتية:

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x)$$

$$u_0(x) = x$$

$$u_{m+1}(x) = \frac{x^2}{2} C_m, m \geq 0$$

حيث: $C_m = \int_0^1 (6t-4) u_m\left(\frac{t}{2}\right) dt$

$$u_0\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2}$$

$$C_0 = \int_0^1 (6t-4) t \left(\frac{t}{2}\right) dt = 0$$

$$u_1(x) = \frac{x^2}{2} C_0 = 0 \Longrightarrow u_1\left(\frac{t}{2}\right) = 0$$

$$C_1 = \int_0^1 (6t-4) t \frac{t^2}{96} dt = 0$$

$$u_2(x) = \frac{x^2}{2} C_1 = 0$$

نلاحظ أن:

$$u_m(x) = 0, m \geq 1$$

$$\Longrightarrow u(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots = x$$

وهو الحل الدقيق للمسألة المعطاة.

12- النتائج والتوصيات:

في هذه الدراسة، تم تطوير تقنية مهجنة جديدة تجمع بين التحويل الثلاثي العام وطريقة تحليل أدوميان بهدف معالجة معادلات فريدهولم التفاضلية–التكاملية غير الخطية بكفاءة عالية. أظهرت النتائج أن

استخدام التوسيع الدالي يساهم بشكل فعّال في تبسيط البنية الرياضية للمسألة من خلال اختزالها إلى صيغة أحادية المتغير، مما يسهّل تطبيق أدوات التحليل المختلفة.

كما بيّنت التطبيقات العملية أن الطريقة المقترحة قادرة على إنتاج حلول دقيقة تتطابق تماماً مع الحلول التحليلية المعروفة، مع تحقيق تقارب سريع وتقليل ملحوظ في التعقيد الحسابي. ويُعد هذا الدمج بين التحويلات التكاملية وتقنيات التحليل التكراري خطوة واعدة نحو تطوير أدوات أكثر كفاءة لمعالجة غير الخطية في النماذج الرياضية.

في ضوء هذه النتائج، يمكن توسيع العمل مستقبلاً ليشمل معادلات أكثر تعقيداً مثل المعادلات الكسرية، والمعادلات ذات التأخير الزمني، وكذلك تطبيق الطريقة على مسائل متعددة الأبعاد في الفيزياء والهندسة التطبيقية، مما يعزز من القيمة العلمية والتطبيقية للمنهجية المقترحة.

المراجع:

[1] Eshkuvatov. Z. & Hooi. T. S.(2024). LAPLACE DECOMPOSITION METHOD FOR SOLVING FREDHOLM INTEGRODIFFENTIAL EQUATIONS WITH INITAL VALUE PROBLEMS. Journal of Mathematical Sciences and Informatics,4(3).

[2] Vahidi. A. R, Bablian. E. Cordshooli. G. A. & Azimzadeh. Z.(2009) .Numerical Solution of Fredholm integro differential equation by Adomians decomposition method. International Journal of Mathematical Analysis ,3(33-36), 1769-1773.

[3] AlHayan.W.M.(2013). Solving nth order integro differential equations using the combined Laplace transform Adomian decomposition method.

[4] Eshkuvatov. Z.(2022). New development of homotopy analysis method for nonlinear integro differential equations with initial value problems. Math. Model. comput ,9(4),842-859.

[5] Dawood. L. A, Hamoud. A. A, Ghadle. K. P, & Atshan. S. M. (2019). Usage of the modified Variational iteration technique for solving Fredholm integro differential equations. International Journal of Mechanical and Production Engineering and Development ,9(2), 895-902.

[6] Adomian. G.(2013). Solving frontier problems: the decomposition method Springer Science & Business Media.

[7] Hindawi Journal of Mathematics Valume (2023), Article ID 4512353 , 12 pages https://doi. Org/10.1155/2023/4512353, A Generalized Approach of Triple Integral Transforms and Applications.

[8] Jafar. H. (2021). A new general integral transform for solving integral equations, Journal of Advanced Research,32,133-38.

[9] Al-Saar. F. M &Ghadle. K. P. (2021),Solving nonlinear Fredholm integro differential equations of Some numerical methods .Advances in the Theory of nonlinear Analysis and its Applications,5(2),260-276.

[10] Hosseini, M.,& Nasabzadeh, H.(2006). On the convergence of Adomian decomposition method. Applied mathematics and computation. 182(1). PP: 536-543.

[11] Saha. B. K., Mohiuddin. A. M. & Parua. S. (2017). He's homotopy Perturbation method for Solving Linear and nonlinear Fredholm integro differential equations. International Journal of Theoretical and Applied Mathematics ,3(6), 174.

[12] Manafianheris. J. (2012). Solving the integro differential equations using modified Laplace Adomian decomposition method. Journal of Mathematics Extension,6,41-55.

[13] Iserles,A.(1993). On the generalized pantograh functional−differential equation

European Journal of Applied Mathematics,4(1),1−38.